as antigas investigações matemáticas da luz, som e espaço são divididas em explorações das <u>*possibilidades*</u> *de construção de teoria (campo do matemático) e em determinações da teoria correta (campo dos cientistas naturais). Esta divisão de trabalho leva em consideração o fato de que a matemática freqüentemente soluciona as ameaças de competição através da reinterpretação, dando, assim, uma maior impressão de desenvolvimento cumulativo do que as ciências naturais* (KITCHER, 1986, p. 225).

O ponto de vista de Kitcher de que a matemática se preocupa com as possibilidades de construção da teoria lembra-nos a premissa básica de PIAGET (1971, 1980) de que a matemática é uma criação conceptual construída por abstração reflexiva da atividade sensório-motora e da atividade conceptual. Em termos experimentais, os objetos matemáticos são experienciados como pré-existindo nos objetos reais.

A distinção antropológica entre modos matemáticos de construção do mundo e modos científicos de construção do mundo não implica que a matemática enquanto atividade esteja divorciada do mundo da atividade prática. Nas salas de aula de 2ª série do 1º grau, observamos, por exemplo, que a criança freqüentemente resolvia problemas aritméticos através da contagem de materiais manipulativos disponíveis em grupos de 10 ou de 1. O ponto crucial é que quando as crianças explicavam e justificavam suas soluções, elas descreviam ou mostravam como haviam contado os objetos. Elas não falavam a respeito das propriedades físicas dos objetos tais como a sua cor. Este era um contexto matemático para as crianças enquanto membros da comunidade da sala de aula e elas focalizaram a sua atenção para as suas ações sensório-motoras sobre os objetos. Como parte da base tida como óbvia deste contexto mutuamente construído, as crianças viam os objetos como coisas a serem contadas. O significado dos objetos como unidades aritméticas havia emergido no curso das interações em sala de aula. Além disso, numa perspectiva cognitivista, a distinção entre modos matemáticos e científicos de construção do mundo não implica que a atividade matemática esteja separada da atividade sensório-motora. Na realidade, a relação entre ambas é continuamente enfatizada pelas teorias construtivistas da cognição. Finalmente, a reivindicação de que os modos matemáticos de construção do mundo são caracterizados pela abstração reflexiva não implica que a atividade matemática consista em um conjunto distinto de procedimentos ou técnicas divorciados das demais atividades de uma pessoa. Como ilustra o exemplo acima dos alunos da 2ª série, é o modo como são interpretadas as interações com os outros e com o mundo físico que tornam matemáticos esses procedimentos e técnicas. Assim, por um lado, a matemática está aberta para que as anomalias se tornem aparentes quando refletimos sobre as representações de conteúdo sensório-motor e quando discutimos idéias matemáticas com outros. Por outro lado, a matemática é auto-referencial, posto que suas anomalias, freqüentemente de origem

social e quase-empírica, são conceptuais por natureza. Este aspecto auto-referencial da matemática contribui para a sua aparente certeza absoluta quando comparada com o conhecimento científico.

Os argumentos acima, referentes à natureza da verdade e da certeza matemáticas, podem ser resumidos com base na consideração de que é como se o esforço que uma comunidade fizesse para manter certas práticas matemáticas retornasse aos membros da comunidade sob a forma experiencial de estruturas matemáticas objetivas e independentes do sujeito. Este modo de ver é compatível com o ponto de vista de PEIRCE (1935, p. 186) de que *"a verdadeira origem da concepção de realidade (incluindo a realidade matemática) mostra que esta concepção envolve a noção de comunidade"*, e com a sugestão da comediante Lily Tomlin de que *"a realidade é um pressentimento coletivo"*. É esta noção de comunidade que está ausente tanto no platonismo quanto no empirismo. Seguem-se duas implicações para a educação matemática. A primeira é que, se encaramos o platonismo e a verdade matemática como aspectos experienciais da atividade matemática consensualmente controlada, então, a minha intenção enquanto educador matemático construtivista, é que os estudantes experienciem intuições de uma realidade matemática independente do sujeito e experienciem também a descoberta de relações que eles acreditam estarem nessa realidade. Este é um aspecto crucial da experiência matemática (DAVIS e HERSH, 1981). Se os estudantes não agem como platônicos quando fazem matemática, nada resta a eles a não ser formalismos vazios. Não é a experiência platônica dos objetos matemáticos mas o formalismo que é o inimigo de todos os que valorizam o significado em detrimento do rigor.

A segunda implicação é que, se realmente levarmos a sério o fato de encorajarmos os estudantes a serem construtores de significados matemáticos, devemos encarar o professor e os estudantes como membros constitutivos de uma comunidade intelectual. O ambiente da sala de aula deveria ser apropriado, tanto quanto possível, de modo a permitir que os estudantes fizessem suas próprias negociações e institucionalizações — em resumo, que fizessem suas próprias construções das verdades. Esse modo de agir contrasta fortemente com a instrução tradicional na qual os estudantes são expostos a formalismos acadêmicos e codificados que, para o iniciado, significam verdades comunalmente sancionadas que foram institucionalizadas por outros.

INTERNALIZAÇÃO E CONHECIMENTO INSTITUCIONALIZADO

Procurei mostrar neste artigo que as tentativas de atribuir sentido ao complexo de processos que constitui a aprendizagem e o ensino da matemática envolvem a coordenação e análise desenvolvida em uma variedade de diferentes contextos. Esta idéia e a discussão a respeito da verdade e da certeza matemáticas permitem-nos considerar em maior detalhe dois estilos de explicações da aprendizagem matemática que estão em moda no cenário instrucional. Ambos os estilos propõem um processo de internalização como mecanismo fundamental de aprendizagem. O primeiro estilo preocupa-se com o uso de representações instrucionais ao passo que o segundo se centra sobre a relação entre os processos cognitivo e social.

REPRESENTAÇÕES INSTRUCIONAIS

Certas variantes empiristas da psicologia do processamento de informação, que realizaram análise dos processos cognitivos e das estruturas de informação, se viram envolvidas com o problema da compreensão matemática. Seus proponentes argumentam que, em contraste com outras abordagens da análise cognitiva, a abordagem da simulação via computador fornece "hipóteses muito mais precisas e específicas sobre os modelos de informação que os estudantes necessitam reconhecer nos textos e sobre os processos cognitivos que estão envolvidos nesse reconhecimento" (GREENO, 1987, p. 69). Acredita-se ser este trabalho relevante para provocar o desenvolvimento da instrução que visa a *"colocar os aprendizes em situações em que as construções que eles naturalmente e inevitavelmente fazem ao tentarem atribuir sentido aos seus mundos sejam corretas, bem como compreensíveis"* (RESNICK, 1983, p. 30-31). Particularmente, as análises cognitivas podem ser usadas para orientar o desenvolvimento de materiais instrucionais que *"apresentam representações explícitas dos modelos de informação que os estudantes necessitam reconhecer em, digamos, problemas verbais* (GREENO, 1987, p. 69). Como notou RESNICK (1983, p. 32), supõe-se que essas representações instrucionais sejam "transparentes" para o aprendiz (isto é, que representem relações em uma forma facilmente apreensível ou procedimentos decompostos em unidades manejáveis)".

O mecanismo básico de aprendizagem que torna razoável esta abordagem instrucional é a internalização. Acredita-se que as relações matemáticas, ou em terminologia específica, que os modelos de informação sejam internalizados através de materiais concretos tais como os blocos de base 10 (RESNICK e OMANSON, 1987), através de figuras e diagramas (TAMBURINO, 1982) e através de gráficos de computador (SHALLIN e BEE, 1985). À primeira vista, esta abordagem parece ser intuitivamente razoável. Isso porque podemos ver a numeração posicional incorporada num conjunto de blocos de base 10 e as relações entre as quantidades numéricas incorporadas nos diagramas de TAMBURINO (1982). Assim sendo, olhamos para os blocos e diagramas como membros aculturados de uma comunidade particular. E uma vez que consideramos indubitáveis nossos modos aculturados de interpretar, é difícil imaginar como alguém poderia ver nesses materiais algo que não os objetos matemáticos verdadeiros e corretos e as relações que nós vemos. Nesse sentido, esses

blocos e diagramas estariam presentes nas representações instrucionais de forma clara e facilmente apreensível.

Essa posição tem sido criticada pela perspectiva cognitivista (COOB, 1987). Para a perspectiva antropológica, a natureza auto-evidente da hipótese de internalização torna-se problemática a partir do momento em que nós nos conscientizamos de que nossos modos de interpretação são produto de nossa própria aculturação. Como observamos, tanto WITTGENSTEIN (1976) quanto BLOOR (1976) argumentam que vemos nos objetos certas coisas e não outras, porque crescemos em uma cultura que institucionalizou essas formas de ver e não outras. FISCHBEIN (1987) fez essencialmente a mesma crítica quando observou que o uso produtivo de diagramas em matemática envolve o estabelecimento de um certo número de convenções que estão implícitas nos significados das figuras usadas. *"Diagramas pertencem ao "modo simbólico" (na terminologia de Bruner)"* (p. 158). Comumente, não nos atentamos para essas suposições convencionais implícitas em nossas interpretações e assumimos que nosso modo convencional de ver as representações instrucionais é o único modo possível, precisamente porque crescemos em uma cultura matemática. A crença de que a matemática que nós percebemos no mundo existe independentemente tanto de nossa própria atividade cognitiva como dos modos institucionalizados de conhecimento parece, então, auto-evidente. E se esta crença é compatível com a forma como o mundo se apresenta, como podemos nós vir a conhecer as verdades e certezas da matemática senão através de um processo de internalização? Rompemos com uma visão de nós mesmos e dos estudantes de matemática como sistemas ambientalmente dirigidos e rompemos com as teorias de educação de contingência ambiental (KOHLBERG e MAYER, 1972).

O ponto de vista alternativo a respeito da verdade e da certeza matemáticas discutido neste artigo coloca em questão a subordinação do indivíduo ao conhecimento matemático institucionalizado. A relação entre as cognições matemáticas do indivíduo e os modos institucionalizados de conhecimento é vista como dialética. As advertências para se desenvolver as representações instrucionais que fazem com que os estudantes realizem as construções corretas são, então, rejeitadas em favor de uma ênfase sobre processos tais como a negociação e a institucionalização de significados. Isto não exclui o uso de materiais manipulativos, diagramas e gráficos na instrução matemática. Na verdade, eles parecem desempenhar um papel essencial no sentido de auxiliar os estudantes a construírem representações intuitivas que tornam compreensível aquilo que é abstrato. O ponto crucial é que o significado desses materiais instrucionais tem de ser negociado entre professores e estudantes. De fato, o professor deve levar ao conhecimento dos estudantes a forma como ele interpreta os materiais. Isto, é claro, é o que fazem os bons professores ainda que não pensem sobre isso — eles simplesmente levam em consideração a necessidade de negociar interpretações com seus estudantes para que haja concordância. As assim chamadas representações instrucionais podem, então, ser vistas como aspectos essenciais de ambientes em que se negociam significados matemáticos. Os estudantes adquirem conhecimento matemático não o internalizando a partir de representações, mas reorganizando e elaborando suas interpretações no curso do processo de negociação. Os materiais tipicamente caracterizados como representações instrucionais são valiosos no sentido de facilitarem a negociação de significados matemáticos e, conseqüentemente, no sentido de facilitarem a construção individual do conhecimento matemático. Nesse sentido, o ponto de vista a respeito da instrução matemática como um sistema baseado na transmissão é substituído por uma preocupação com a emergência de sistemas de significados.

PROCESSOS INTERPSICOLÓGICOS E INTRAPSICOLÓGICOS

A abordagem da representação instrucional, entretanto, deixa de considerar a perspectiva antropológica e ignora o meio social no qual os estudantes de fato aprendem matemática. É uma abordagem que procura conciliar a crença em verdades e certezas matemáticas pré-existentes com a crença na existência de aprendizes isolados e solitários. Em contraste com isso, o segundo estilo de explicação enfatiza o importante papel que a interação social desempenha na aprendizagem. Contudo, há interessantes paralelos entre as duas abordagens.

Uma das passagens mais freqüentemente citadas dos escritos de Vygotsky é a que expõe aquilo que WERTSH (1985, p. 60) chamou de "lei genética geral do desenvolvimento cultural":

> *Toda função aparece duas vezes e em dois planos no desenvolvimento cultural da criança. Primeiro ela aparece no plano social e depois no plano psicológico. Primeiro ela aparece entre as pessoas como uma categoria interpsicológica e depois na criança como uma categoria intrapsicológica... As relações sociais ou as relações entre as pessoas são, geneticamente, a base de todas as funções (mentais) superiores e de suas relações* (VYGOTSKY, 1978, p. 57).

Nesta caracterização geral do desenvolvimento,

> *a internalização é um processo que envolve a transformação do fenômeno social em fenômeno psicológico. Conseqüentemente, Vygotsky via a realidade social desempenhando um papel primário (fundamental) na determinação da natureza do funcionamento intra-psicológico interno* (WERTSCH, 1985, p. 63).

O trabalho de NEWMAN, GRIFFIN e COLE (1984) fornece um claro exemplo dessas hipotéticas relações entre os processos interpsicológico e intrapsicológico. Os pesquisadores forneceram a grupos de dois e três alunos da 4ª série do 1º grau quatro "bekers" contendo soluções incolores e mostraram aos mesmos que cada par de soluções reagia de forma diferente. Pedia-se aos alunos para *"encontrarem o maior número possível de resultados, efetuando todas as combinações de dois e registrando os resultados"* (p. 179-180). Uma forma de realizar a tarefa é usar um procedimento que é chamado 'interseção' na literatura piagetiana:

> *Este pode ser entendido considerando o único arranjo (por exemplo, 4 soluções químicas) como tendo duas dimensões que se interceptam. Cada item de uma dimensão é emparelhado com os itens da outra dimensão como se fosse uma matriz... Com esta concepção de matriz, escolhe-se os pares seguintes engenhosamente do começo para o fim. Tudo o que as crianças tinham que fazer era trabalhar por meio da matriz* (NEWMAN, et. al., 1984, p. 178).

Esta é uma descrição de um processo intrapsicológico que está formulado dentro do contexto cognitivo. Somente 4 das 27 crianças foram identificadas como sendo capazes de realizar uma completa 'varredura' presente no procedimento de interseção. Porém, *"quando o procedimento de interseção apareceu, ele surgiu na conversa entre as crianças"* (p. 183). *"Portanto, o esquema de interseção regulava a interação entre as crianças mais do que o das ações dos indivíduos"* (p. 184). Esta observação levou Newman et. al. a concluir que *"o esquema de interseção não é nem mesmo fundamentalmente uma estrutura de conhecimento interna. Ele localiza-se essencialmente na interação entre as crianças.* Ele é, na terminologia de Vygotsky, *"um processo cognitivo interpsicológico"* (p. 185). Conseqüentemente, *"uma estrutura que tem um esquema que se move da interação para o indivíduo constrói a interação, e a maneira como ela muda ao longo do tempo é o tópico central da análise"* (p. 193). É essa transição do funcionamento interpsicológico para o funcionamento intrapsicológico que estava no centro do programa de pesquisa de Vygotsky (WERTSCH, 1985).

Nesta abordagem, a internalização do mundo social mais do que a de objetos concretos, diagramas e gráficos é considerada como o mecanismo fundamental do desenvolvimento intelectual. Essa abordagem parece ser muito plausível. Podemos ver um processo particular nas interações sociais entre os membros de um grupo. Além disso, esse processo é freqüentemente construído pelas crianças individualmente. Parece óbvio que as crianças internalizem o processo a partir de suas interações sociais.

As dificuldades surgem tão logo se observe que os esquemas interpsicológicos e intrapsicológicos são construtos teóricos desenvolvidos pelo pesquisador em dois contextos diferentes. O esquema interpsicológico é um modelo de interação construído pelo observador no contexto antropológico. Neste contexto, o grupo de crianças que interagem entre si constitui uma comunidade em relação à análise. Em contraste com isso, o esquema intrapsicológico é um construto teórico desenvolvido no interior do contexto cognitivo. O movimento, de que falam Newman et. al., que se processa da interação social para a cognição individual combina os contextos antropológico e cognitivo. O interacionismo simbólico (BLUMER, 1969; MEADE, 1934) constitui uma tradição alternativa de análise da relação entre o processo psicológico e o social. Segundo esta tradição, as pessoas aprendem em ambientes interativos ao resolver os desafios semióticos que ocorrem na tentativa de ajustar sua atividade com as atividades dos outros e daí, constróem mutuamente um domínio consensual de atividade comum. Este ponto de vista contrasta com aquele que defende que as pessoas aprendem através da internalização de construtos que os pesquisadores projetam em seu meio social. *"Posto de maneira simples, as pessoas agem em direção às coisas (incluindo as ações dos outros) com base nos significados que essas coisas têm para elas, não com base nos significados que essas coisas têm para os especialistas"* (BLUMER, 1969, p. 51).

PARALELOS ENTRE OS DOIS TIPOS DE EXPLICAÇÃO

Ambos os tipos de explicação vêem a aprendizagem da matemática como um processo de internalização. Para um deles, trata-se da internalização do material ou entidades figurativas que têm significado matemático para membros aculturados de uma comunidade. Para o outro, é a internalização de modelos de interação que são construídos e que têm significado para membros aculturados de comunidades de pesquisadores. No caso da abordagem da representação instrucional, o processo de internalização resulta numa cópia na mente da criança daquilo que é externo a ela. Como observaram BIDELL, WAMSART e DE RUITER (1986), esse ponto de vista parece confiar incorretamente na doutrina da percepção absoluta. Para Vygotsky, o contrário é o que acontece, *"sem dizer que a internalização transforma o próprio processo (interpsicológico ou social) e muda a sua estrutura e funções"* (1978, p. 57). Portanto, embora as estruturas dos processos interpsicológicos e intrapsicológicos não sejam necessariamente isomórficas, existe, contudo, um processo de internalização que precisa, ele próprio, ser explicado. E, como seria de se esperar, este ponto é precisamente aquele em que o trabalho na tradição vigotskiana encontra dificuldades.

Ambos os tipos de explicação caracterizam os estudantes de matemática como sistemas ambientalmente dirigidos. Para um, o meio (ambiente) é composto de representações instrucionais. Para o outro, é um meio social composto de entidades teóricas construídas pelo pesquisador. Para ambos os tipos de explicação, o indivíduo está subordinado ao conhecimento matemático institucionalizado — isto é, à

matemática como conhecimento cultural. Para um deles, a subordinação é mediada pelas interações com as representações instrucionais. Para o outro, a subordinação é mediada pelas interações com os outros membros da comunidade. No primeiro caso, esta subordinação do indivíduo reflete uma posição empirista. No segundo caso, ela reflete a doutrina do materialismo dialético. Devemos lembrar que Vygotsky contribuiu para a institucionalização de maneiras sócio-historicamente específicas de conhecimento que condicionavam sua própria atividade intelectual. Nesse sentido, ele dizia:

> *Parafraseando a bem conhecida opinião de Marx, podemos dizer que a natureza psicológica humana representa o conjunto de relações sociais internalizadas que se tornam funções para o indivíduo e formam a estrutura individual. Não queremos dizer que este é o significado do ponto de vista de Marx, mas vemos neste ponto de vista a expressão mais completa em direção à qual a história do desenvolvimento cultural nos conduz* (1981, p. 164).

Vygotsky prestou claramente uma profunda contribuição à compreensão que temos do desenvolvimento intelectual, não apenas por alertar-nos sobre o papel crucial da interação social. Porém, seria ingênuo divorciar seu trabalho do seu meio sócio-histórico e assumir que esse trabalho fornece respostas prontas para nossos problemas sócio-históricos específicos.

COMPLEMENTOS

Tenho dito que a aprendizagem e o ensino da matemática podem ser analisados em três diferentes contextos — o experimental, o psicológico e o antropológico. Esta estrutura de complementariedade, ainda que esses contextos sejam irredutíveis, foi aplicada ao problema da verdade e da certeza em matemática. A análise envolveu uma coordenação de todos os três contextos matemáticos. Para a perspectiva antropológica, os teoremas matemáticos são verdades emergentes institucionalizadas pela atividade coordenada de membros de comunidades matemáticas. Para a perspectiva experimental, a objetividade, a verdade e a certeza surgem da crença inquestionável em uma realidade externa compartilhada que é necessária para e tornada possível pela comunicação interpessoal. Para a perspectiva cognitivista, a matemática enquanto modelo de certeza está relacionada com a abstração reflexiva da atividade, que é o processo fundamental através do qual o conhecimento matemático é construído.

Neste artigo enfatizou-se o contexto antropológico porque (em linguagem intencionalmente realista) é ele a perspectiva mais negligenciada pelos educadores matemáticos, particularmente nos Estados Unidos. Teremos sérias dificuldades se nos restringirmos aos contextos cognitivo e experimental, mesmo se nossa preocupação principal for a aprendizagem matemática. Parece existir pelo menos quatro opções desagradáveis. A primeira consiste em deixarmo-nos levar por nossas intuições subjetivas e aceitar o platonismo como teoria explicativa, a despeito do fato de que ele tem sido demolido pelas críticas filosóficas. A segunda consiste em tentarmos desenvolver o empirismo de Mill a despeito dos golpes dados por FREGE (1960) e outros. Esta é a abordagem adotada pelos psicólogos da linha contemporânea do processamento de informação que buscam desenvolver as representações instrucionais. A terceira opção consiste em filiar-se à posição neovigotskiana baseada no materialismo dialético. Como vimos, esta posição supõe um inexplicável processo de internalização como mecanismo fundamental da aprendizagem. A quarta opção é o construtivismo. Este é um ponto de vista solipsístico uma vez que nos induz a restringirmo-nos somente ao contexto cognitivo. A saída mais convidativa que vejo é complementar o construtivismo cognitivo com uma perspectiva antropológica que considere que o conhecimento cultural (incluindo a linguagem e a matemática) é continuamente reconstruído e modificado pelas ações coordenadas dos membros de comunidades. Esta caracterização do conhecimento matemático, está claro, é compatível com as descobertas que indicam que as práticas matemáticas auto-evidentes diferem de uma comunidade para outra (CARRAHER e CARRAHER, 1987; D'AMBROSIO, 1985; SAXE, 1988). Além do mais, ela recupera a natureza evolutiva do conhecimento matemático revelada pelas análises históricas (BLOOR, 1976; GRABINER, 1986; LAKATOS, 1976).

Esta posição pode, à primeira vista, parecer paradoxal; o significado matemático pode estar no mundo (perspectiva experimental), na mente do indivíduo (perspectiva cognitiva) e na interação social (perspectiva antropológica). Esse aparente paradoxo é o resultado de se tentar lidar, ao se teorizar em educação matemática, com uma complementariedade nela onipresente, embora implícita. Como observou STEINER (1987, p. 48), a idéia de

> *complementaridade é bem conhecida (...) em educação matemática, isso se deve a muitos movimentos de reforma de curta duração e de "modismos" que ora se aproximam e ora se afastam dos extremos de posições polarizadas... tais como habilidade versus compreensão.*

A complementariedade é, então, a expressão do aparente paradoxo entre posições aparentemente opostas. Tais paradoxos não se apresentam, é claro, apenas na educação matemática, mas permeiam a nossa vida diária. Temos esperanças, sonhos e ambições a despeito do fato de que sabemos que morreremos (ou, como disse Woody Allen, a despeito do fato de que o universo se contrai). A aprendizagem parece envolver um

paradoxo. À medida que fazemos progressos e achamos soluções para nossos problemas, simultaneamente construímos novos mecanismos assimilatórios que constituirão nossas próprias prisões conceptuais. O ensino parece conter um paradoxo. Como disse LAMPERT (1985, p. 183), o dilema de ensinar *"é um debate entre tendências que se opõem, sendo que nenhuma delas sairá vencedora. Nessa perspectiva, minha tarefa envolveria manter a tensão entre... por um lado, fazer com que os estudantes alcancem uma adequada aprendizagem do meio e, por outro, cobrir o currículo e proporcionar a compreensão individual"*. Lampert continua no sentido de ilustrar que, na prática, trata-se mais de trabalhar repetidamente com esta tensão em situações concretas do que resolver o dilema de uma vez por todas.

A complementariedade, que parece endêmica na educação matemática teórica, expressa o aparente paradoxo entre a matemática enquanto uma construção subjetiva e pessoal e a matemática enquanto verdade objetiva e independente da mente. As considerações a respeito da aprendizagem matemática dos estudantes mostram que ora se enfatiza um extremo e ora outro. Parece que temos que escolher entre estudantes individuais, cada qual construindo solitariamente suas realidades matemáticas isoladas, ou estudantes que apreendem misteriosamente o conhecimento matemático pré-construído no mundo. Mas, devido à complementariedade implícita no ensino, não podemos resolver o problema de uma vez por todas. Porém, temos que aprender a enfrentá-lo em situações locais através da reflexão sobre *"as relações antagônicas subjacentes e as interações mútuas das duas posições"* (STEINER, 1987, p. 48). É por essa razão que discuti modos de coordenar as análises empreendidas em diferentes contextos enquanto que, ao mesmo tempo, defendi que os contextos são domínios de interpretação que não se intersecionam. Eles são complementares embora irredutíveis.

Se isso não parece desejável, podemos, pelo menos consolar-nos com a observação de que os "cientistas de peso" têm de enfrentar suas próprias complementariedades:

> *O físico oscila entre um mundo de ondas e um mundo de partículas de acordo com o objetivo que persegue. Habitualmente, pensamos em uma única interpretação do mundo de cada vez... Quando nos propomos considerar diferentes interpretações, introduzimos múltiplos mundos. Quando aquela interpretação se torna inadequada, abandonamos o mundo por um tempo e consideramos apenas as interpretações. Nós somos monistas, pluralistas e nihilistas, não propriamente em função do modo como o vento sopra, mas como dita o contexto* (GOODMAN, 1984, p. 278).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARTLEY, W. W. *Wittgenstein.* LaSalle, IL: Open Court. 1973.

BAUERSFELD, H. Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 23-41, 1980.

BIDDELL, T. R., WANSART, W. & DE RUITER, J. A. *Model building: Towards a constructivist theory of learning mechanisms.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago. 1986, April.

BISHOP, A. The social construction of meaning–a significant development for mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), 24-28, 1985.

BLOOR, D. *Knowledge and social imagery.* London: Routledge & Kegan Paul. 1976.

BLOOR, D. *Wittgenstein: A social theory of knowledge.* New York: Columbia University Press. 1983.

BLUMER, H. *Symbolic interactionism: Perspectives and method.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 1969.

BRUNER, J. *Actual minds, possible worlds.* Cambridge: Harvard University Press. 1986.

CARRAHER, T. N., & CARRAHER, D. W. *Mathematics as personal and social activity.* Paper presented at the International Conference on Success or Failure? The Child's Development at School, Poitiers, France. 1987.

COBB, P. Information-processing psychology and mathematics education–A constructivist perspective. *Journal of Mathematical Behavior, 6.* 3-40, 1987.

COBB, P. [in press) Multiple perspectives. In L. P. Steffe & T. Wood (eds.), *Transforming early childhood mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

COBB, P., YACKEL, E., & WOOD, T. [in press] Young children's emotional acts while doing mathematical problem solving. In D. B. McLeod & V. M. Adams (eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new, perspective.* New York: Springer-Verlag.

COMAROFF, J. L. Dialectical systems, history and anthropology: Units of study and questions of theory. *Journal of South African Studies,* 8 (2), 143-172, 1982.

D'AMBROSIO, U. Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 5 (1), 44-48, 1985.

DAVIS, P. J., & HERSH, R. *The mathematical experience.* Boston: Houghton Mifflin. 1981.

DE MILLO, R., LIPTON, R., & PERLIS. A. Social processes and proofs of theorems and programs. In T. Tymoczko (ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 267-285). Boston: Birkhauser. 1986.

EISENHART, M. A. The ethnographic research tradition and mathematics education research. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 99-114, 1988.

FISCHBEIN, E. *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht, Holland: Reidel. 1987.

FREGE, G. *The foundations of arithmetic.* New York: Harper. 1960.

GERGEN, K. J. The social constructionist movement in modern psychology. *American Psychologist,* 40, 266-275, 1985.

GÖDEL, K. What is Cantor's continuum problem? In P. Benacerraf & H. Putnam (eds.), *Philosophy of mathematics: Selected readings* (pp. 258-273). Englewood, NJ: Prentice-Hall. 1964.

GOODMAN, N. *Of mind and other matters.* Cambridge: Harvard University Press. 1984.

GOODMAN, N. Mathematics as an objective science. In T. Tymoczko (ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 79-94). Boston: Birkhauser. 1986.

GRABINER, J. V. Is mathematical truth time-dependant? In T. Tymoczko (ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 201-213). Boston: Birkhause. 1986.

GREENO, J. G. Instructional representations based on research about understanding. In A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 61-88). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 1987.

HARDY. G. *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University Press. 1967.

KITCHER, P. Mathematical change and scientific change. In T. Tymoczko (ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 215-241). Boston: Birkhauser. 1986.

KOHLBERG, L., & MAYER, R. Development as the aim of education. *Harvard Educational Review, 42,* 449-496, 1972.

KRUMMHEUER, G. Das Arbeitsinterim in Mathematikunterricht. In H. Bauersfeld (ed.), *Lernen and Lehren von Mathematik.* (pp. 47-106) Koeln: Aulis. 1983.

LAKATOS, I. *Proofs and refutations.* Cambridge: Cambridge University Press. 1976.

LAMPERT, M. L. How do teachers manage to teach? Perspectives on the problems of practice. *Harvard Educational Review.* 55, 178-194, 1985.

LAVE, J. *Cognition in practice:Mind mathematics and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press. 1988.

MATURANA, H. R. Biology of language: The epistemology of reality. In G. A. Miller & E. Lennenberg (eds.), *Psychology and biology of language and thought: Essays in honor of Eric Lennenberg* (pp. 27-63). New York: Academic Press. 1978.

MEADE, G. H. *Mind, self and society.* Chicago: University of Chicago Press. 1934.

NEWMAN, D., GRIFFIN, P., & COLE, M. Social constraints in laboratory and classroom tasks. In B. Rogoff & J. Lave (eds.), Everyday, cognition: Its development in social context (pp. 172-193). Cambridge: Harvard University Press. 1984.

PEIRCE, C. S. *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (Vol. 5, C. Hartshorne & P. Weiss, eds.). Cambridge: Harvard University, Press. 1935.

PIAGET, J. *Biology, and knowledge.* Chicago: Uiniversity of Chicago Press. 1971.

PIAGET J. *Adaptation and intelligence: Organic selection and phenocopy.* Chicago: University of Chicago Press. 1980.

POLANYI. M. *Personal Knowledge.* Chicago: University of Chicago Press. 1962.

RESNICK, L. B. Towards a cognitive theory of instruction. In S. G. Paris G. M. Olson, & W. H. Stevenson (eds.), *Learning and motivation in the classroom.* (pp. 5-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 1983.

RESNICK, L. B., &, OMANSON, S. F. Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (ed.). *Advances in instructional psychology* (Vol. 3, pp 41-95). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 1987.

ROMMETVEIT, R. Language acquisition as increasing linguistic structuring of experience and symbolic behavior control. In J. V. Wertsch (ed.), *Culture, communication, and cognition* (pp. 183-205). Cambridge: Cambridge University Press. 1985.

SAXE, G. B. *The interplay between children's learning in formal and informal social contexts.* Paper presented at the conference on the Scientific Practice of Science Education, Berkeley, California. (1988, January).

SCHUTZ, A. *The problem of social reality.* The Hague, Holland: Martinus Nijhoff. 1962.

SHALIN, V., &, BEE, N. N. *Analysis of semantic structure of a domain of word problems.* Pittsburgh: University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center. 1985.

SINCLAIR, H. *Learning: The interactive recreation of knowledge.* Paper presented at the Sixth International Congress on Mathematical Education, Budapest. (1988, July).

STEFFE, L. P. Children's algorithms as schemes. *Educational Studies in Mathematics,* 14, 233-249, 1983.

STEINER, H-G. A systems approach to mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18, 46-52, 1987.

TAMBURINO, J. L. *The effects of knowledge-based instruction on the abilities of primary grade children in arithmetic word problem solving.* Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh. 1982.

THOM, R. Modern mathematics: Does it exist? In A. G. Howson (ed.) *Developments in Mathematics Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 194-209). Cambridge: Cambridge University Press. 1973.

TYMOCZKO, T. Introduction. In T. Tymoczko (ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. xiii-xvii). Boston: Birkhauser. 1986a.

TYMOCZKO, T. Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics. *Mathematical Intelligencer,* 8(3), 44-50, 1986b.

VOIGT, J. (in press) Social functions of routines and consequences for subject matter learning. *International Journal of Educational Research.*

von GLASERFELD, E. An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (ed.), *The invented reality,* (pp. 17-40). New York: Norton. 1984.

VYGOTSKY, L. S. *Mind and society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press. 1978.

VYGOTSKY, L. S. The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (ed.), *The concept of activity in Soviet psychology.* Armonk, NY: M. E. Sharpe. 1982.

WERTSCH, J. V. *Vygotsky and the social formation of mind.* Cambridge: Harvard University Press. 1985.

WITTGENSTEIN, L. *Some remarks on logical form.* Oxford: Blackwell. 1956.

WITTGENSTEIN, L. *Remarks on the foundations of mathematics.* Oxford: Blackwell. 1964.

WITTGNESTEIN, L. *Zettel.* Berkeley: University of California Press. 1970.