RINCÓN "SAPERE AUDE"…. ¿resolviendo problemas?*

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

1. MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVII. (II)

Cerramos el siglo XVII abordando con un breve bosquejo la aparición de nuevos símbolos algebraicos, a continuación, Descartes y la geometría analítica, para culminar con la geometría y arquitectura de Desargues.

1.1. La aparición de nuevos símbolos algebraicos.

Después de Viète, del que dimos buena cuenta en el número anterior, viene Albert Girard (Saint-Mihiel,1595-Leiden, 1632), quien fue el primero en mostrar el uso del signo negativo en la solución de ecuaciones. Emigró a Holanda como refugiado religioso, pues era protestante.

A los veintidós años ingresó a la Universidad de Leiden, donde estudió Matemáticas a pesar de que sus mayores intereses eran la música y el laúd. Basó sus estudios en álgebra, trigonometría y aritmética y a los treinta y un años publicó un tratado en trigonometría en donde por primera vez se utilizan las abreviaciones ***sin, cos, tan***. Como la mayoría de los matemáticos de su época, Girard estaba interesado en las aplicaciones militares de la matemática. Aparentemente, fue por un

Figura 1. Alber Gérard. https://www.ecured.cu/Albert_Girard

* Agradezco al director de la revista EPSILON, la posibilidad de publicar durante los últimos cuatro años, en este RINCÓN la oferta que le hice de presentar la Resolución de Problemas (RdP´s) abordando la teoría de números, la geometría euclidiana y la historia de las Matemáticas en diferentes periodos.

Figura 2. Pierre Gassendi https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_Gassendi

Invention nouvelle
EN
L'ALGEBRE,
PAR
ALBERT GIRARD
MATHEMATICIEN.
Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science.

A AMSTERDAM,
Chez Guillaume Iansson Blaeuw.
M. DC. XXIX.

Figura 3. *La invención nouvelle en l'algèbre.* Albert Girad. https://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard

tiempo ingeniero del ejército holandés, después de haber publicado su estudio trigonométrico.

Sobre su vida, citar a Pierre Gassendi (Champtercier, Provenza; 22 de enero de 1592-París, 24 de octubre de 1655) que fue un sacerdote católico, filósofo, astrónomo y matemático francés. Gassendi propugnó el lema ***sapere aude***, (que entre otras cosas da título a la colección que se edita en esta sección de la revista EPSILON) luego divulgado por el filósofo prusiano Immanuel Kant, conocedor de la obra de Gassendi. A lo largo de su vida, atacó con dureza a la astrología, la cábala, la alquimia y a los rosacruces, entre otros.

Prefirió y defendió la observación y la deducción matemática en Astronomía y en Física a partir de la razón bien dirigida. En Filosofía destacó como el gran restaurador del atomismo y también del epicureísmo

Gassendi, al referirse a Girard, cuando éste murió, dijo que él prefirió morir describiéndose más como un ingeniero que como un matemático. Girard trabajó en álgebra, trigonometría y cálculo. En 1626 publicó un tratado de trigonometría que contiene las abreviaturas citadas. También dio las fórmulas para calcular el área del triángulo. En álgebra, describe desarrollado el teorema fundamental del álgebra y tradujo las obras de Simon Stevin (1548-1620).

También es famoso por ser el primero en formular $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, que es la definición de la obtención de los términos de la sucesión de Fibonacci.

En 1629, escribió *La invención nouvelle en l'algèbre* donde demuestra que las ecuaciones podrían tener raíces negativas e imaginarias (fig. 3).

Como profesor, enseñó matemáticas, ingeniería, óptica y de la música. Patrocinado por el tribunal, también investigó la ley de la refracción, y dedicó gran parte de su tiempo a la ingeniería del ejército holandés, especialmente en proyectos de cartografía y fortificaciones.

En opinión del matemático inglés Charles Hutton (1737-1823), Girard fue: *"…la primera persona que comprendió la doctrina general de la formación de los coeficientes de las potencias de la suma de las raíces y sus productos. Él fue el primero en descubrir las reglas para la suma de las potencias de las raíces de cualquier ecuación…"*

Figura 4. Charles Hutton (1737-1823) https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hutton/

Figura 5. Thomas Harriot (1560-1621) http://www.cosmovisions.com/Harriot.htm

También el matemático Thomas Harriot (1560-1621), a quien debemos un descubrimiento de la mayor importancia, a saber, que todas *las ecuaciones algebraicas pueden considerarse como el producto de tantas ecuaciones simples como unidades haya en el número que expresa su grado*. Podemos, por ejemplo, ver una ecuación de 5º grado como el producto de cinco ecuaciones simples. Los signos < y > ("menor que" y "mayor que") son de su invención.

Así mismo, hay que reseñar a William Oughtred (1574-1660) matemático y teólogo nacido en Eaton (Buckinghamshire). Dirigió el estudio de la ciencia en su juventud, teología y la de las ciencias exactas, fue nombrado ministro de Albury en 1610 y, gracias a este lucrativo beneficio, pudo satisfacer con toda libertad su pasión por las matemáticas. Oughtred, al mismo tiempo, introdujo el signo **x** para denotar la multiplicación.

Figura 6. Wiliam Oughtred (1574-1660) http://www.cosmovisions.com/Oughtred.htm

1.2. Descartes y la geometría analítica.

Figura. 7. René Descartes (1596-1650)
https://www.astromia.com/biografias/descartes.htm

Después de la caída del Imperio Romano, la geometría había tenido el destino de las otras ciencias y había caído en el olvido. En la época del Renacimiento, los científicos, durante todo un siglo, se habían dedicado tan exclusivamente a traducir y comentar las obras de los antiguos geómetras, que es casi imposible citar un progreso real en geometría. Para eso, tuvimos que esperar a René Descartes (1596-1650), el espíritu universal que dejó su huella en toda la filosofía y toda la ciencia de su tiempo.

René Descartes (René), su nombre sería Renatus Cartesius en su forma latinizada. De su apellido *Cartesius* se deriva el adjetivo cartesiano que se aplica en matemáticas en referencia, por ejemplo, a los planos, ejes o coordenadas. Es un filósofo nacido el 31 de marzo de 1596 en La Haye (ahora La Haye-Descartes) en Touraine, y fallecido en Estocolmo el 11 de febrero de 1650. Su vida es sobre todo la de un espíritu, su verdadera biografía es la historia de sus pensamientos, los acontecimientos externos de su existencia son de interés sólo a través de la luz que pueden arrojar sobre su obra. Desde su más tierna infancia fue meditativo y reflexivo, tanto que su padre, *un señor de la túnica, hijo de un señor de la espada*, lo llamó su pequeño filósofo. En el colegio de La Flèche, donde se le ingresó, el pequeño filósofo asombró a sus maestros, los jesuitas, por la profundidad e independencia de su espíritu y su renuencia a contentarse con las opiniones recibidas. A los diecisiete, es decir a la edad en que uno es todavía un escolar, había hecho el recorrido por todo lo que se enseñaba de su tiempo, y había reconocido su insuficiencia o su vanidad:

> *"….Apreciaba mucho la elocuencia y me encantaba la poesía; pero pensé que ambos eran dones del espíritu más que frutos del estudio. Aquellos que tienen el razonamiento más fuerte y que digieren mejor sus pensamientos para hacerlos claros e inteligibles, siempre pueden persuadir mejor a lo que proponen, aunque solo hablen bretón y no lo hagan. nunca hubiera aprendido retórica [...]. Me gustaron especialmente las matemáticas, por la certeza y la evidencia. sus razones; pero aún no me di cuenta de su uso real y, pensando que solo se usaban para las artes mecánicas, me asombró que, siendo sus cimientos tan firmes y tan sólidos, no se hubiera construido nada más sobre ellos. [...]…"* Reverenciaba nuestra teología y pretendía alcanzar el cielo tanto como cualquier otro; pero habiendo aprendido, como una cosa muy cierta, que el camino no está menos abierto a los más ignorantes que a los más doctos, y que las verdades reveladas que conducen a él están más allá de nuestro entendimiento*:… "No me hubiera atrevido a someterlos a la debilidad de mi razonamiento [...] No diré nada de filosofía excepto que, viendo que ha sido cultivado por las mentes más excelentes que han vivido durante varios siglos, y que, sin embargo, todavía no hay nada allí que no se discuta, y*

por lo tanto que no sea dudoso, No tenía la presunción suficiente para esperar encontrarme allí mejor que los demás; y que, considerando cuántas opiniones diferentes puede haber sobre un mismo tema, que son apoyadas por personas instruidas, sin que nunca haya más de una que sea verdadera, consideré todo falso. que era solo probable. Luego, para las otras ciencias, especialmente cuando toman prestados sus principios de filosofía, juzgué que no se podría haber construido nada sólido sobre cimientos tan sueltos; y ni el honor ni la ganancia que prometen fueron suficientes para invitarme a aprenderlos…"

Descartes, por tanto, salió de la universidad desilusionado con los libros y la ciencia que enseñaban. Podemos decir que en este momento se inclina a no buscar más la verdad sino en sí mismo, en su razón. Sin embargo, quiso, por prudencia, intentar una última prueba. Después de haber cerrado los libros, quiere abrir "el libro mayor del mundo", hojearlo y ver si la verdad está ahí. Entonces, durante diecisiete años, su vida fue como una novela. A veces se mezcla con la sociedad humana, y a veces desaparece abruptamente para esconderse en algún retiro; a veces está en Francia, a veces en el extranjero. Viaja por Alemania, Italia, Holanda; para viajar, se hizo soldado; vive con los soldados de Maurice de Nassau en los Países Bajos, luego con los del duque de Baviera en Alemania; en sus idas y venidas, se podría decir en sus aventuras, dondequiera que lo atraiga un espectáculo raro e interesante; frecuenta a los eruditos del país donde se encuentra, estudia a los seres humanos y a los pueblos, y una vez plenamente convencido de que *el gran libro del mundo* ya no puede revelarle la verdad, se retira al fondo de Holanda, a Franeker, y allí, siete años seguidos (1629 a 1636), solo consigo mismo, apenas correspondiendo con algunos amigos, el padre Mersenne entre otros, construyó desde cero un vasto sistema, donde todo está, naturaleza y humanos, ciencia y la filosofía, el mundo y Dios.

La conmoción que provocó en el pequeño mundo de los científicos y pensadores la aparición de la primera obra de Descartes fue inmensa. Fue una revolución. Esta obra, publicada en Leyden en 1637, se tituló ***Discurso sobre el método*** para conducir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias. Por una innovación que en sí misma ya era una revolución, se escribió en francés y no en latín (El Abbé Etienne de Courcelles dio en 1644 [Amsterdam] una traducción latina revisada por Descartes, bajo este título *Specimina philosophica*). Le siguieron, entre otras: las *Meditationes de prima philosophia in quibus Dei existia et animae a corpore distinntio demostrantur*; *Su adjunctaa sunt variae objectiones doctorum virorum, cum responsionibus auctari*s, es decir, *Meditaciones sobre la primera filosofía*, escritas en latín. Los *Principia philosophicae* (Amsterdam, 1644); el *Tratado sobre las pasiones del alma* (Amsterdam, 1649). Por no hablar de las obras de su juventud, anteriores al *Discurso del Método*, el *Compendium musicae*, o *Teoría matemática de la música*, la *Olympica y las Regulae ad directionem ingenii*, un precioso borrador del Método, después de su muerte, sus amigos publicaron: *Tratado del hombre*, con las Observaciones de Louis de La Forge y un *Tratado sobre la formación del feto* (París, 1664); *El mundo o tratado de la luz de Descartes*, revisada y corregida por Clerselier (París, 1664), que había sido el primer fruto de su obra (y en la que Descartes admitía, como Galileo, el movimiento de la Tierra pero había borrado cuidadosamente esta obra en cuanto conoció la condena del filósofo italiano (1633)); *las Cartas* (París, 1657-1667), y finalmente la *Opuscula posthuma, physica et Mathematica* (Amsterdam, 1701).

Su trabajo científico es principalmente matemático. *El Discurso del método* para conducir bien su razón y buscar la verdad en las ciencias, publicado en 1637, le siguen tres suplementos: *las Dioptría, los Meteoros y la Geometría,* donde Descartes expone algunas aplicaciones particulares de su doctrina general.

La idea fundamental de la geometría cartesiana o geometría analítica - la determinación de un punto en el plano por sus distancias a los dos lados de un ángulo recto - ciertamente no es nueva, ya que la posición de un punto de la esfera terrestre viene dada por sus dos coordenadas geográficas, longitud y latitud. Pero Descartes, al establecer una correspondencia entre las ecuaciones del álgebra (cuyo simbolismo renueva) y las figuras de la geometría, muestra la asombrosa fecundidad del proceso. De esto surge un método general para tratar con álgebra todas las cuestiones de geometría y, al mismo tiempo, curvas; además, la noción de coordenadas, que realiza esta correspondencia, va más allá del dominio de la geometría para extenderse a la mecánica y las ciencias físicas: cualquier teoría física es una representación, una explicación algebraica de los fenómenos. Así, Descartes, al transportar las matemáticas a regiones completamente nuevas, es el primero en considerar todos los fenómenos como simples consecuencias de las leyes de la mecánica. Fuera de las matemáticas, Descartes crea, con su pensamiento, el mundo exterior, y su física es una especie de geometría donde la experiencia no tiene lugar.

Descartes también indica la manera de construir o representar geométricamente las ecuaciones de los grados superiores. Da una regla para resolver una ecuación de cuarto grado por medio de una ecuación cúbica y dos ecuaciones cuadráticas. Finalmente perfeccionó los métodos utilizados por Cardan, Gérard, Harriot y otros matemáticos para reducir y procesar las ecuaciones. En particular, introduce la notación de exponentes y los principios de su cálculo.

Entre otros aspectos del trabajo de Descartes hay que destacar que es considerado en Francia como el ***renovador de la ciencia***. En el trabajo que emprendió para operar esta gran restauración, hay que distinguir al metafísico, al matemático, al físico y al astrónomo.

En metafísica tomó como punto de partida el famoso entimema, ***pienso, luego existo***, y utilizó esta primera verdad para establecer y la existencia del alma, a la que le da para alimentar el pensamiento y la existencia. de Dios, que se basa en la idea misma que nosotros tenemos de ella, y la de los cuerpos, que se basa en la veracidad de Dios. Descartes distinguió claramente el espíritu de la materia (a la que dio la extensión como esencia), pero sin explicar la acción recíproca de las dos sustancias; preocupado por y la fisiología, colocó el asiento del alma en la glándula pineal y le dio espíritus animales como agentes y redujo a los animales a puras máquinas. Finalmente admitió ideas innatas.

En matemáticas, Descartes dio un inmenso paso adelante con la invención de un nuevo modo de notación en álgebra, el de los exponentes, y con la aplicación de esta ciencia a la geometría de curvas; lo que le permitió resolver, como jugando, los problemas que hasta entonces se consideraban insolubles.

En su *Tratado de meteoritos* (1637), fue el primero en presentar una teoría del arco iris, y en su *Dioptrics* (1637), las leyes de la refracción. En astronomía y en cosmología imaginó este famoso sistema de vórtices, según el cual el Sol y las estrellas fijas son el centro de tantos vórtices de materia sutil que hacen que los planetas circulen alrededor de ellos; pero, menos audaz o menos franco que Copérnico, añadió que todos estos vórtices circulaban por la Tierra.

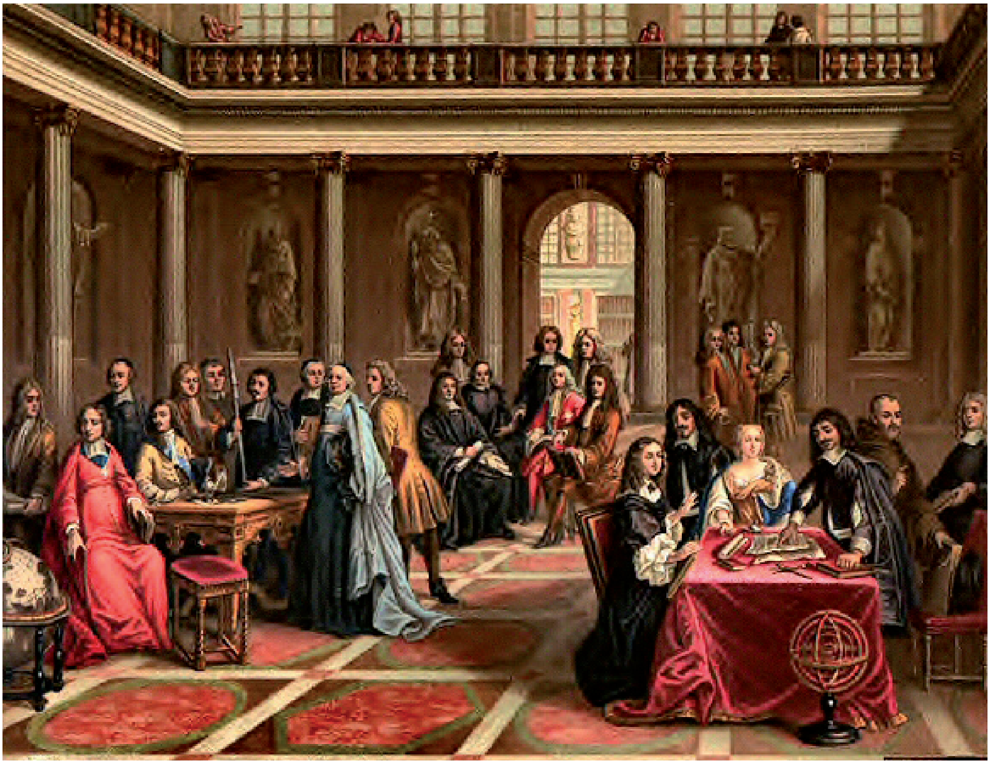

Fig. 8. Christine, Reina de Suecia, escuchando una demostración de Descartes. http://www.cosmovisions.com/Descartes.htm

A pesar de la oposición que la filosofía de Descartes había encontrado en sus inicios, no dejó de extenderse por toda Europa y obtener allí, bajo el nombre de cartesianismo, un gran número de partidarios, que fueron llamados cartesianos. Entre estos, algunos, como Delaforge, Clersellier, Clauberg, P.-Sylvain Régis, Jacques Rohault,… se contentaron con reproducir la doctrina del maestro y comentarla tímidamente; los demás, como Malebranche, Spinoza, Fardella, cada uno trajo consecuencias a su manera, y construyó sistemas que se desviaron mucho de ellos; otros finalmente sólo tomaron prestados de Descartes su espíritu y su método, que utilizaron, a veces para defender, las verdades religiosas y morales como Arnauld, Bossuet, Fénelon, Nicole y la mayoría de los jansenistas de Port-Royal; a veces, como Bayle, para destruir todas las creencias. Después de una boga de más de medio siglo, el cartesianismo se eclipsó rápidamente ante el favor que se adjuntó a los nuevos sistemas de Locke, Newton, Leibniz. Sin embargo, siguió siendo la filosofía dominante en Francia hasta Condillac. Voltaire le asestó los últimos golpes: tales son las líneas principales de la obra de Descartes.

Lo que se ha mostrado, se ha hecho para resaltar su carácter esencial: es un sistema intelectualista. El método deriva de las matemáticas, y del método surgen a su vez las matemáticas, la física, la psicología y la metafísica universales. El mundo entero, tanto las almas como el del cuerpo, es un mundo de ideas claras y distintas, donde todo está ordenado y vinculante según informes universales y necesarios. La libertad está en el corazón del sistema; pero se enlaza en acción. La ciencia se basa en fe de la evidencia intelectual; pero es también sobre la base de la evidencia que se hace la metafísica, cuyo objeto principal, si no el único, es establecer la verdad científica en la realidad. Ésta es la razón por la que se proclama el único árbitro del conocimiento. Por tanto, *Descartes*, cualesquiera que hayan sido los destinos de las diversas partes de su sistema, *es de hecho el padre del pensamiento moderno.*

Los últimos años de su vida fueron todos de propaganda y refutación: el ardor de su proselitismo científico. La reina Cristina de Suecia quería "***verlo y hablar con él de filosofía***". Halagado por esta invitación, Descartes se fue a Estocolmo a fines de 1649, pero al cabo de unos meses sufrió una inflamación que le provocó la muerte el 11 de febrero de 1650. Tenía casi 54 años. Sus restos fueron reportados en Francia en 1667 y archivados con honor en la iglesia St. Genevieve (París), pero no se le permitió pronunciar su panegírico.

1.2. Desargues y la geometría descriptiva

Mientras Descartes descubría la geometría analítica, los métodos de la geometría tradicional sostenida por los griegos también fueron completamente renovados, por Descartes nuevamente y por Pascal, con sus consideraciones sobre las propiedades de las proyecciones y transversales y especialmente por Girard Desargues que sentó las bases de la geometría descriptiva, que debió su pleno desarrollo a Gaspar Monge (1746-1818) a finales del siglo siguiente.

Girard Desargues es un matemático y arquitecto nacido en Lyon en 1593, fallecido en Lyon en 1661. De familia honorable, vino a instalarse, probablemente como arquitecto, en París, donde, desde 1626, se había distinguido por sus conocimientos teóricos y por sus esfuerzos por perfeccionar los procesos prácticos de los artesanos. A partir de ese momento se hizo amigo de Descartes, y su amistad nunca vaciló.

En 1628 participó, como ingeniero, en la construcción del dique de La Rochelle. Perteneció, por otro lado, desde el principio, al círculo de académicos cuyas reuniones semanales (principalmente en Le Pailleur) iban a dar lugar a la Académie des Sciences mucho después. Regresó a Lyon hacia 1650 y pasó los últimos años de su vida retirado. Sus obras, sobre las que Poncelet y Chasles habían llamado la atención, fueron recopiladas y publicadas por Poudra (París, 1864, 2 vols. In-8). Desargues había impreso sucesivamente, con un privilegio que databa de 1630:

- Un panfleto sobre la perspectiva reproducido por el artista francés Abraham Bosse (1604-1676) en su Tratado de 1648, titulado, *Ejemplo de una de las formas universales de la SGDL de tocar las prácticas de perspectiva sin emplear ningún tercer punto, de distancia o de otra índole, que está fuera del alcance del trabajo-*
- Un tratado sobre las cónicas, conservado solo por una copia de La Hire y titulado: *Proyecto Brouillon de un ataque a los acontecimientos de los encuentros de un cono con un plan (París, 1639)* parece haberse unido bajo el título general de Lecciones de las tinieblas, con un *Ataque a los acontecimientos de las contrariedades entre las acciones de los poderes o fuerzas*.

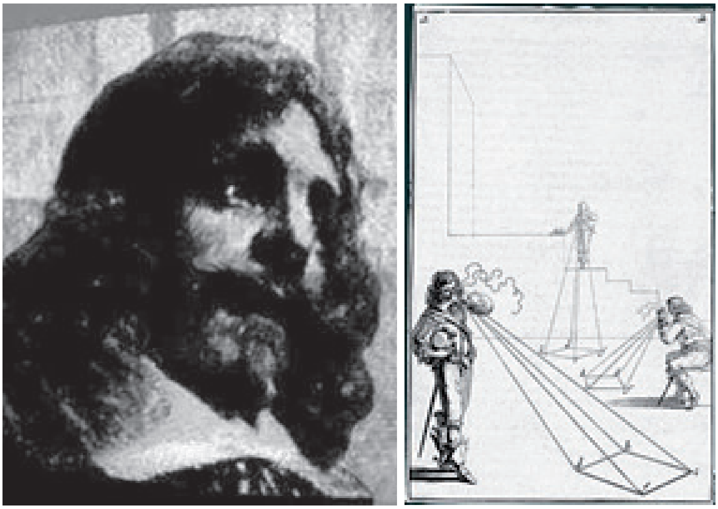

Figura 9. (a) Girard Desargues-(b) lustración de A.Bosse del Tratado de Desargues. https://en.wikiquote.org/wiki/Girard_Desargues-https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_proyectiva

- Finalmente, en agosto de 1640, un tratado sobre talla de piedra, perspectiva y gnomónica, del que sólo se conoce un ejemplar en la biblioteca del Instituto y en el que falta la plancha de figuras; su título es: *Anteproyecto de ejemplo de un modo universal del SGDL, tocando la práctica de la línea con pruebas para el corte de piedras en arquitectura, y la aclaración de un modo de reducir al pie pequeño en perspectiva como en geométrico, y trazar todos los cuadrantes planos de horas iguales al sol.*

Desargues, como Gaspar Monge con quien se le puede comparar, ya aplica sus descubrimientos a la práctica y en particular a la perspectiva y al tallado de piedra, se le considera el primer inventor de los métodos que renovarán la geometría pura en el siglo XIX. Era plenamente consciente de su originalidad y quería romper por completo con todo lo que se había hecho antes que él en la teoría de las cónicas. Su trabajo solo podía ser valorado en su valor por mentes superiores, como Descartes y Fermat, pero caminaron por caminos diferentes, dedicándose a crear geometría analítica, que pronto atraería sobre ella todas las expectativas de los matemáticos. Sin embargo, el trabajo de Desargues habría sido inmediatamente fructífero si Blaise Pascal (1623-1662) cuyo famoso *Essay pour les coniques* que escribió a la edad de diecisiete años (1640) es una aplicación declarada de las ideas del agrimensor de Lyon, habría perseverado en la empresa que se había comprometido a realizar. Si, en geometría pura, hubiera apoyado a Desargues como lo hizo Bosse para aplicaciones prácticas, la ciencia podría haber avanzado un siglo y medio en muchos puntos (fig. 10).

Desargues parece haber tenido un talento notable para la exposición oral; a pesar de la oposición que encontró, sus métodos para las artes se difundieron gradualmente hasta que Monge retomó sus ideas para sistematizarlas. También parece haber tenido un verdadero talento como arquitecto, según las indicaciones que da Bosse sobre su obra.

Figura 10. Girard Desargues y el cardenal Richelieu https://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/desargues.htm

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

Desde la aparición de esta sección he incorporado ejercicios en los que se pondera la geometría clásica como una rama de la geometría basada en los Elementos de Euclides y definida como la ciencia de las figuras en el espacio. Presupone varias nociones como la alineación y la comparación de ángulos o longitudes, a las que atribuye ciertas propiedades que definen la geometría euclidiana. No es menos cierto que la geometría clásica es desplazada gradualmente por la geometría analítica que reduce el estudio de las figuras a expresiones algebraicas gracias a varios sistemas de coordenadas (¡indicar al mismo tiempo que un enfoque axiomático más sólido, basado en la teoría de conjuntos, da lugar a la geometría sintética!). La geometría euclidiana comienza con los elementos de Euclides que es tanto un cuerpo de conocimiento de la geometría de la época como un intento de formalizar las matemáticas de este conocimiento. Allí se exponen los conceptos de recta, plano, longitud, área y forman el soporte de los cursos de geometría elemental. La concepción de la geometría está íntimamente ligada a la visión del espacio físico ambiental en el sentido clásico del término.

Debemos ser consciente, ese es y ha sido mi objetivo durante los cuatro años de colaboración en esta sección mostrar y poner en valor que más de 2000 años después de su nacimiento, el espacio geométrico euclidiano sigue siendo una herramienta eficaz con amplios campos de aplicación.

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 105)

JOYITA*: a) *Los círculos C_1 y C_2 de la figura se intersectan en A y B. El diámetro CA de C_1es tangente a C_2 en A, y D es el punto en C_2 tal que C, B y D están alineados. Si BD = 3 y AC = 2, ¿Cuál es el área de C_2?*

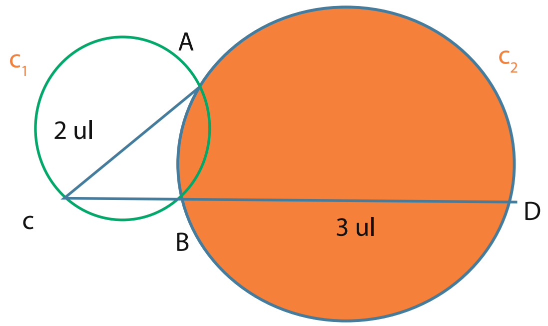

Figura 11. Círculos C_1 y C_2.

SOLUCIÓN

Paso 1

Al ser CA diámetro del círculo C_1 y B un punto, también en C_1, entonces el ángulo $\widehat{ABC} = 90^o$. Por lo tanto, $\widehat{ABD} = 90^o$ y AD es diámetro de C_2. Por otro lado, al ser CA tangente a C_2 en A y AD diámetro, también tenemos que CAD = 90º.

Entonces $\widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 90^o = \widehat{CAB} + \widehat{ABD}$, de donde $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$.

Paso 2

Con ello conseguimos que los triángulos $\overset{\triangle}{BAD}$ y $\overset{\triangle}{BCA}$ son semejantes, y por tanto sus lados son proporcionales.

En la fig. 12 tenemos que

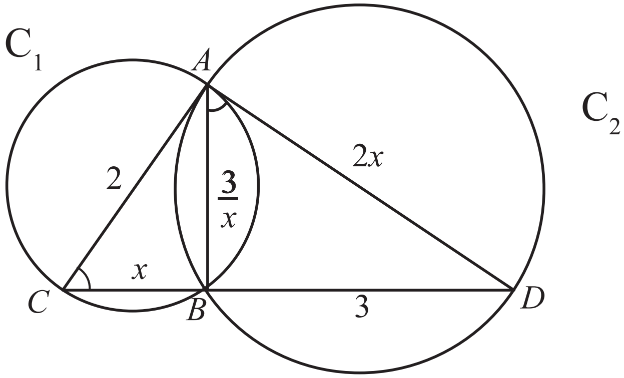

Figura 12. Círculos C1 y C2.

$$\frac{BD}{BA}=\frac{AD}{CA}$$

Por lo tanto, $\dfrac{3}{BA}=\dfrac{AD}{2}$.

Si $AD=2x \Rightarrow \dfrac{3}{BA}=\dfrac{AD}{2} \Rightarrow \dfrac{3}{BA}=\dfrac{2x}{2} \Rightarrow \dfrac{3}{BA}=x \Rightarrow BA=\dfrac{3}{x}$

Paso 3

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{BAD}}$ y realizando las oportunas operaciones, se tiene que

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2+3^2=(2x)^2 \Rightarrow \frac{9}{x^2}+9=4x^2 \Rightarrow 4x^4-9x^2-9=0$$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo $x^2=t \Rightarrow 4t^2-9t-9=0$, y resolviendo se obtiene

$$t=\frac{9\pm\sqrt{9^2+4.4.9}}{8}=\frac{9\pm\sqrt{81+144}}{8}=\frac{9\pm\sqrt{225}}{8}=\frac{9\pm 15}{8}\Rightarrow x^2=\frac{9\pm 15}{8}$$

Como x^2 no puede ser negativo, se tiene que $x^2=\dfrac{24}{8}=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}$.

Por lo tanto, el área del círculo C_2 es

$$A(C_2)=\pi.(\sqrt{3})^2 \Rightarrow A(C_2)=3\pi$$

JOYITA*: b) *El área del triángulo ABC es igual a 40 cm^2.*

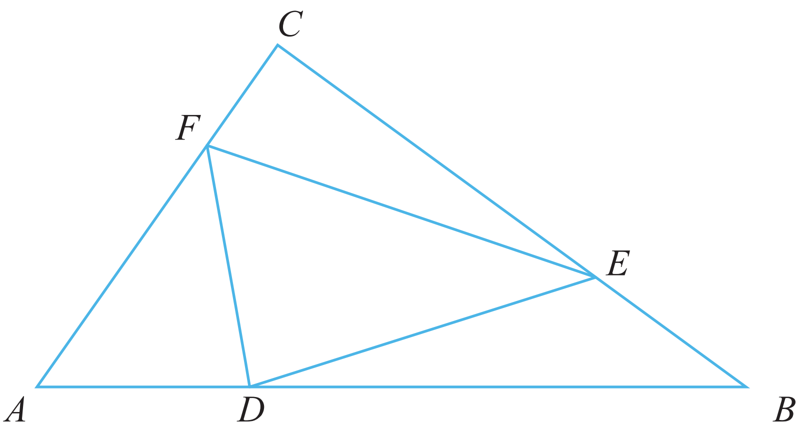

Figura 13. Triángulo $\overset{\triangle}{ACB}$.

Los puntos D, E y F cumplen que DB = 3AD, CE = 3EB y AF = 3FC. ¿Cuál es el área *del triángulo $\overset{\triangle}{DFE}$?*

SOLUCIÓN

Paso 1

Tracemos las alturas CH del triángulo ACB desde C y EI desde el triángulo BED desde el punto E.

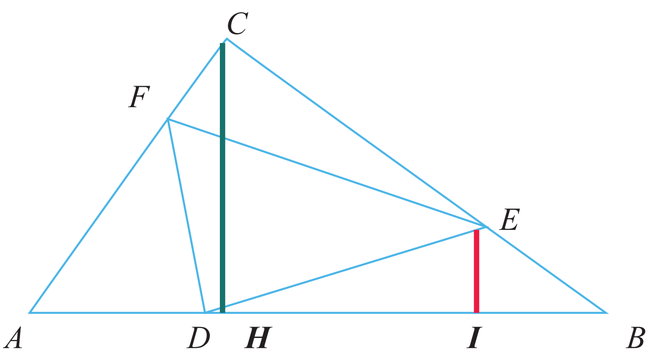

Figura 14. Triángulos $\overset{\triangle}{ACB}$ y $\overset{\triangle}{DFE}$.

La información que nos proporciona el enunciado sobre los puntos D, E y F que cumplen *DB = 3AD, CE = 3EB y AF = 3FC*, nos lleva a afirmar que los triángulos $\overset{\triangle}{\mathrm{CHB}}$ y $\overset{\triangle}{\mathrm{EIB}}$ son semejantes con razón de semejanza de 4:1. Por lo tanto *IE= (1/4) CH.*

Calculemos las áreas de los triángulos $\overset{\triangle}{\mathrm{DEB}}$, $\overset{\triangle}{\mathrm{AFD}}$ y $\overset{\triangle}{\mathrm{FCE}}$.

Paso 2

Hallemos el área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{DEB}}$.

Como *DB= (3/4). AB* sigue que el área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{DEB}}$ se puede calcular así

$$\frac{1}{2}IE.DB = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}CH).(\frac{3}{4}AB) = \frac{3}{32}(CH.AB)$$

Como el área del triángulo *ABC* es 40 cm^2 se tiene:

$$A = 40 = \frac{1}{2}AB.CH \Rightarrow AB.CH = 2.40 \Rightarrow AB.CH = 80$$

Por lo tanto, el área del triángulo DEB es

$$A_1 = \frac{3}{32}AB.CH = \frac{3}{32}80 = \frac{240}{32} = \frac{15}{2}$$

Paso 3

Razonando de forma análoga en los triángulos $\overset{\triangle}{\mathrm{AFD}}$ y $\overset{\triangle}{\mathrm{FCE}}$ podemos comprobar (¡se deja al lector realizar las operaciones!) se tiene

Área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{AFD}}$:

$$A_2 = \frac{15}{2}$$

Área del triángulo $\overset{\triangle}{\mathrm{FCE}}$

$$A_3 = \frac{15}{2}$$

Épsilon, 2020, nº 106, 113-130, ISSN: 2340-714X

Paso 4

De aquí se deduce que el área del triángulo que nos solicitan $\overset{\triangle}{DFE}$ es

$$A=40-3.\ (15/2)=35/2$$

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. **Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 105)**

   a) ***Ejercicio propuesto en Olimpiada Mexicana de Matemáticas**
   b) ***Ejercicio propuesto en la Olimpiada Internacional de Matemáticas en Slovenia-2006**

JOYITA*: a) *Enrique tiene que usar una tarjeta bancaria porque necesita dinero para salir de viaje. El código de cuatro dígitos se le ha olvidado y quiere recuperarlo. ¿Podrías ayudarle a encontrarlo, si cada uno de los números siguientes* ***6427, 4271, 6412, 2671****, tiene una cifra incorrecta y otra fuera de su lugar?*

SOLUCIÓN

Paso 1

Notemos que el ***2*** aparece en todos los números, mientras que el ***1****,* ***4****,* ***6*** y ***7*** aparece cada uno en exactamente tres de los cuatro números. Por lo tanto, si el número que no pertenece fuera uno de los siguientes: ***1, 4, 6*** ó ***7***, uno de los cuatro números tendría todos sus dígitos correctos. En otras palabras, como el ***2*** es el único dígito que aparece en todos, entonces ***2*** no pertenece al número correcto y así las cifras del número buscado son ***1, 4, 6*** y ***7.***

Paso 2

De aquí se deduce que el número ***2*** aparece en el lugar de alguno de éstos y, al sustituirlo en cada una de las opciones, el número que queda tiene intercambiadas el número sustituido por ***2*** con otra de las cifras.

Paso 3

Estudiemos cada uno de los casos:

a) Fijemos nuestra atención en el número ***2.*** Si lo sustituimos por ***1*** en el número ***6427***, obtenemos el ***6417***. De aquí el intercambio del número ***1*** con el número **6** nos da ***1467.*** De la sustitución del 1 con el ***4*** nos da ***6147***, y del 1 con el ***7*** produce ***6471***.

b) A continuación, fijemos nuestra atención, de nuevo, en el número ***2***. Si lo sustituimos por ***6*** en el número ***4271***, obtenemos el ***4671***. De aquí el intercambio del número ***6*** con el número ***4*** nos da ***6471***. De la sustitución del ***6*** con el ***7*** os da 47***6***1, y del ***6*** con el ***1*** produce ***4176.***

Paso 4

A la conclusión que llegamos es que hemos llegado a la solución porque la única coincidencia en los casos tratados se da con el número ***6471***.

JOYITA*: b) *Hallar los pares de valores* ***(p, q)*** *para los que*

$$1+2^{p}+2^{2p+1}=q^{2}$$

SOLUCIÓN

Paso 1

NOTA: Si el par (p, q) es una solución para $p \geq 0 \Rightarrow (p,-q)$ es una solución también.

Para $p=0 \Rightarrow (0,2),(0,-2)$ son soluciones de la expresión $1+2^{p}+2^{2p+1}=q^{2}$.

Paso 2

Consideremos el par (p, q) con $p > 0$, sin pérdida de generalidad pongamos nuestra atención para $q > 0$.

Reescribamos la ecuación inicial:

$$1+2^{p}+2^{2p+1}=q^{2} \;:\mathbf{(1)}$$

así $2^{p}+2^{2p+1}=q^{2}-1 \Rightarrow 2^{p}(1+2^{p+1})=(q-1)(q+1) :\mathbf{(2)}$

De esta expresión se infiere que $(q-1)$ y $(q+1)$ son enteros pares, y uno de ellos es divisible por 4. Por lo tanto, para $p \geq 3$ uno de los factores es divisible por 2^{p-1} pero no por 2^{p}. Entonces $q = 2^{p-1}$ con $m+r$ impar y $r=^{\pm}1$.

Paso 3

Sustituyendo en (2):

$$2^p(1+2^{p+1}) = (2^{p-1}m+r-1)(2^{p-1}m+r+1) = (2^{p-1}m+r)^2 - 1$$
$$= 2^{2p-2}m^2 + 2^p mr \Leftrightarrow 1+2^{p+1} = 2^{p-2}m^2 + mr \Rightarrow 1-mr = 2^{p-2}m^2 - 2^{p+1} \Rightarrow$$
$$1-mr = 2^{p-2}(m^2-2^3) \Rightarrow 1-mr = 2^{p-2}(m^2-8)\,\mathbf{:(3)}$$

a) Al ser *m* par y *r=1* se tiene que $m^2-8\le 0$, que no satisface la condición (3)
b) Consideremos ahora *r=-1*entonces la expresión (3) toma la forma:

$$1+m = 2^{p-2}(m^2-8) \Rightarrow 1+m \ge 2(m^2-8) \Rightarrow 1+m \ge 2m^2-16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17+m \ge 2m^2 \Rightarrow 2m^2-m-17\le 0$$

Paso 4

De aquí se infiere que $m\le 3$. También *m* no puede ser igual a 1 por la expresión (3).

Al ser *m*, impar se obtiene *m=3*, lo que conduce a que *p=4*.

De aquí, y de la expresión que aparece en el PASO 1 se obtiene *q=23*. También es solución *q=-23*.

Por lo tanto, la lista completa de soluciones es:

S={ (0,2), (0,-2), (4,23), (4,-23) }

NOTA: Muchas gracias por haber leído, esta sección, RINCÓN "SAPERE AUDE"…. ¿resolviendo problemas? Espero que hayáis disfrutado con lo que nos une: "Amor por las Matemáticas".