

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA. Revista da Associação de Professores de Matemática. Lisboa, Portugal.

FEY, J. T. **Tecnologia e educação matemática - uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes.** In: Cadernos de Educação Matemática. Associação de Professores de Matemática, Lisboa, Portugal, 1991.

GARNICA, V. **A interpretação e o fazer do professor: a possibilidade do trabalho hermenêutico na educação matemática.** Dissertação de Mestrado, UNESP - Rio Claro, SP, 1992.

GOLDENBERG, E. P.; HARVEY, W.; LEWIS, P.; UMIKER, R.; WEST, J.; ZODHIATES, P. **Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the graphical representation of functions.** Technical Report, Cambridge, MA, USA: Educational Technology Center, 1988.

GOLDENBERG, E. P. and KLIMAN, M. **What you see is what you see.** Unpublished Manuscript, Newton, MA, USA: Educational Technology Center, 1990.

LAKATOS, I. **Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.** Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

QUEIROGA, M. A. **Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática.** Dissertação de Mestrado, UNESP - Rio Claro, São Paulo, 1990.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação Quadrimestral da Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro.

RIZZUTI, J. **Students' conceptualizations of functions: Effects of a pedagogical approach involving multiple representations.** Unpublished dissertation, Cornell University, Ithaca, NY, USA, 1991.

COMO ADULTOS INTERPRETAM DESENHOS E CALCULAM VOLUMES DE SÓLIDOS CONSTRUÍDOS POR PEQUENOS CUBOS

Ana Maria Kaleff*
Dulce Monteiro Rei**
Simone dos Santos Garcia***

RESUMO Este relato contém a descrição de alguns resultados obtidos numa pesquisa mais abrangente realizada com estudantes do último ano do 2º grau, alunos universitários e professores de matemática, sobre a aquisição e a melhoria da habilidade da visualização geométrica. Aqui serão apresentados os dados relativos a questões que tratam da interpretação de desenhos que representam sólidos construídos por meio do empilhamento de cubos e do cálculo do volume destes sólidos a partir dos desenhos. Estas questões referem-se à possível diferença existente entre a quantidade de cubos com uma ou mais faces visíveis no desenho e o número de cubos a ser considerado na determinação do volume. Os resultados obtidos com os alunos secundários e calouros universitários são compatíveis com aqueles apresentados na literatura pesquisada. Além disso, as respostas dadas tanto pelos alunos como pelos universitários e professores de matemática indicam que eles, colocados perante situações semelhantes às apresentadas nos livros-texto das séries iniciais, provavelmente apresentarão dificuldades significativas na interpretação dos desenhos. Os resultados também levam a crer que universitários e profissionais desconheçam as convenções para determinação do volume, implícitas nos desenhos. Por outro lado, as respostas revelam que os profissionais apresentam deficiências relativas a diversos conceitos matemáticos elementares.

PALAVRAS-CHAVE: Dificuldades; Adultos; Interpretação; Desenho; Volume de sólidos

ABSTRACT This report deals with the description of some partial results drawn from a wider research work conducted with students of the last year secondary school and with pre-service and in-service teachers, regarding the improvement of the ability of geometric visualization. Information is presented based on the answers to a number of questions dealing with the interpretation of the drawings and the measure of volume of solids built with piled-up small cubes. The questions address

*Professora do Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense - Rio de Janeiro.

**Professora da Rede Municipal de Ensino de Angra dos Reis - Rio de Janeiro.

***Professora da Rede Municipal de Rio de Janeiro.

the differences that might exist between the actual amount of cubes necessary to the determination of the volume of the solid and the amount of cubes which are visible in the drawings. The performance of the students has shown to be equivalent to that presented in the literature covered. However, answers provided by students as well as by pre- and in-service teachers, point out that faced with situations similar to those found in elementary grades' textbooks, they may and probably will, present difficulties in interpreting the drawings. Further, the results point out that pre-service and in-service teachers are not aware of the conventions implicit in the drawings used to back-up the volume measure process, besides showing other kinds of deficiencies regarding several elementary mathematical concepts.

KEY-WORDS: Difficulties; Adults; Interpretation of drawings; Volume of solids.

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

Este relato contém a descrição de alguns resultados obtidos numa pesquisa mais abrangente sobre a aquisição e a melhoria da habilidade da visualização geométrica. Essa pesquisa está vinculada às atividades do Laboratório de Ensino de Geometria da UFF e do Projeto Espaço - UFF de Ciências, contando com o apoio do SPEC/PADCT/CAPES/MEC e do CNPq.

Nos últimos oito anos, objetivando prover alunos de cursos de graduação em matemática e professores de matemática de 1^o e 2^o graus com ferramentas adequadas para sua prática de ensino, futura ou presente, e promover o desenvolvimento da habilidade visual geométrica, desenvolvemos um conjunto de módulos instrucionais baseados no modelo de van Hiele (KALEFF e OUTROS, 1994), incluindo jogos, materiais manipulativos e técnicas de representação geométrica. Esses módulos instrucionais já foram aplicados em mais de trinta cursos de formação e treinamento de professores.

No decorrer dos cursos, sistematicamente observamos significativas deficiências apresentadas pelos cursistas no modo de visualizar e de interpretar informações pictóricas, principalmente quando aplicadas para se introduzir conceitos geométricos. Por exemplo, observamos que alguns professores apresentavam dificuldades em relacionar modelos concretos de sólidos geométricos com representações gráficas dos mesmos. Alguns deles chegavam a relacionar um modelo de tetraedro regular (construído com papel cartão ou outro material) ao desenho de um triângulo, quando solicitados a indicar um desenho desse modelo. Outros chamavam o tetraedro de triângulo. Dificuldades análogas foram observadas no caso do octaedro, relacionado ao losango e do cubo, relacionado ao quadrado.

Também observamos vários professores traçarem representações em perspectiva cavaleira de um tetraedro e de um cubo, quando solicitados a representarem as

planificações desses sólidos. Além disso, constatamos que muitos professores e alunos universitários não conseguiam traçar um esboço em perspectiva cavaleira de um sólido geométrico a partir das três vistas planas do mesmo.

Identificamos também que os conceitos de volume e forma de um sólido geométrico eram geralmente confundidos. Todavia, o que mais nos chamou a atenção foram as dificuldades apresentadas pelos futuros professores e pelos profissionais para desenharem uma representação em perspectiva cavaleira de um sólido geométrico construído por cubinhos de madeira, pois esses desenhos usualmente ocorrem nos livros-texto das séries iniciais.

Por outro lado, também constatamos, por parte dos cursistas, um ceticismo alarmante quanto à utilidade do uso dos materiais concretos como ferramenta no processo educacional. Pois, apesar da grande maioria desconhecer tais recursos para o ensino da geometria e apresentar dificuldades, tanto na manipulação desses materiais, quanto na elaboração dos conceitos geométricos, esses meios didáticos eram considerados como "infantis" por alguns dos participantes dos cursos.

MOTIVAÇÃO E ELABORAÇÃO DAS QUESTÕES FORMULADAS

Preocupados com os fatos acima relatados, elaboramos e aplicamos, de 1991 a 1993, um questionário relacionado a objetos tridimensionais, a fim de avaliar e quantificar algumas de nossas observações. Além disso, munimo-nos de argumentos que nos permitissem ajudar os participantes dos cursos a se tornarem mais conscientes de suas próprias deficiências, alertando-os sobre seu desempenho deficiente como professores.

As questões do teste, num total de nove, envolveram identificação, planificação, representação gráfica, seção plana e volume de sólidos. No que se segue, enfocaremos duas dessas questões relacionadas a aspectos visuais relativos ao conceito de medida de volume. Inicialmente, relataremos as observações de outros educadores as quais nos motivaram a elaborar essas questões, o questionamento que orientou essa elaboração e a análise das respostas.

Durante os últimos anos observamos que, na introdução do conceito de medida de volume, alguns livros-texto utilizam, mesmo nas séries elementares, desenhos em perspectiva de sólidos cujas faces são desenhadas representando um reticulado de linhas paralelas, sugerindo uma subdivisão do sólido em cubos unitários e uma construção do sólido por meio de empilhamento de cubos.

Alertados pelos relatos de pesquisas realizadas, entre outros, por BEN-CHAIM, LAPPAN e HOUANG (1985 e 1989) sobre as dificuldades apresentadas por adolescentes tanto na representação da construção de sólidos por meio de empilhamento de cubos como na leitura e interpretação dos desenhos representativos dessas situações

para o cálculo de volume, fomos motivados a observar o desempenho de adultos nessas situações. Esses pesquisadores chamam a atenção para os baixos índices de acerto apresentados por crianças de 12 a 17 anos de idade, nos testes aplicados no projeto NAEP (National Assessment of Educational Progress, 1977 e 1978) nos quais, mesmo aos 17 anos, somente 52,4% dos meninos e 27,0% das meninas tiveram sucesso na determinação do volume de um paralelepípedo nas condições citadas.

Ao refletirmos sobre esta situação, questionamo-nos se os alunos brasileiros, ao nível da última série do ensino do 2º grau, cuja média de idade é dezessete anos, saberiam interpretar corretamente a abordagem apresentada na introdução do cálculo de volume na qual se faz a comparação entre o desenho de um sólido tomado como unidade de volume e o desenho do sólido do qual se quer saber o volume, já que os textos e a prática da sala de aula não mencionam ou não fazem uso de materiais concretos para estabelecer a construção do sólido através do empilhamento de cubos de mesma aresta. Também nos questionamos se os professores das séries elementares e secundárias saberiam interpretar corretamente a abordagem apresentada e se conheceriam as convenções implícitas nos desenhos, necessárias para a determinação do volume, as quais não são inatas à criança (BISHOP, 1979). Essas convenções envolvem a percepção de que cada cubo presente no desenho tem que, efetivamente, pertencer a uma coluna de cubos assentada sobre um plano de referência.

A fim de responder a esse questionamento, foi inserida no teste a Questão A (ver quadro 1), relativa à interpretação visual de três figuras desenhadas em perspectiva, e posteriormente, a Questão B, relativa à avaliação do volume, semelhante às questões propostas no Projeto NAEP (segundo BEN-CHAIN, LAPPAN e HOUANG, 1985). Propositamente, perguntas do tipo: "quantos cubos unitários são necessários para se construir o sólido?", foram evitadas, por não serem comuns nos livros-texto brasileiros. Nestes, na maioria dos casos, são apresentadas somente variações da Questão B.

QUADRO 1 - Questões formuladas

AS FIGURAS DESENHADAS ABAIXO REPRESENTAM SÓLIDOS COMPOSTOS POR CUBOS EMPILHADOS DE MESMO COMPRIMENTO DE ARESTA

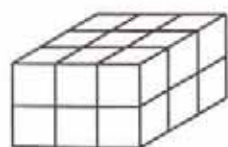


FIGURA 1

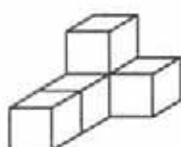


FIGURA 2

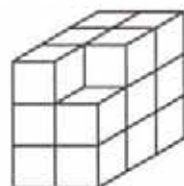



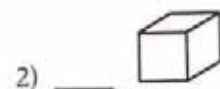
FIGURA 3

- QUESTÃO A

Quantos cubinhos você vê em cada figura?

- QUESTÃO B

Se  fosse a unidade de volume, qual seria o volume de cada um dos sólidos desenhados?



Particularmente, com a proposição da Questão A, não considerada pelo NAEP, pretendíamos levar os adultos testados a se defrontarem com o conflito decorrente do fato de que a quantidade de cubos que aparece no desenho (isto é, a quantidade que realmente se "vê", ou ainda, o número de cubos dos quais ao menos se vê uma face, ou parte de uma face) pode ser diferente da quantidade de cubos que deve ser considerada no cálculo do volume, graças a uma convenção que os adultos poderiam desconhecer. A interpretação do que seja "ver" para a criança, desprovida das convenções, e do que o professor entende por "ver", é o tema em questão. Um resultado esperado, advindo deste conflito, seria o reconhecimento, por parte dos professores e dos futuros professores testados, do fato de que seus alunos não poderiam e, provavelmente não interpretariam, os desenhos da mesma maneira que eles próprios o fariam.

População testada

O teste, em forma escrita, foi aplicado à clientela, com diferentes experiências de escolaridade, em diferentes meios sociais, sendo os resultados submetidos a uma análise em que levou-se em conta o sexo dos testados. Na Tabela 1 apresentamos a população testada, num total de 590 pessoas.

TABELA 1 - População testada

SEXO	ALUNOS DO ÚLTIMO ANO DE ESCOLA SECUNDÁRIA			ALUNOS UNIVERSITÁRIOS DE MATEMÁTICA		PROFESSORES DE MATEMÁTICA
	ESCOLA PARTICULAR	ESCOLA PÚBLICA		CALOUROS	NÃO CALOUROS	
		CIVIL	MILITAR			
HOMENS	65	35	135	31	24	19
MULHERES	83	107		29	19	43
SUB-SUBTOTAL	148	277		60	43	62
SUBTOTAL	425			103		62
TOTAL	590					

Os professores de matemática testados vivem em Niterói-RJ, Barra do Pirai-RJ e Maringá-PR. Esses professores trabalham com jovens de 10 a 18 anos de idade, em escolas de ensino elementar e secundário e todos cursaram uma universidade, conforme pode ser observado na Tabela 2.

TABELA 2 - Formação e nível escolar de atuação dos professores.

FORMAÇÃO	LOCALIDADE		
	BARRA DO PIRAI - RJ	NITERÓI - RJ	MARINGÁ - PR
LICENCIATURA PLENA - MATEMÁTICA	7	27	13
LICENCIATURA CURTA - MATEMÁTICA	0	0	3
LICENCIATURA PLENA - CIÊNCIAS	0	0	1
LICENCIATURA PLENA - CIÊNCIAS - HAB. EM MATEMÁTICA PARA 1º GRAU	0	0	2
LICENCIATURA PLENA - CIÊNCIAS - HAB. EM MATEMÁTICA PARA 1º E 2º GRAUS	0	0	4
OUTROS (EDIFICAÇÕES, QUÍMICA, ARQUITETURA)	0	2	3
NÍVEL ESCOLAR DE ATUAÇÃO COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA			
5ª E 6ª SÉRIES	0	0	2
5ª A 8ª SÉRIES	5	11	21
2º GRAU	0	13	0
5ª A 8ª SÉRIES E 2º GRAU	2	4	2
3º GRAU	0	1	1
TOTAL DE PROFESSORES	7	29	26

Os universitários testados freqüentam o curso de matemática de uma universidade pública e vivem na área do Rio de Janeiro e seus arredores.

Os alunos do último ano do 2º grau, com idade média de 17 anos, pertencem a uma escola militar das Forças Armadas brasileiras, localizada no Estado do Rio de Janeiro, a uma escola particular de formação geral e de classe média de Niterói, e a duas escolas públicas de preparação de professores para as quatro séries elementares do 1º grau, estando uma delas localizada no centro e a outra num bairro da periferia de Niterói.

Quanto à formação dos professores em geometria, constatamos que todos haviam cursado a disciplina Geometria Analítica e mais uma disciplina de matemática elementar, na qual foram tratadas noções de geometria. Com exceção dos professores com formação em química e ciências com habilitação em matemática para o 1º grau, todos os demais também haviam tido uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, os licenciados em matemática cursaram ao menos um semestre de Desenho Geométrico e Geometria Descritiva.

Quanto à formação em geometria, os alunos da escola militar tiveram um ano de geometria plana e espacial e um ano de geometria descritiva, enquanto os alunos da escola particular tiveram aulas de geometria plana, durante dois meses, e de geometria espacial por mais um mês. Por outro lado, os alunos das escolas públicas não tiveram aulas de geometria nos seus cursos. Por sua vez, os universitários não-calouros, haviam tido um ano de geometria descritiva, um ano de geometria analítica e pelo menos um semestre de geometria euclidiana. Finalmente, tanto os alunos das escolas secundárias como os universitários tiveram os conteúdos geométricos ministrados dentro da forma tradicional.

Quanto ao conhecimento de uma metodologia de ensino que envolva materiais manipulativos, foi constatado que, com exceção de alguns professores que declararam conhecer o uso didático de materiais concretos para a introdução da noção de números, somente dois dos profissionais testados haviam anteriormente vivenciado o uso de materiais manipulativos para o ensino de tópicos elementares de geometria. Por sua vez, os estudantes universitários também não haviam tido nenhuma experiência com estes aspectos metodológicos nos cursos realizados.

ANÁLISE DAS RESPOSTAS ÀS QUESTÕES FORMULADAS

Serão considerados três aspectos concernentes às respostas obtidas. O primeiro deles refere-se à avaliação da capacidade de reconhecimento visual, objeto da Questão A, e da capacidade de determinação de volumes, objeto da Questão B. O segundo trata da avaliação da proporção com que universitários e professores confundem o conceito de reconhecimento visual com o conceito da determinação do volume implícito no

desenho. O terceiro aspecto envolve a análise preliminar de particularidades das respostas dadas por universitários e professores, visando a identificação das deficiências apresentadas.

Capacidade de reconhecimento visual e determinação de volumes

A análise dos índices de acerto do reconhecimento visual do paralelepípedo representado na Figura 1 e apresentados no Gráfico 1-A indica que somente o grupo das alunas universitárias tem um resultado um pouco acima de 50%. Além disso mostra que, em geral, as mulheres com escolaridade universitária apresentam melhores resultados do que os homens. Por outro lado, observa-se que, tanto os alunos da escola particular quanto os alunos da escola das Forças Armadas têm desempenho melhor do que os professores e professoras, cujos resultados estão próximos daqueles apresentados pelos alunos das escolas públicas (os quais não tiveram geometria no seu currículo!).

A análise dos índices relativos ao volume do paralelepípedo, apresentados no Gráfico 1-B, indica que a proporção entre o índice de acerto dos homens relativamente ao das mulheres é compatível com aquele apresentado pelos jovens de 17 anos no teste do NAEP, pois é praticamente o dobro do apresentado pelas mulheres em todas as categorias, exceto na dos professores, que é de 84,5% para os homens e de 57,0% para as mulheres. Este último índice é preocupante, pois, levando-se em conta que a maior parte do professorado brasileiro é formado por mulheres, constata-se que, praticamente, a metade dessas professoras não conseguiu determinar o volume de um simples paralelepípedo. Além disto, ainda é importante se notar que os alunos da escola secundária particular apresentam 69,2% de acertos, resultado melhor do que aquele apresentado pelas suas possíveis professoras.

Por outro lado, considerando que os alunos universitários não-calouros, tiveram na sua formação Geometria Descritiva, Analítica e Euclidiana, é ainda mais preocupante se observar que menos da metade das universitárias (43,5%) acertam o volume do paralelepípedo, enquanto se observa que os alunos da escola militar, os quais praticamente tiveram o mesmo conteúdo programático que os universitários (exceção para o de geometria euclidiana plana, que é apresentada na universidade, através de uma abordagem dedutiva e mais abstrata) apresentam um resultado tão bom quanto os professores e melhor do que todas as outras categorias.

PORCENTAGEM DE ACERTOS DO RECONHECIMENTO VISUAL

GRÁFICO 1 - A - Relativo à Figura 1.

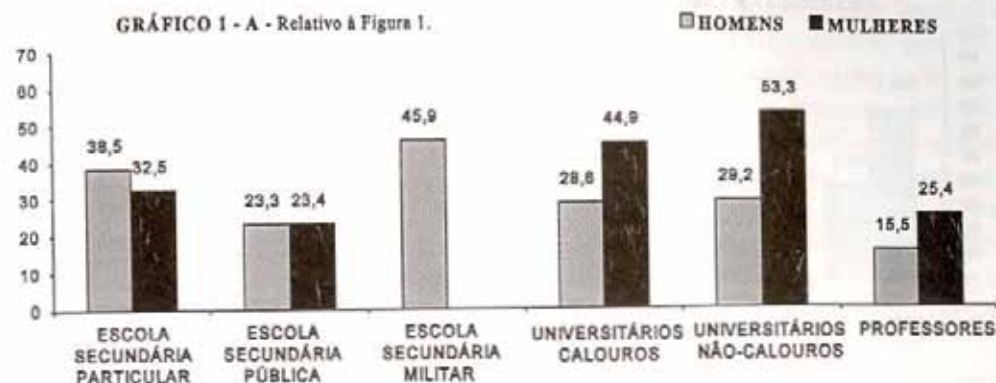
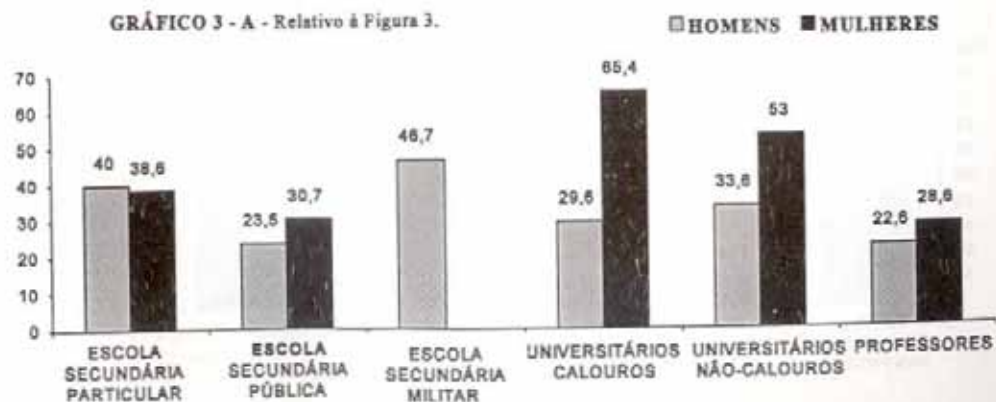


GRÁFICO 2 - A - Relativo à Figura 2.



GRÁFICO 3 - A - Relativo à Figura 3.



PORCENTAGEM DE ACERTOS NA DETERMINAÇÃO DO VOLUME

GRÁFICO 1 - B - Relativo à Figura 1.

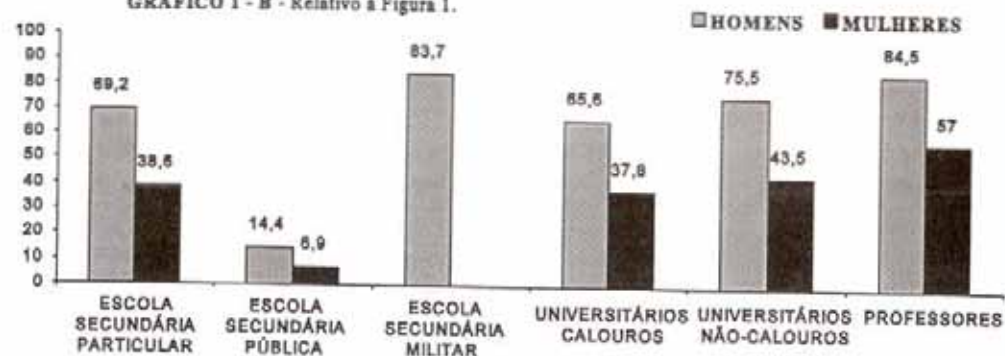


GRÁFICO 2 - B - Relativo à Figura 2.

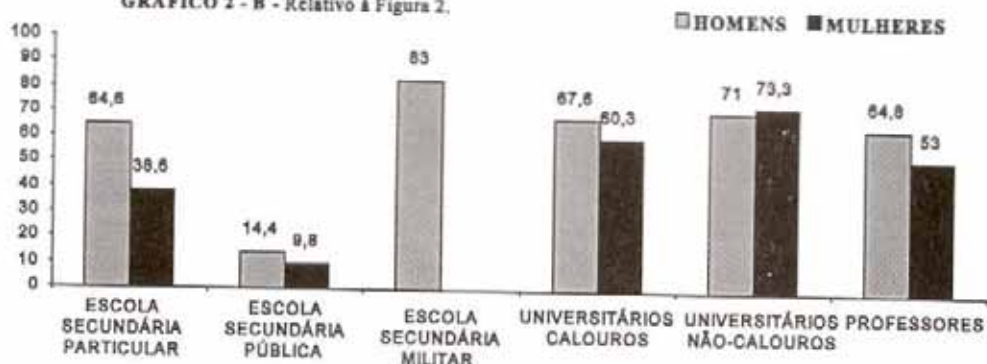
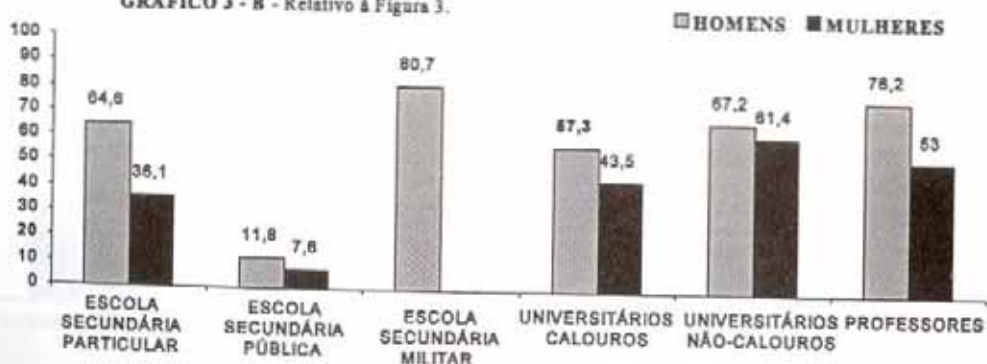


GRÁFICO 3 - B - Relativo à Figura 3.



Quanto ao sólido representado pela Figura 2, o qual freqüentemente ocorre nos textos indicados para as primeiras séries do 1º grau, é alarmante constatar-se, através dos dados apresentados no Gráfico 2-A que, praticamente, somente um terço dos professores e professoras seriam capazes de verificar que vêem efetivamente partes de quatro cubos nessa figura. Por outro lado, também não é animador observar-se que nenhuma das categorias testadas ultrapassou 60% de acerto nesta resposta. Quanto à avaliação do volume deste mesmo sólido, não é nada promissor verificar-se que os estudantes testados nas escolas secundárias públicas apresentam um resultado tão modesto nos índices de acertos, 14,4% para os homens e 9,8% para as mulheres. Como se sabe, esses estudantes cursam o último ano do curso de formação de professores destinados a trabalharem com os alunos das séries fundamentais do 1º grau, onde as crianças têm contato com as primeiras idéias para a formação do conceito de medida de volume.

Observando-se o Gráfico 3-A, a análise dos dados relativos à interpretação visual do sólido representado pela Figura 3 apresenta índices um pouco melhores dos que os obtidos para o sólido representado na Figura 1. Nota-se, porém, na determinação do volume apresentada no Gráfico 3-B, com exceção das mulheres universitárias que apresentam 43,5% para este sólido contra 61,4% para o representado pela Figura 1, todos os demais índices são inferiores aos apresentados para esta figura, o que denota que os testados não observaram que a Figura 3 poderia representar o mesmo paralelepípedo da Figura 1, do qual foi retirado um cubo que se apresenta desenhado em outra posição. Quanto à melhoria do índice apresentado pelas mulheres, cogitamos que a experiência com a determinação do volume do sólido representado pela Figura 2 tenha influenciado a resposta dada ao volume do sólido representado pela Figura 3.

Troca do reconhecimento visual com a determinação do volume

Completando os índices apresentados nos gráficos anteriores, apresentamos nos Gráficos 4 a 9, os índices correspondentes às respostas incorretas dadas às questões formuladas.

PORCENTAGENS RELATIVAS À TROCA DO RECONHECIMENTO VISUAL COM A DETERMINAÇÃO DO VOLUME

RI = RECONHECIMENTO VISUAL INCORRETO
RC = RECONHECIMENTO VISUAL CORRETO

VI = DETERMINAÇÃO INCORRETA DO VOLUME
VC = DETERMINAÇÃO CORRETA DO VOLUME

■ = ERROS DE TROCA □ = OUTROS TIPOS DE ERROS ▨ = ACERTOS

GRÁFICO 4 - RELATIVO À FIGURA 1 - PROFESSORES

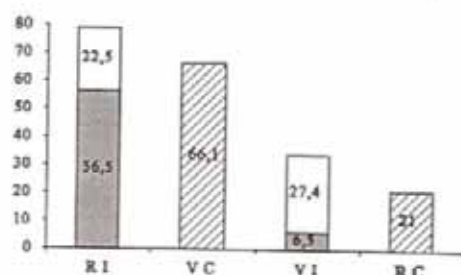


GRÁFICO 5 - RELATIVO À FIGURA 1 - UNIVERSITÁRIOS

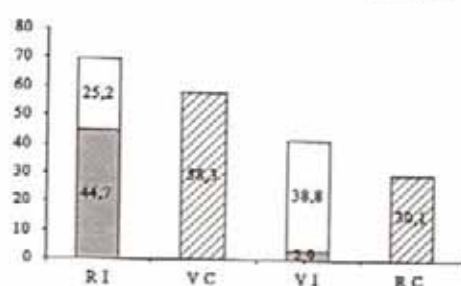


GRÁFICO 6 - RELATIVO À FIGURA 2 - PROFESSORES

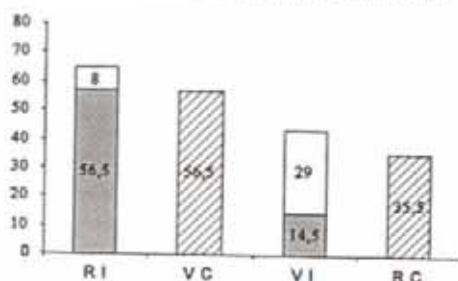


GRÁFICO 7 - RELATIVO À FIGURA 2 - UNIVERSITÁRIOS

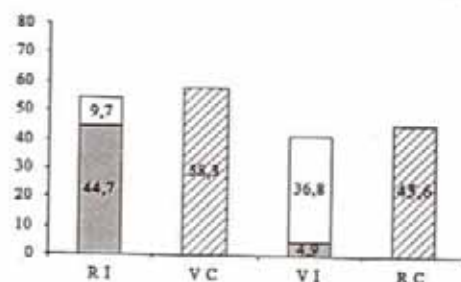


GRÁFICO 8 - RELATIVO À FIGURA 3 - PROFESSORES

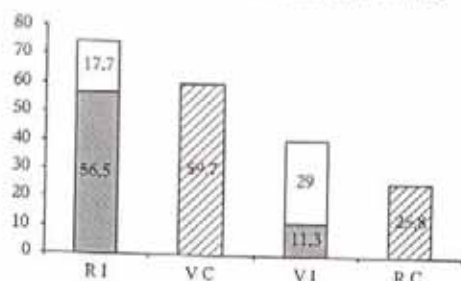
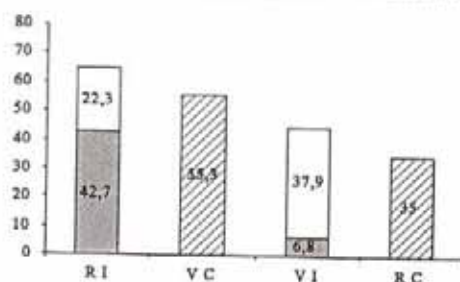


GRÁFICO 9 - RELATIVO À FIGURA 3 - UNIVERSITÁRIOS



Analisando os índices correspondentes às respostas dadas pelos professores e apresentados no Gráfico 4, nota-se, e é muito preocupante, que existe uma forte correspondência entre as respostas incorretas à Questão A e as respostas corretas à Questão B, indicando que os profissionais já formados confundem os dois conceitos, apesar de responderem corretamente à Questão B.

Menos importante, porém digno de nota, é a fraca correspondência entre as respostas incorretas à Questão B e as respostas corretas à Questão A. Isto indica que a maior parte dos indivíduos que aparentemente entenderam o significado da Questão B, só o fizeram porque tomaram a questão literalmente, não estando realmente preparados para calcular o volume solicitado, pois a porcentagem apresentada para outros tipos de erros, 27,4%, é muito alta para os profissionais. Resultados semelhantes foram obtidos para o grupo dos universitários futuros professores, como pode ser constatado no Gráfico 5, onde a porcentagem para outros tipos de erros na determinação do volume é ainda mais crítica (38,8%).

No Gráfico 6, relativo à Figura 2, fica muito evidente a relação entre a troca dos dois conceitos, pois tanto o reconhecimento visual incorreto quanto a determinação correta do volume apresentam a mesma proporção de 56,5%. Da mesma forma, no Gráfico 8, podem ser observadas relações semelhantes, relativas à Figura 3.

Por outro lado, numa análise dos índices relativos às repostas dadas pelos universitários, também foram constatadas relações semelhantes às apresentadas pelos professores. Todavia, é interessante salientar-se que, no caso do reconhecimento visual, para as três figuras, os professores apresentam mais de 12% de erros de troca do que os universitários, enquanto que para os outros tipos de erros, os índices são quase os mesmos. Por outro lado, no caso da determinação incorreta do volume, os universitários, apresentam uma incidência maior de outros tipos de erros (mais de 8%) do que os formados.

Identificação preliminar das deficiências apresentadas

A partir de algumas particularidades das respostas dadas às questões puderam ser identificadas algumas deficiências apresentadas por universitários e professores. Entre as respostas, constatou-se não ser possível determinar uma estratégia-padrão de contagem para a determinação do número de cubinhos que se vê em cada figura, pois os testados apresentaram diversas estratégias de contagem. Por exemplo: um professor respondeu que vê 84, 44 e 84 cubinhos, respectivamente em cada figura, o que indica ter multiplicado por quatro o número de faces visíveis em cada figura. Outros cinco professores responderam que viam 22, 5 e 20 cubinhos, indicando que, além de considerarem o número de cubinhos relativos ao volume, levaram em conta, na contagem, o número de cubos formados por oito cubinhos.




Além disso, foram encontradas diferentes estratégias de contagens para cada figura, indicando que o sujeito testado não apresenta um padrão constante de raciocínio para as três figuras. Por exemplo, um professor deu como resposta que via 1, 3 e 13 cubinhos, o que indica que ele contou, nas duas primeiras figuras, apenas os cubinhos dos quais se vê três faces, enquanto que para a Figura 3, contou todos os cubinhos dos quais se vê alguma face. Como outro exemplo de inconstância, podemos citar um universitário que deu com respostas 1, 4 e 3 cubinhos, indicando ter considerado na Figuras 1 e na Figura 3 o número de cubinhos que apresentam três faces visíveis; enquanto, que para a Figura 2, considerou também o cubinho do qual apenas duas faces são visíveis.




Por outro lado, entre as respostas erradas para a determinação do volume, foram encontrados alguns exemplos significativos que indicam deficiências de conhecimento de conteúdos matemáticos na formação dos sujeitos testados. Foram constatadas referências ao sistema numérico decimal, pois dois professores responderam que o volume da Figura 1 é 1000, não determinando, porém, os volumes das outras figuras. Além disso, referências ao sistema métrico decimal foram encontradas, pois um universitário respondeu como sendo cm^3 o volume de cada um dos sólidos. Referências à fórmula para o cálculo do volume do cubo também foram observadas, pois três professores indicaram a^3 , b^3 e c^3 , respectivamente, como volume de cada um dos sólidos; constataram-se ainda citações relativas a uma unidade de volume genérica, pois

"1 u.v."; "cubo", "1 cubo" e "1 ", foram respostas dadas para o volume dos sólidos.

Além desses exemplos de respostas, muitos outros também são interessantes e significativos para a nossa análise. Todavia, considerando-se que uma análise mais detalhada, incluindo comparações com resultados obtidos por outros pesquisadores, está em processo de elaboração, serão acrescentados a seguir somente mais dois casos de respostas que, particularmente, chamaram a nossa atenção.

Primeiramente, o caso de um universitário que respondeu que via 18, 5 e 17 cubinhos, respectivamente em cada figura, o que indica troca dos conceitos; no entanto,

ao determinar o volume, respondeu 9  , 2,5  e 8,5  ; isto é, dividiu por dois o número dos cubinhos que afirmava que via. Como segundo caso, um universitário respondeu que via um cubo formado por oito cubinhos na Figura 1, três cubinhos na Figura 2 e nenhum na Figura 3. Isto indica que ele buscou visualizar formas cúbicas de tamanhos variados nas figuras. Por outro lado, o mesmo universitário

respondeu que os sólidos tinham 36  , 5  e 35  como volume. Estas afirmações indicam que no cálculo do volume da Figura 1, considerou o número de faces visíveis dos cubinhos da vista frontal do sólido, multiplicando-o pelo número de fileiras horizontais da figura, o qual, por sua vez, foi multiplicado pelo número de fileiras verticais ($6 \times 2 \times 3$). No entanto, no caso da Figura 2, não recorreu a nenhum processo especial de cálculo, apesar de ter usado a mesma estratégia para o caso da Figura 3.

CONCLUSÃO DA ANÁLISE DAS RESPOSTAS

De uma maneira geral, analisando o resultados das duas questões relativamente às três figuras, observa-se que as mulheres têm um desempenho igual ou melhor que os homens na maior parte dos índices relativos ao reconhecimento visual, enquanto que, na determinação do volume, somente um dos índices favorece as mulheres. Esta discrepância sugere a necessidade de uma pesquisa ampla e detalhada sobre as possíveis diferenças entre ambos o sexos na aquisição e desenvolvimento da habilidade da visualização dos sólidos e a influência dos métodos de ensino sobre as mulheres, relativamente a essa habilidade.

Por outro lado, as respostas dadas pelos alunos da última série do ensino do 2º grau e pelos alunos calouros levam a suspeitar que estes não saberão interpretar corretamente a abordagem considerada na introdução de medida de volume, como apresentada nos livros-texto destinados às séries elementares. Além disso, os resultados obtidos com essa clientela, cuja faixa etária é de 17 a 19 anos, são compatíveis com os apresentados na literatura pesquisada.

Da mesma forma, a análise das respostas dadas por universitários e professores de matemática, apontam a possibilidade dos profissionais também não estarem aptos a interpretar corretamente os desenhos apresentados pelos livros-texto e de não conhecerem as convenções implícitas nos desenhos, necessárias para a determinação do volume.

Podemos afirmar, porém, que os adultos perante situações pictóricas semelhantes às apresentadas nos livros-texto das séries iniciais apresentam dificuldades significativas na interpretação dos desenhos para o cálculo do volume.

Por outro lado, as respostas revelam que os profissionais apresentam deficiências relativas a diversos conceitos matemáticos elementares relacionados à determinação do volume de sólidos.

PRINCIPAIS IMPLICAÇÕES DA APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO PARA A PESQUISA DESENVOLVIDA

Uma das principais conseqüências da aplicação deste questionário, considerando que aqui foram relatados somente os dados relativos a duas das questões de um questionário mais amplo, foi a reação positiva ao mesmo apresentada tanto pelos alunos como pelos professores participantes dos cursos nos quais aplicamos os módulos instrucionais desenvolvidos na pesquisa. De fato, muitos cursistas declararam-se mais motivados a participarem das atividades pedagógicas propostas, após terem respondido o teste e terem se defrontado com as suas próprias dificuldades. Assim sendo, a partir de 1993, passamos a aplicar este questionário como atividade introdutória dos cursos ministrados.

Por outro lado, através das respostas ao questionário, obtivemos informações que nos levaram, numa primeira etapa, à confirmação de algumas das dificuldades observadas no desempenho dos cursistas e, numa segunda etapa, à melhoria e à ampliação dos módulos instrucionais aplicados nos cursos. Estas informações têm fornecido subsídios para o desenvolvimento de um conjunto mais amplo de materiais manipulativos do que o originalmente planejado, os quais visam a não somente prover o professor com ferramentas mais adequadas à sua prática de ensino, mas também a fornecer-lhe material que o auxilie no desenvolvimento da própria habilidade visual geométrica e na formação dos conceitos matemáticos elementares em relação aos quais apresenta deficiências.

Desta forma, os módulos instrucionais passaram a incluir, entre outros, os seguintes:

- construção de sólidos de faces retangulares por meio de cubos unitários e quebra-cabeças; através da observação de modelos dos sólidos, de desenhos em perspectiva e de suas vistas planas;
- estudo das formas e do cálculo de volumes de sólidos, por meio da construção de suas arestas (como relatado por KALEFF e REI, 1996a);
- reconhecimento dos sólidos de Platão e de sólidos contidos em cubos, tetraedros e octaedros, por meio da construção de suas arestas (como relatado por KALEFF, 1994 e KALEFF e REI, 1995);
- reconhecimento de seções planas e o cálculo do volume de sólidos determinados por cortes planos realizados no cubo, tetraedro e octaedro, através de quebra-cabeças (como relatado por KALEFF e REI, 1996b).

OBSERVAÇÕES DE CARÁTER GERAL

De uma maneira geral, tem sido observado que, após a aplicação dos módulos instrucionais, os universitários e professores apresentam melhoria nas tarefas que envolvem a visualização e a representação de situações geométricas. Além disso, tornam-se mais confiantes em seu próprio desempenho, apresentam-se mais receptivos para analisarem as dificuldades apresentadas pelos alunos e mais motivados a recorrerem a atividades de construção por meio de materiais concretos, antes de iniciarem as atividades que envolvem representações gráficas propostas pelos livros-texto.

Por outro lado, os dados parciais decorrentes dessa pesquisa apontam a necessidade de que tópicos elementares de geometria sejam acrescentados aos programas dos cursos de formação de professores para as séries iniciais. Indicam ainda a necessidade de um questionamento mais abrangente sobre o ensino das disciplinas constantes dos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, não somente quanto aos conteúdos geométricos ministrados, como também quanto à metodologia de ensino empregada e à sua implicação para o desenvolvimento da habilidade da visualização geométrica do educando.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEN-CHAIM, D., LAPPAN, G., HOUANG, R. T. Visualizing rectangular solids made of small cubes: analyzing and effecting students' performance, *Educational Studies in Mathematics*, n. 16, p. 389-409, 1985.
- _____. Communication of spacial informations. *Educational Studies in Mathematics*, n. 20, p. 130-146, 1989.
- BISHOP, A. J. Visualizing and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics*, n. 10, p. 135-146, 1979.
- KALEFF, A. M. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos..., *Educação Matemática em Revista*, Blumenau, v. 2, p. 19-25, 1994.
- KALEFF, A. M., HENRIQUES, A., REI, D. M., FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do pensamento geométrico : modelo de van Hiele. *Bolema*, Rio Claro, SP, n. 10, p. 21-30, 1994.

KALEFF, A. M., REI, D. M. Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais. *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 38, p. 6-11, 1996a.

_____. Varetas, canudos, arestas e...sólidos geométricos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 28, p. 29-36, 1995.

_____. (1996b) - Jogos geométricos e formas espaciais, *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 31, p. 25-31, 1996b.

PERSPECTIVAS EXPERIMENTAL, COGNITIVISTA E ANTROPOLÓGICA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Paul Cobb*

Tradução: Antonio Miguel**

Revisão: Maria do Carmo Domite Mendonça e James Patrick Maher**

"Há somente um mundo mas isto se aplica a cada um dos muitos mundos"
(GOODMAN, 1984, p. 278).

Na primeira parte deste artigo, faço uma síntese com base no ponto de vista de que a aprendizagem e o ensino da matemática envolvem a coordenação de análises empreendidas em três domínios de interpretação que não se interseccionam — os contextos experimental, cognitivo e antropológico. Para os objetivos que se têm em vista nesta discussão, o foco, em cada contexto, restringe-se à educação matemática. Os leitores que se interessam pelas relações entre a atividade matemática e os aspectos mais amplos da vida comunitária e social poderão consultar COBB (no prelo). A discussão desses três contextos serve, então, como base para a segunda parte do artigo na qual a nossa atenção estará voltada para a noção de verdade matemática. Esta noção é considerada como sendo pré-existente. Geralmente, aceitamos, sem questionar, as verdades matemáticas e acreditamos estar fazendo descobertas quando nos engajamos na atividade matemática. Embora possamos distanciar-nos de nossa atividade matemática e especular que a matemática é uma construção da mente humana, permanece o fato de que a verdade matemática e a realidade matemática independente da mente humana pré-existem quando fazemos e falamos sobre matemática. A esse respeito, a experiência matemática é distinta da reflexão filosófica sobre essa experiência. No primeiro caso, a matemática é descoberta e no segundo, inventada. A questão não é obrigar a escolher entre descoberta e invenção ou argumentar que estamos enganados quando assumimos que a matemática é verdadeira. Mais propriamente, trata-se de levar a sério a experiência matemática e explorar a atividade construtiva que acompanha nossa experiência de verdade e certeza matemática. Em resumo, a verdade matemática é um fenômeno a ser explicado mais do que a ser

*Docente da Vanderbilt University - Nashville (USA).

**Docentes da Faculdade de Educação da UNICAMP.