

# VARIEDADES DIDÁCTICAS MATEMÁTICAS

Alvaro L. Poblete\*  
Ismenia R. Guzmán\*  
Carlos O. Méndez\*

**RESUMO** Neste artigo apresentamos algumas idéias para uma proposta de aprendizagem-ensino que temos experimentado. Ela foi estruturada em relação a uma situação problema que atua como variável distinguida, fixando outras variáveis didáticas que a apoiam. O conjunto destas, permitem-nos construir o modelo didático que chamamos Variedade Didática Matemática (VDm).

**PALAVRAS-CHAVE:** Didática; Resolução de problemas; Variedade.

**ABSTRACT** Some ideas about a learning-teaching proposal which are being carried out are presented in this article. This proposal has been structured around a problem acting as a distinguished variable and establishing other didactic variables which support it. The whole set allows us to construct the didactic model called Mathematical Didactic Variety (VDm).

**KEY-WORDS:** Didactic; Problem solving; Varieties.

## UNA VARIEDAD DIDÁCTICA, ¿CÓMO SURGE Y CON QUÉ FINES?

En los últimos años en los planes para la enseñanza de la Matemática, sean chilenos u extranjeros, se menciona como un objeto primordial el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para resolver problemas. Esto se ha convertido en un foco de investigación actual en Educación Matemática, sin embargo, muchos resultados muestran el escaso éxito que se ha obtenido en el logro de tal objetivo. Tal vez una razón podría ser que se ha privilegiado la variable rendimiento de los estudiantes por sobre otras.

A nuestro juicio el rendimiento de los estudiantes es sólo la punta del iceberg que constituye la enseñanza de la Matemática. Al respecto, surgen múltiples interrogantes: ¿las acciones de los profesores tienen incidencia en los resultados que logran los estudiantes?, ¿esos logros no son consecuencias de algún modo de las metodologías a que han sido sometido los estudiantes?, ¿existe comparación de resultados de

---

\*Docentes da FONDECYT - Universidade de Los Lagos - Chile.

estudiantes que han recibido tales enseñanzas por distintos métodos?, ¿se ha estudiado el tiempo escolar en el cual el alumno tiene un rol protagónico en la clase?, ¿se han variado esos tiempos y confrontado después con los resultados obtenidos?, ¿ha tenido tiempo el alumno para aprehender en lugar de almacenar la información?, ¿cuánto del tiempo escolar está dedicado a problemas?, ¿qué tipo de problemas ha tenido que enfrentar en clase?, ¿qué estrategias han aparecido?, ¿existe una concepción más o menos similar, entre los profesores, de lo que se entiende por problema?, ¿se distingue entre ejercicios y problemas?, ¿con que taxonomía se clasifican los ejercicios o los problemas?.

Sabemos que hay múltiples acciones destinadas a elevar los rendimientos de los estudiantes, no obstante el problema no ha sido abordado en toda su complejidad. En el nivel superior la situación es aún más crítica, pues prácticamente existen escasas investigaciones respecto al tema y la preocupación por el rendimiento de los estudiantes recibe tratamientos locales (pruebas adicionales o cursillos de ayuda). Pero el problema no se trata y pareciera que la única preocupación, es el bajo rendimiento de los estudiantes.

De lo anterior se desprende entonces, una falta de experiencias, estudios e investigaciones sobre estrategias explícitas de enseñanza, que pongan en juego el aprendizaje de la Matemática a través del enfrentar y resolver problemas. En consecuencia, falta el estudio comparativo del nivel de logros de aprendizaje que se obtiene al cambiar las estrategias de enseñanza. Por "logros de aprendizaje" entendemos las competencias y habilidades matemáticas adquiridas por el estudiante luego de ser sometido a una situación de aprendizaje.

La interrogante que surge frente a tales planteamientos es la siguiente: ¿enfrentar a los estudiantes a situaciones problemáticas diversas, mejora cualitativa y cuantitativamente sus niveles de logro de aprendizaje matemático?.

PLUVINAGE (1993) escribía que "la didáctica de la resolución de problemas sobrepasa ampliamente el ámbito matemático". Por otro lado, SCHOENFELD (1988) afirmaba que el enfrentar problemas "permite poner a prueba la funcionalidad de los conocimientos matemáticos de los aprendices, sus estrategias cognitivas-metacognitivas y sus creencias derivadas de sus experiencias".

Pensamientos con los que concordamos plenamente y nos proponemos diseñar un escenario para la puesta en obra de la didáctica de la resolución de problemas. La obra creada por el profesor, plantea una situación problemática perteneciente al ámbito matemático del estudiante y lo desafía, tomando en cuenta el campo experiencial del estudiante de modo que se sienta involucrado y desafiado.

## CONCEPTO DE VARIEDAD DIDÁCTICA MATEMÁTICA

Nos hemos propuesto diseñar un escenario para la puesta en obra de la didáctica de la resolución de problemas. La variedad será la obra que el profesor crea a partir de una situación problemática perteneciente al ámbito matemático focalizado, tomando en cuenta el campo experiencial del estudiante, de modo que se sienta involucrado y desafiado por esa problemática.

El término **Variedad Didáctica Matemática** (VDm) lo hemos definido como “una situación de aprendizaje asociada a la matemática, construida considerando como variables didácticas, las situaciones problemas, contextos y registros de expresión”. Para nosotros el concepto de variable didáctica tiene un sentido próximo al de BROUSSEAU (1991) que considera que una variable didáctica puede ser modificada por el profesor y que afecta la jerarquía de estrategias de solución (costo, validez, complejidad). No obstante, nosotros elegimos las variables antes de diseñar la propuesta didáctica de modo de hacerlas interactuar con alguna jerarquía en las situaciones planteadas. Así, nos aproximamos a un modelo a través de la proposición de diferentes problemas.

El problema inserto en la variedad es una **situación abierta**, la que cuestiona al estudiante y éste tiene distintas posibilidades para abordar tal cuestión. En este caso no hay pautas, pues el estudiante tiene que hacer jugar sus competencias y conocimientos anteriores, los que deben ser funcionales si es que el sujeto los ha adquirido y se ha apropiado de ellos.

Plantear estas situaciones abiertas es un desafío para el docente, es un trabajo de creación. A pesar que no se trata de crear a partir de la nada, sino muchas veces se podrá transformar algunas situaciones clásicas o rutinarias en una abierta, que admita varias interrogantes y que exija un cuestionamiento tanto de las estrategias como de las soluciones.

Para lograr éxito en esta actividad el estudiante debe haber tenido ocasiones de poner a prueba sus competencias y conocimientos. Un trabajo heurístico es fundamental y no un entrenamiento mecánico de aprendizaje de reglas de aplicación sucesiva.

En nuestra variedad didáctica focalizaremos al alumno en su comportamiento autónomo frente a un problema que lo desafía y cuestiona. El profesor ha trabajado antes y trabajará después de la actividad heurística del estudiante. Antes, porque él debe prepararla o seleccionarla de acuerdo a algún objetivo. Después, porque debe facilitar el cuestionamiento de las soluciones u orientar la búsqueda de estrategias para la solución del problema.

Nuestra variedad didáctica pretende que el estudiante se “responsabilice” de su aprendizaje frente a la apertura de posibilidades de enfrentar una situación problemática, cada vez más específica en nuestro caso, ya que está dirigida a

estudiantes de nivel medio o superior. Nosotros el acento lo ponemos en el **trabajo heurístico** del estudiante frente a un **problema abierto**. La búsqueda de estrategias y mecanismos de control lo lleven a un desafío que acepta y lo hace interactuar con sus compañeros y con el profesor. La dialéctica profesor-alumno la miramos desde la perspectiva del alumno.

## VARIABLES DIDÁCTICAS

Las variables didácticas que consideraremos son las situaciones problemas, los registros de expresión y los contextos. A continuación explicitaremos lo que entenderemos por registros de expresión y contextos.

## REGISTROS DE EXPRESIÓN

La noción de **registro** aparece en el análisis de las tareas que los estudiantes deben enfrentar. Esta surge de una perspectiva semiótica: un registro está constituido por signos, en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, íconos, y estos signos están asociados de manera interna y externa. De manera interna según lazos de contextos y de pertenencia a una misma red semántica, y de manera externa según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones (estas reglas son propias de la red semántica involucrada).

Los registros son entonces medios de expresión de representación y están caracterizados precisamente por las posibilidades ligadas a su sistema semiótico. Un registro tiene la posibilidad, gracias a sus signos propios y a la manera según la cual ellos se organizan, de proveer una representación de un objeto, idea o de un concepto no necesariamente matemático.

Un registro, en sí mismo, no está asociado ni a objetos, ni a conceptos particulares. Así no tendrá sentido de hablar de registro geométrico, porque por lo anterior, es claro que un marco geométrico, en sentido matemático, necesita varios registros. Por el contrario es pertinente de hablar de registro gráfico. El tipo de figuras focalizadas y la manera en que ellas se organizan definen este registro. El registro gráfico caracterizado por la presencia simultánea de figuras geométricas y elementos de referencias servirá también para presentar funciones como histogramas o "quesos estadísticos".

Los registros que consideraremos en nuestro trabajo son el registro Gráfico, el Algebraico, el Simbólico, el de Tabulaciones, registro Lenguaje (verbal, escrito).

## REGISTRO GRÁFICO

Sistema Semiótico: Está constituido por los signos que conforman un sistema de referencia cartesiano ortogonal. Así los signos son: puntos, rectas, curvas, segmentos de rectas, de curvas y las combinaciones entre ellos.

Red Semántica: Está constituida por el campo conceptual de la funciones reales y sus propiedades. La derivación en particular.

## REGISTRO ALGEBRÁICO

Sistema Semiótico: Está constituido por los signos que expresan las ecuaciones en IR, en particular las lineales y cuadráticas.

Red Semántica: Está constituida por el campo conceptual de las funciones reales.

## REGISTRO SIMBÓLICO

Sistema Semiótico: Está constituido por el simbolismo elemental de expresión en Matemática y en particular por las notaciones funcionales. Como por ejemplo la expresión:

$$\begin{array}{l} f \\ f: x \rightarrow 1/x \quad \text{ó} \quad x \rightarrow 1/x \quad (\text{cuando } x \text{ no es nulo}) \\ \text{ó} \quad f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad x \rightarrow 1/x \end{array}$$

Los signos  $f'$ ,  $dy/dx$  para expresar la función derivada de  $f$  cuando  $f(x) = y$ .

Claramente la organización interna de los signos está en relación estrecha con el sistema semántico asociado a ellos, en este caso el campo conceptual de las funciones reales.

## REGISTRO DE TABULACIONES

El Sistema Semiótico: Está constituido por las tablas de valores, tablas de variación, entre otras.

Por ejemplo tablas elementales del tipo:

X	f(x)

que representan relaciones de proporcionalidad, afines o cuadráticas.

También tablas de variación del tipo:

x	
f'	
f	

En esta tabla de tres líneas se lee en la:

- 1ª) los valores de  $x$  ( $x$  en el Dominio de una función  $f$ )
- 2ª) el signo de la función  $f'$  derivada de  $f$
- 3ª) el sentido de variación de la función  $f$  (monotonía)

En estas tablas de variación puede leerse además del comportamiento de una función sus máximos o mínimos eventuales, sus zonas de crecimiento, tipo de concavidad, ...

### **REGISTRO LENGUAJE (ESCRITO, VERBAL, ...)**

El sistema semiótico está compuesto por los signos con que se expresa el lenguaje materno de comunicación natural, el castellano o español en nuestro caso.

La red semántica es el campo conceptual de las Funciones Reales.

## CONTEXTOS

Los contextos tienen relación con ámbito que da contenido a la situación problemática planteada. Ellos hacen referencia al campo del conocimiento o de aplicación de la situación propuesta desde la perspectiva de la representación, está considerada en el sentido más amplio de esta palabra.

Contextualizar el conocimiento matemático no significa simplemente simularlo en el aula con cualquier actividad cotidiana, sino conocer las representaciones que de ese conocimiento se hacen los estudiantes y conocer el significado de sus concepciones, además de ver cómo las hacen funcionar en el ámbito elegido.

Los contextos que consideraremos serán el real, el realista, el matemático, el fantasista. Lo que nos permite clasificar los problemas matemáticos según el contexto en aquellos problemas relativos a un "contexto real", esto es, a problemas que se producen efectivamente en la realidad y compromete el accionar del estudiante; "contexto realista", si es susceptible de producirse realmente, es una simulación de la realidad o una parte de ella; "contexto fantasista", si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad; "contexto puramente matemático", que hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones, operaciones, figuras etc..

## EL DISEÑO

En la construcción de variedades, para presentar el concepto de derivación, elegimos por ejemplo, situaciones problemas relativas a aproximaciones, razón de cambio y a tangentes como variables distinguidas.

Los registros de expresión que acompañan a estas como variables son el algebraico o simbólico, gráfico, lenguaje natural y como contextos elegimos el real, el realista, el fantasista y el matemático. Los registros y contextos son variables dependientes de la variable distinguida. El modo de elegir las da lugar a las propuestas de distintas variedades didácticas.

Por ejemplo, si se elige como variable distinguida situaciones de aproximaciones, y se decide presentarlas privilegiando los registros algebraicos, tablas y gráfico además de los contextos matemático y realista se tiene una variedad didáctica que conduce al aprendizaje del concepto de derivada.

Modelicemos lo que acabamos de expresar. Denotemos la "Variedad Didáctica Matemática" por  $V_{Dm}$ .

Sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  las variables didácticas distinguidas, entonces para cada una de ellas se forma una sub-variedad didáctica y en que además cada variable distinguida es apoyada por otras variables didácticas.

Sea  $v_k$  una distinguida, entonces denotaremos por  $v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kj}$  las que la apoyan. Luego,

$$v_k = v_k(v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kj})$$

Formamos entonces la sub - variedad didáctica:

$$v_k dm = (v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kj}, v_k)$$

Estas sub - variedades conforman así la variedad didáctica:

$$V_n Dm = \{v_k dm\}_{k=1}^n$$

Sin duda, que para casos generales basta escribir  $VDm$ , subentendiendo que hay involucradas sub-variedades.

## CONCLUSIÓN

De lo anterior se deduce que para construir una Variedad Didáctica Matemática ( $VDm$ ) se necesita tener a la vista un saber matemático como objeto de aprendizaje, disponer de situaciones problemas que permitan a los estudiantes enfrentarlas utilizando diferentes estrategias y así favorecer la adquisición del saber focalizado simulando la dinámica de un matemático cuando trata un problema. Para ello es necesario que la situación problema elegida, les permita adquirir los conocimientos con significado y sentido desde sus experiencias para que los puedan hacer funcionar y transferir. Esto exige que las situaciones problemas, variables distinguidas en nuestra terminología, pongan en juego otras variables didácticas, ya sea, contextos diferentes para los problemas y distintos registros de expresión para el tratamiento.

Finalmente, es importante señalar que mientras más globalizado es el saber matemático a aprender, más posibilidades de situaciones problemáticas existen y por ende, más amplio será el abanico de subvariedades didácticas, esto es, de situaciones problemas particulares definidas por las variedades didácticas previamente elegidas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BROUSSEAU, G. Role de la mémoire didactique de l'enseignant. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 2, n. 3, p. 167-221, 1991.
- DIAZ, M. V. **Una evaluación de la resolución de tipos de problemas en Cálculo Diferencial**. Valparaiso: Universidad de Playa Ancha de Ciências de la Educación, 1994. (Tesis, magister).
- GOMEZ-GRANELL, C. Las matemáticas en primera persona. **Cuadernos de Pedagogía**, n. 221, p. 17-18, ene, 1994.
- PLUVINAGE, F. Didactique de la résolution des problèmes. **Petit x**, n. 32, p. 5-24, 1993.
- POBLETE, A., GUZMÁN, I., MÉNDEZ, C. Variedades Didácticas Matemáticas: su influencia en los logros de aprendizaje. Proyecto FONDECYT, n. 1940780, 1994.
- SCHOENFELD, A. Problem solving in context (s). In: SILVER, E., CHARLES, R. (Ed.). **The teaching and assesing mathematical problem solving**. 1988. p. 82-92.

