UNIVERSIDAD DE GRANADA

**Departamento de Didáctica de la Matemática**

TRABAJO FIN DE MÁSTER

# ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LOS SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL

**Manuel Alejandro Verón**

**2020**

UNIVERSIDAD DE GRANADA

**Departamento de Didáctica de la Matemática**

Curso Académico 2019/2020

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Díaz Godino del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Manuel Alejandro Verón, dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo. Manuel Alejandro Verón

V° B° del tutor

Fdo. Dr. Juan Díaz Godino

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi tutor el Dr. Juan Díaz Godino, por haber aceptado dirigir este TFM, por sus consejos y sugerencias, por su orientación, amabilidad y plena predisposición durante todo el desarrollo del trabajo, por animarme a seguir por más, siendo una gran experiencia de aprendizaje.

Agradezco a mi amiga y colega Mgter. Margarita Benítez, por su incondicional apoyo desde la inscripción al máster hasta el TFM.

Agradezco especialmente a mi familia, mi esposa Griselda y mis hijas Oriana e Ianara, quienes han sido un gran apoyo y acompañamiento durante todo el proceso de formación, gracias a ellas pude lograrlo.

Agradezco a mis padres, Teresa y José, por haberme enseñado que todo es posible y que con esfuerzo todo se logra.

# RESUMEN

En este TFM abordamos el estudio de los diversos significados del concepto de diferencial aplicando herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico, en particular las nociones de significado pragmático de un concepto y configuración de prácticas, objetos y procesos. Previamente realizamos un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del diferencial que ha permitido identificar cuatro significados parciales fundamentales, correspondientes a las aportaciones de Leibniz, Cauchy, Fréchet y Robinson. La caracterización ontosemiótica de los cuatro significados parciales la realizamos analizando la solución del problema de trazado de la tangente a una curva aplicando las prácticas operativas y discursivas propias de los autores mencionados.



*Palabras claves:* Diferencial, significados, configuración ontosemiótica, análisis epistémico.



# ABSTRACT

In this master thesis we approach the study of the different meanings of the concept of differential applying theoretical tools of the Ontosemiotic Approach, in particular the notions of pragmatic meaning of a concept and configuration of practices, objects and processes. Previously, we carried out a historical-epistemological study on the origin and evolution of the differential, which has allowed us to identify four fundamental partial meanings, corresponding to the contributions of Leibniz, Cauchy, Fréchet and Robinson. The onto-semiotic characterization of the four partial meanings is carried out by analyzing the solution of the problem of tracing the tangent to a curve, applying the operative and discursive practices of the mentioned authors.



*Key words:* Differential, meanings, ontosemiotic configuration, epistemic analysis.

## ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN

En este de Trabajo de Fin de Máster (TFM) se aborda el análisis de los diversos significados del diferencial de una función aplicando, herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Se trata de elaborar una reconstrucción de los significados de este concepto, en términos de configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos empleadas en la resolución de una situación – problema, en las que el concepto diferencial interviene de manera clave. Para ello se tuvieron en cuenta investigaciones previas, con la finalidad de identificar los tipos de situaciones-problemas, además de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos asociados, que permiten reconocer los significados parciales del diferencial.

La finalidad de este estudio es construir un modelo ontosemiótico de referencia, dirigido a cursos preuniversitarios y primeros cursos de cálculo, sobre los significados del diferencial, a partir del cual se podrá realizar diferentes proyecciones e implicancias en la enseñanza y aprendizaje de este concepto. Además se pretende identificar las interconexiones entre los significados parciales, con la finalidad de establecer niveles de generalización  y formalización entre los significados.

El trabajo está dividido en cinco capítulos, el primero indaga sobre los antecedentes y la justificación del trabajo. El segundo establece el marco teórico y metodológico, junto con el problema de investigación y los objetivos. En el tercer capítulo, se hace un estudio histórico – epistemológico sobre la emergencia del concepto diferencial a lo largo del desarrollo y avance del cálculo.

En el cuarto capítulo se realiza un análisis ontosemiótico de las prácticas, objetos y procesos que intervienen en la resolución del problema del trazado de la tangente a una curva en un punto, con el fin de explicitar los significados parciales del diferencial. En el último capítulo se presentan las síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas de la investigación.

Como anexos se agregan algunos antecedentes históricos que también marcaron el avance del cálculo y del diferencial, en particular.

# Capítulo 1

## ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

La introducción del cálculo en la enseñanza de las ciencias, en especial en las matemáticas, presentó a lo largo de la historia muchos desafíos en cuanto a su enseñanza y su aprendizaje, generando diferentes dificultades y obstáculos, tanto para los profesores como para los estudiantes, cuestión que se mantiene a lo largo del tiempo, principalmente en el aprendizaje de los conceptos centrales del cálculo infinitesimal.

El surgimiento del cálculo en el siglo XVII supuso un gran avance en las ciencias y es considerado como "la herramienta teórica más poderosa jamás construida por los hombres a lo largo de la historia" (Rossi, 1997, p. 199), ya que permitió resolver una gran cantidad de problemas. Pero su desarrollo no estuvo del todo acompañado por la compresión y el rigor que caracteriza a los textos matemáticos, motivos que generaron varias contradicciones y deficiencias entre sus conceptos (Martínez-Torregrosa, López-Gay, Gras Martí & Torregrosa Gironés, 2002). Respecto a esta situación Eves (1981) dice:

> Atraídos por la potente aplicabilidad del asunto, careciendo de una verdadera comprensión de los fundamentos sobre los que debe apoyarse, los matemáticos manipulaban los procesos analíticos de una manera casi ciega, a menudo guiados por una ingenua intuición de que lo que hacían debía ser válido. (p. 134)

A continuación presentamos brevemente diferentes investigaciones realizadas en el área del cálculo o análisis matemático que dan cuenta de la complejidad del tema, y en especial del concepto de diferencial. Esta complejidad plantea importantes problemas tanto para su enseñanza como su aprendizaje por parte de estudiantes y profesores, en los niveles de educación secundaria y universitaria.

De las investigaciones analizadas en torno al diferencial, se pueden distinguir diversos ángulos desde donde se consideró este objeto de estudio. Los más numerosos son los que tratan sobre las dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje, tanto en estudiantes como en los profesores. En segundo lugar en cantidad, encontramos muchas investigaciones sobre la historia de las matemáticas enfocadas en el cálculo y en especial en los infinitesimales. Como agregado a esta línea, mencionamos los que se ocupan del impacto e implicancias de estos estudios de la historia del cálculo en la enseñanza y aprendizaje del mismo. En tercer lugar, investigaciones que tienen como objeto de estudio a los infinitesimales, y en especial al diferencial, desde una estudio histórico–epistemológico y algunos de ellos avanzan sobre la construcción de modelos epistemológicos, enfoques, aproximaciones desde algunos marcos teóricos de la didáctica de la matemática.

## 1.1. Antecedentes sobre dificultades en la enseñanza y aprendizaje

Diversos estudios han mostrado que los estudiantes y profesores presentan considerables deficiencias en los conceptos básicos del cálculo (Orton, 1983; Tall, 1981b; 1992; Ferrini-Mundy & Gaudard, 1992; Thompson, 1994). Como así también en el concepto de diferencial (Tall, 1981a; Martínez-Torregrosa et al., 2002). Las dificultades en torno al concepto de diferencial no son exclusivas de matemáticas, sino que se extienden a otras ciencias, como física y química, donde también hay estudios que reflejan esta problemática (López-Gay, Martínez Sáez & Martínez-Torregrosa, 2015).

Las dificultades que presentan los estudiantes sobre el diferencial son del tipo estructural, relacionado con el cálculo algebraico, pero también conceptual, relacionado con la comprensión del objeto (Orton, 1983). Es importante tener en cuenta que el diferencial es un concepto polisémico (López-Gay et al., 2015) porque tiene significados y funciones diferentes en matemáticas y en física. En matemáticas permite formalizar el cálculo independiente del contexto físico, mientras que en física tiene un uso productivo para varios conceptos, sin tener una preocupación por el rigor en los conceptos y justificaciones de los procedimientos. Esta cuestión también se traslada a la educación; es por ello que consideramos necesario abordar una perspectiva histórica–epistemológica del concepto de diferencial.

La dificultad de una determinación precisa del significado del diferencial no se reduce solo a estudiantes y profesores, sino también a matemáticos que se plantearon, en diferentes momentos, acerca del mismo. Una muestra de ello se encuentra en el comentario de Freudenthal en 1973:

> Diferenciales inútiles pueden ser despedidas de inmediato. Si $dy, dx$ aparecen sólo en la combinación $dy/dx$ o bajo el signo integral después del integrando, la pregunta sobre qué significan individualmente $dx, dy$ es equivalente a preguntarse qué significan las letras $l$, $o$, $g$, en $log$. (p. 550)

## 1.2. Antecedentes sobre la evolución del diferencial en la historia de la matemática

En Kleiner (2012) se realiza una reconstrucción histórica de las nociones fundacionales del cálculo, lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, partiendo de los aportes de grandes matemáticos desde el siglo XVII hasta la actualidad.

Estudios sobre la evolución histórica del cálculo, en especial sobre los conceptos de límite, derivada, diferencial e integral encontramos en Edwards (1979), Boyer (1959) y Kitcher (1984). En forma particular sobre el concepto de diferencial tenemos a Bos (1974), Taylor (1974), Artigue & Viennot (1987), Pulido (1997), López-Gay (2001), entre otros. Muchos de los estudios respecto a la historia del cálculo se focalizan en los principales aportes de Cavalieri, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Cauchy, Weierstrass, Fréchet y Robinson, analizando en paralelo la construcción, evolución, consolidación y obstáculos que generó y que generan los infinitesimales en el cálculo.

Las investigaciones de Martínez-Torregrosa et al. (2006) y Kleiner (2012) permiten reconocer que a lo largo de la historia de un concepto matemático, su estudio se realiza desde diferentes enfoques o lentes que responden a un conjunto de condiciones sociales y temporales que permiten avanzar en la construcción y consolidación de determinados aspectos del concepto.

> Hilbert señaló que toda teoría matemática atraviesa tres períodos de desarrollo: el ingenuo, el formal y el crítico. En el caso del cálculo, el período ingenuo ocurrió en el siglo XVII, el formal en el XVIII y el crítico en el XIX. (Kleiner, 2012, p. 93)

### 1.3. Antecedentes sobre modelos de significados del diferencial en educación matemática

Tall (1981) plantea una serie de enfoques según los significados atribuidos a los conceptos del cálculo desarrollados a partir del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) los cuales son:

1. *El método antiguo, intuitivo e infinitesimal*: los infinitesimales intuitivos de Leibniz son considerados como cantidades.
2. *El método dinámico del límite:* los infinitesimales son considerados como funciones.
3. *El método numérico:* el infinitesimal es considerado como un valor numérico de una variable.
4. *El método del dibujo por ordenador:* el infinitesimal es considerado como un indivisible.
5. *El método $\varepsilon - \delta$:* el infinitesimal es desterrado del cálculo.
6. *El método infinitesimal moderno:* similar al método antiguo de Leibniz pero utilizando la lógica moderna.

Diversos estudios posteriores a Tall (1981) permitieron desarrollar, en el marco del PMA, el constructo denominado esquemas conceptuales epistemológicos (ECE) para hacer referencia a:

> la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un contexto específico. Elementos que existieron en un cierto período histórico y que se aceptaron por la comunidad matemática en ese período de tiempo y en ese escenario particular. (Valdivé & Garbin, 2008, p. 419)

En Valdivé & Garbin (2008) se presentan siete ECE como resultado del estudio de la evolución histórica del infinitesimal, siendo los mismos:

1. *Grecia antigua:* el infinitesimal asociado a la razón.
2. *Edad medieval (529-1436):* el infinitesimal asociado a una unidad indivisible.
3. *Siglo XVI y principio del XVII:* el infinitesimal como una diferencia.
4. *A mitad del siglo XVII:* el infinitesimal como razón aritmética.
5. *Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII:* el infinitesimal asociado a un incremento.
6. *Siglo XVIII y principio del XIX:* el infinitesimal como símbolo.
7. *Finales del siglo XIX:* el infinitesimal como una función.

En la investigación de López-Gay et al. (2015) se distinguen diferentes significados del diferencial según sus usos tanto en matemáticas como en física y en cómo se presentan en los libros de textos de cálculo. Así en matemáticas, se lo distingue como:

1. *Instrumento formal, carente de significado (Asociado a la definición de Cauchy).*
2. *Aproximación lineal del incremento ($\Delta y \approx f'dx = dy$ ).*
3. *Estimación lineal tangencial (Asociado a la definición de Fréchet).*
4. *Infinitesimal (Asociado a la definición de Robinson).*

Mientras que en Física, se lo distingue como:

1. *Sin sentido* (Similar al significado de Instrumento formal, en matemáticas).
2. *Incremento infinitesimal* (similares a las ideas intuitivas de Newton y Lebniz).
3. *Aproximación infinitesimal* (similar a la ideas de infinitesimal de Robinson).
4. *Estimación lineal* (similar a la ideas de estimación lineal tangencial de Fréchet).

En Pulido (2010) se presenta una clasificación de los significados del diferencial teniendo en cuenta las definiciones dadas por los libros de textos y la teoría de formas diferenciales. Entre los significados propone:

1. *El diferencial como un incremento finito:* donde el diferencial de $y$ se define como $dy = y'.dx$, que es la manera que se presenta actualmente en los libros de textos de cálculo.
2. *El diferencial como transformación lineal:* donde se considera una función F de campo escalar ($R^n en\ R$), el diferencial de F en $a$ ($a \in R^n$) se define como la transformación lineal $\lambda(a)$ y se escribe $dF = \lambda(a).dx$.
3. *El diferencial como un infinitésimo:* donde el diferencial se define en términos del análisis no estándar con los infinitesimales.
4. *El diferencial como una forma diferencial:* donde el diferencial se define y se generaliza en al cálculo de variedades en la teoría de las formas diferenciales.

Ante esta diversidad de perspectivas sobre el concepto de diferencial en educación matemática, hemos considerado necesario realizar un estudio histórico-epistemológico focalizado en caracterizar los diversos significados de este concepto, identificando sus elementos característicos e interconexiones. Consideramos que para ello, la perspectiva antropológica, pragmatista y semiótica sobre el conocimiento matemático del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013) puede ayudar a realizar esta reconstrucción y análisis de significados.

# Capítulo 2

## PROBLEMA, MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Para el análisis didáctico-matemático de la actividad matemática adoptamos como marco teórico y metodológico, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) desarrollada por Godino y colaboradores (Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, 2017). En esta investigación las principales nociones a utilizar son el significado pragmático y la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos.

## 2.1. Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)

Se define como práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Un objeto matemático, como objeto institucional se considera como un "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 335), y el significado de un objeto queda formado por el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338).

### 2.1.1. Significados

Al identificar el significado pragmático de un objeto matemático con las prácticas operativas y discursivas que se realizan para resolver un tipo de situación-problema, una estrategia metodológica para describir dicho significado consistirá en la elección de un problema prototípico, elaborar la secuencia de prácticas e identificar la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la solución. Este análisis permite gestionar procesos de estudio matemático y reconocer la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática como fuente de explicación de las dificultades que se presentan en los procesos de instrucción matemática (Burgos & Godino, 2020).

El conjunto de los significados parciales de un objeto permite construir un significado de referencia del mismo, a partir de identificar las interconexiones entre ellos, lo que posibilita establecer niveles de generalización y formalización entre los significados.

### 2.1.2. Configuración ontosemiótica

Para el análisis del significado de los conceptos matemáticos se ha desarrollado la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones-problemas, las cuales son la razón de ser de la actividad matemática y de los objetos emergentes de la misma. (Figura 2.1). Los objetos matemáticos son clasificados en categorías según su naturaleza y función:

> -Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
> -Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
> -Conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones).
> -Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
> -Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
> -Argumentos (enunciados para justificar las proposiciones y procedimiento deductivos o de otro tipo). (Burgos & Godino, 2020, p. 5)

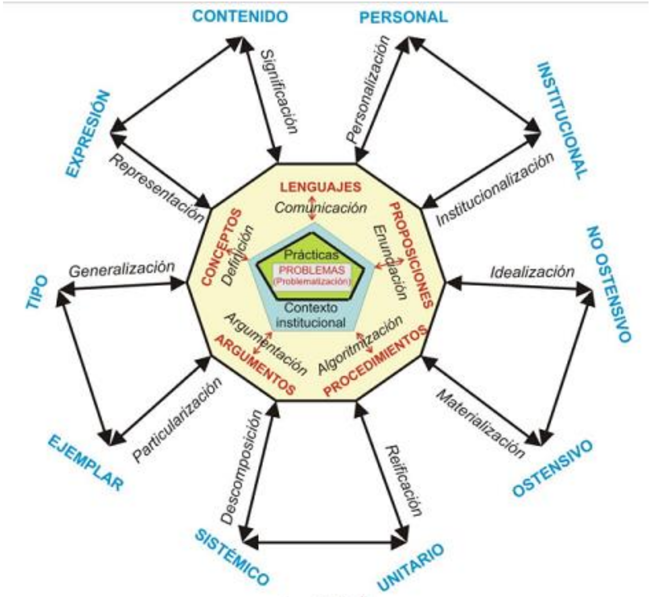


*Figura 2.1.* Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos.
(Godino, 2014, p. 23)

Desde el EOS, un objeto matemático es "cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización" (Godino, Batanero & Font, 2020, p. 6). Esta definición general de objeto se complementa con una tipología de objetos (Figura 2.1), dentro de la cual se incluyen los *conceptos*, entendidos desde una perspectiva unitaria como una entidad matemática que se define (concepto-definición). Pero sobre un concepto matemático, como el diferencial, se puede adoptar también una perspectiva sistémica, en cuyo caso el concepto de diferencial viene a ser la configuración ontosemiótica asociada a una de sus definiciones, y por tanto, al sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de un problema prototípico en que interviene el diferencial. Como para el concepto de diferencial, o cualquier otro concepto, se pueden encontrar diferentes definiciones ligadas a diferentes contextos de uso y situaciones-problemas, cada una de ellas constituye un significado parcial o sentido del concepto. El significado pragmático global del concepto de diferencial será, por tanto, la trama de configuraciones ontosemióticas que se puede reconstruir en las cuales dicho objeto interviene de manera determinante.

### 2.2. Problema de investigación

Este trabajo de investigación surge a partir del cuestionamiento sobre los significados del diferencial de una función real de variable real, los cuales son propuestos como objeto de estudio en los currículos de diversas carreras universitarias. Concretamente nos planteamos las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuáles son los diversos significados del diferencial?
2. ¿Qué elementos permiten distinguir los significados del diferencial?
3. ¿Cómo se relacionan y articulan entre sí los diversos significados del diferencial?
4. ¿Es posible definir un modelo para categorizar los significados del diferencial según el grado de generalidad y formalización de los objetos intervinientes?

Las respuestas a estos interrogantes nos permitirán caracterizar y establecer niveles entre los diversos significados del diferencial, en función de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos, que intervienen en la resolución de las situaciones-problemas, donde se pone en juego el concepto de diferencial.

### 2.3. Objetivos

El objetivo general de nuestro trabajo lo formulamos en los siguientes términos:

- OG: Construir un modelo ontosemiótico de referencia de los diversos significados del diferencial.

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- OE1: Realizar un estudio histórico – epistemológico del concepto diferencial.
- OE2: Identificar los significados parciales del concepto diferencial a partir del estudio histórico – epistemológico.
- OE3: Reconocer las configuraciones de prácticas, objetos y procesos asociados a los diversos significados del diferencial.

- OE4: Reconstruir un significado de referencia del diferencial a partir de los significados parciales y las configuraciones ontosemióticas identificadas.

### 2.4. Metodología

La metodología a emplear es de tipo cualitativo – descriptivo e histórico porque, en primer lugar hace foco en la reconstrucción de los significados parciales del diferencial a lo largo de la historia del cálculo, y luego se realiza un análisis ontosemiótico de las prácticas, objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones-problemas asociadas a cada tipo de significado.

Con respecto al método a emplear para la recolección de datos, en primer lugar se realizó un estudio documental histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del concepto diferencial para construir un significado de referencia del mismo. (Godino et al., 2007). Para este estudio se consultaron diferentes fuertes de información, como libros, revistas y páginas especializadas en didáctica de la matemática y en la historia de las matemáticas.

Posteriormente se realizó un análisis ontosemiótico (Godino, 2002) de los significados puestos en juego en la resolución de situaciones-problemas a partir de la identificación de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas operativas y discusivas.

Para el análisis ontosemiótico, en primer lugar seleccionamos una situación–problema y sus diferentes formas de resolución. Luego se identificaron los objetos primarios intervinientes en las prácticas matemáticas reconociendo los diferentes grados de generalidad y formalidad, lo que permitió establecer los significados parciales del objeto y definir relaciones jerárquicas entre ellas en función de su complejidad (Burgos & Godino, 2020).

Para la organización y estudio de los datos del análisis ontosemiótico se optó por utilizar la tabla propuesta por Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos & Giacomone (2017) para establecer relaciones entre las prácticas matemáticas, en la primera columna; los usos e intencionalidad de las mismas, en la segunda columna; y en la tercer columna, los objetos matemáticos que entran en juego en cada práctica.

Luego de cada tabla realizamos una reflexión en torno a cómo entran en juego los objetos y procesos matemáticos identificados, para reconocer el significado del concepto que está asociado a las prácticas matemáticas, operativas y discursivas, de la resolución del problema seleccionado.

Existen diversas investigaciones en el marco del EOS que utilizaron la técnica del análisis ontosemiótico (Godino, 2002) para el estudio de los significados de diferentes contenidos matemáticos, como por ejemplo para el caso de la proporcionalidad (Burgos & Godino, 2020; Godino et al., 2017), en el caso de los números naturales (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011), para las igualdad de números reales (Wilhelmi, Godino & Lacasta, 2007), para la derivada (Pino- Fan, Godino & Font, 2011) y la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, 2016).

# Capítulo 3

## EMERGENCIA DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL: ESTUDIO HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICO

### 3.1. Introducción

El concepto de diferencial emerge de las situaciones–problemas que involucran a las diferencias, incrementos infinitamente pequeños, infinitesimales, variaciones o cambios muy pequeños, cantidades que pueden considerarse tan pequeña como se quiera pero nunca cero, aproximación lineal y estimación. Estas situaciones surgen en el contexto de las matemáticas, a partir del planteo del cálculo de la tangente a una curva, la longitud de la curva, el área de una región o el volumen de un sólido de revolución. Pero también surgen en otras ciencias, como la física, la química, biología, economía, etc., donde los diferenciales son utilizados como una herramienta para modelizar o matematizar los cambios pequeños o infinitamente pequeños de los fenómenos de estudio.

Teniendo en cuenta que el diferencial es un concepto polisémico (López-Gay et al., 2015), que presenta diferentes significados según las configuraciones de prácticas, objetos y procesos que la caracterizan, creemos necesario realizar en este capítulo, un estudio histórico–epistemológico que permita reconocer, en un primer momento, a lo largo de la evolución histórica del cálculo, los problemas y las prácticas matemáticas que permitieron el surgimiento y evolución del concepto de diferencial junto con los objetos que intervienen en las mismas.

A continuación realizamos una presentación de los principales aportes del concepto de diferencial a lo largo de los siglos del XVII hasta XX.

### 3.2. El cálculo de los diferenciales de Leibniz

El cálculo de Leibniz fue cambiando a lo largo del tiempo y su concepto central es el diferencial. Leibniz considera que una curva está compuesta por un polígono con infinitos lados, cada uno con longitud infinitesimal, similar a la concepción griega del círculo como un polígono de infinitos lados. En la curva se asocia una secuencia infinita de abscisas $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , ... y una secuencia infinita de ordenadas $y_1$ , $y_2$ , $y_3$ , ... donde cada $(x_i , y_i)$ representan las coordenadas de los puntos de la curva.

El diferencial de $x$, denotado por $dx$ es la diferencia entre dos valores sucesivos de $x$, al igual que el diferencial de y como $dy$. "El diferencial $dx$ es una cantidad fija distinta de cero, infinitamente pequeña en comparación con $x$ – en efecto, un infinitesimal" (Kleiner, 2012, p. 75).

En la curva hay una secuencia de diferencias $x_i - x_{i-1}$ correspondientes a las abscisas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la curva y cada lado del polígono que constituye la curva se denota con $ds$, que son infinitos e infinitesimales. A partir de los infinitesimales $dx, dy, ds$ se determina el triángulo característico de Leibniz, como se observa en la Figura 3.1, que satisface la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ donde el lado $ds$ de la curva (lado infinitesimal del polígono) se considera coincidente con la tangente a la curva en el punto $(x, y)$. Sobre este hecho Leibniz afirma: "encontrar una tangente es dibujar una línea recta que une dos puntos de la curva que tienen una distancia infinitamente pequeña, es decir, el lado prolongado del polígono infinitoangular que para nosotros es lo mismo que la curva" (Leibniz, 1684, p. 223, citado en Bos, 1974, p. 19).

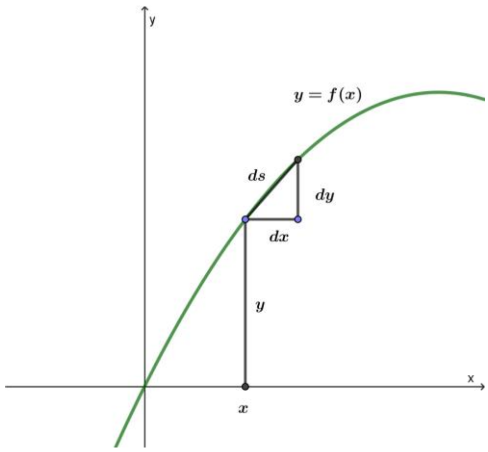


*Figura 3.1*. Triángulo característico de lados infinitesimales $dx, dy, ds$ de Leibniz. (Kleiner, 2012, p. 76)

A partir del triángulo diferencial obtenemos que la pendiente de la tangente a la curva en un punto $(x, y)$ queda determinado por el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$ denominado cociente diferencial.

Leibniz consideraba a la integral como una suma de infinitos rectángulos infinitesimales de base $dx$ y altura $y$, como se observa en la Figura 3.2. Respecto de los triángulos que quedan determinados entre la curva y los rectángulos Leibniz señala que "son infinitesimales en comparación con dichos rectángulos, [y] pueden omitirse sin riesgo" (Edwards, 1979, p. 257). Los triángulos que sobran son los triángulos característicos de

Leibniz y pueden ser vistos como un vínculo entre la diferenciación y la integración. La notación empleada para la integral es $\int xdx$, donde el símbolo $\int$ es una S alargada e indica una suma. Tanto Newton como Leibniz calculan las integrales por antidiferenciación.

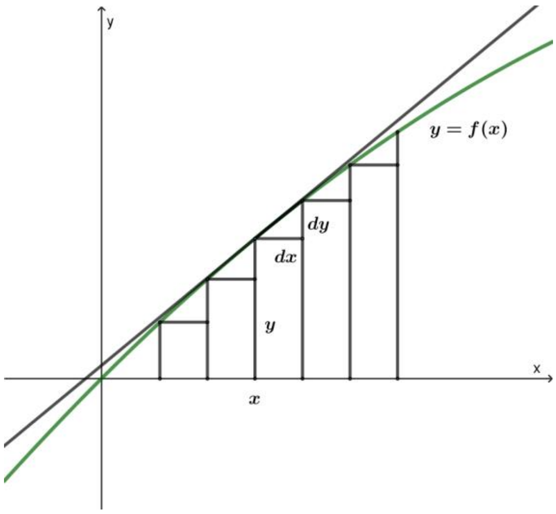


*Figura 3.2*. La integral de Leibniz como una suma infinita de rectángulos infinitesimales (Kleiner, 2012, p. 76)

Para calcular la tangente en un punto $(x, y)$ a la curva de la cónica $x^2 + 2xy = 5$, en primer lugar se reemplazaba a $x$ e $y$ por $x + dx$ e $y + dy$, respectivamente, porque el punto $(x + dx, y + dy)$ es un punto de la cónica que se encuentra infinitamente cerca de $(x, y)$. Al reemplazar nos queda:

$$x^2 + 2xy = 5 \qquad (1)$$

$$(x + dx)^2 + 2(x + dx)(y + dy) = 5$$

$$x^2 + 2xdx + (dx)^2 + 2xy + 2xdy + 2ydx + 2dxdy = 5 \quad (2)$$

En este punto del desarrollo del ejercicio se descartan $(dx)^2$y $2dxdy$ porque se consideran insignificantes en comparación con los otros términos y restamos las ecuaciones (1) y (2), resultando:

$$2xdx + 2xdy + 2ydx = 0$$

Dividimos a ambos miembros por $dx$ para obtener el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$

$$2x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$x + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-y}{x}$$

Se obtiene de esta manera un procedimiento que permite encontrar la pendiente de la tangente a cualquier curva por medio del cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$.

Como podemos observar en el cálculo de Leibniz, el diferencial emerge de las situaciones-problemas donde intervienen las cantidades infinitamente pequeñas, cantidades consideradas desde un contexto y lenguaje geométrico (Bos, 1974).

### 3.3. El límite y el diferencial de Cauchy

La evolución histórica–epistemológica del objeto diferencial fue cambiando de enfoque a los largo de los siglos, en el siglo XVII predominó en gran medida un enfoque geométrico, en el siglo XVIII un enfoque algebraico. Pero a partir de 1821 con los aportes de Cauchy, Bolzano, Dedekind y Weierstrass se puede decir que comienza un nuevo enfoque en el cálculo basado en la aritmética, resultado de las siguientes características fundamentales que se dieron en este tiempo y que son descritas por Kleiner (2012):

1. La consideración de la noción de límite como concepto subyacente del cálculo.
2. El reconocimiento del lugar central que ocupan las desigualdades en las pruebas y definiciones.
3. El reconocimiento de que la validez de los resultados en el cálculo depende del dominio de definición de una función.
4. La compresión de que para tener una base lógica del cálculo es necesario una compresión de la naturaleza de los números reales, y dicha compresión se tiene que basar en una concepción aritmética más que geométrica de la continuidad de los números reales.

Cauchy trabajó sobre los fundamentos rigurosos del cálculo, producto de ello se observa en su Cours d'analyse de 1821 y los textos de 1823, 1826 y 1829, donde estableció al concepto de límite como el central del cálculo sobre el cual debían basarse los demás conceptos de continuidad, convergencia, derivada e integral. Este cambio condujo a ubicar a los diferenciales en un lugar marginal dentro del cálculo, ocupando su lugar central la derivada y reduciendo al diferencial a una expresión que depende de ella. La definición del concepto de límite de Cauchy es: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, que eventualmente difiere de él tan poco como se desea, ese valor fijo se llama límite de todos los demás" (Kitcher, 1984, p. 247).

La diferencia de Cauchy, de Newton y d'Alembert es que en su definición de límite no menciona qué sucede cuando la variable alcanza su límite y no dice que no puede oscilar su límite.

La definición de Bolzano y Cauchy de continuidad es:

> La función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable $x$, una función continua de esta variable si, para cada valor de $x$ entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ disminuye indefinidamente con $\alpha$. En otras palabras, la función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a $x$ entre los límites dados si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma. (Edwards, 1979, pp. 310-311)

Como se puede observar en la definición, Cauchy emplea los infinitesimales. Consideraba que "un infinitesimal es una variable cuyo límite es cero, en lugar de una constante, como en el uso común de los siglos XVII y XVIII" (Kleiner, 2012, p. 90). "cuando los valores absolutos sucesivos de una variable disminuyen indefinidamente de tal manera que sea menor que cualquier cantidad dada, esa variable se convierte en lo que se llama infinitesimal. Dicha variable tiene cero para su límite" (Kitcher, 1984, p. 247).

La evolución del concepto de derivada tiene varias etapas, la derivada como tangente fue utilizada por Fermat y otros en el siglo XVII, la derivada como fluxión y diferencial fue utilizada por Newton y Leibniz, respectivamente. El desarrollo de la definición de derivada desde un enfoque algebraico vino de Lagrange en 1790, la definición en términos de límite e infinitesimales fue dada por Cauchy en 1820, la definición en términos de épsilon–delta fue dada por Weierstrasss en 1870 (Kleiner, 20012). La definición de Cauchy es:

> Cuando una función $y=f(x)$ permanece continua entre dos límites dados de la variable $x$, y cuando se asigna a dicha variable un valor encerrado entre los dos límites en problema, entonces un incremento infinitamente pequeño asignado a la variable produce un incremento infinitamente pequeño en la función misma. En consecuencia, si se pone $\Delta x=i$, los dos términos de la *razón de diferencias*
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$
>
> serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero aunque estos dos términos se acercarán al límite cero de manera indefinida y simultánea, la relación en sí misma puede converger hacia otro límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de $x$; pero varía con $x$ .... La forma de la nueva función que sirve como límite de la relación $[f(x+i)-f(x)]/i$ dependerá de la forma de la función propuesta $y=f(x)$. Para indicar esta dependencia, uno le da a la nueva función el nombre derivado de la función y la designa con la ayuda de un acento mediante la notación $y'$ o $f'(x)$. (Edwards, 1979, p. 313)

Como podemos observar en el marco del cálculo de Cauchy, los conceptos que surgen con mayor fuerza dejando a un lado al diferencial son el límite y la derivada, pasando de un lenguaje geométrico, característico de Leibniz, a un lenguaje algebraico y simbólico. Los términos infinitesimales y las cantidades infinitamente pequeñas se siguen utilizando en las prácticas matemáticas operativas y discursivas, pero desde otra perspectiva ya que involucran una trama de objetos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que permiten construir un nuevo significado parcial del diferencial.

### 3.4. El diferencial de Fréchet

Fréchet considera el diferencial, no solo para funciones reales de varias variables sino también para funcionales. Observa que la definición usual de diferencial tiene serios inconvenientes lógicos y pedagógicos, que se pueden evitar mediante una modificación de la definición. Con la definición usual se refiere a asumir solo la existencia de la primera derivada parcial, mientras que las limitaciones se refieren a los supuestos de continuidad (Taylor, 1974, p. 356).

Fréchet propone una definición geométrica, diciendo que $f(x, y)$ es diferenciable en $(x_0, y_0)$, con diferencial $df = p\Delta x + q\Delta y$ si la superficie $z = f(x, y)$ tiene un plano tangente no paralelo al eje z en dicho punto. La forma analítica de este requisito es que $\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ debe ser expresable como $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$. Donde Δ es la distancia, que puede ser la suma de valores absolutos de los incrementos, la distancia euclidiana, o el máximo de los valores absolutos de los incrementos, mientras que ε debe tender a cero cuando la distancia se aproxima a cero.

Geométricamente, el punto de vista diferencial tal como se hace en este marco conduce a una concepción de la tangente a una curva que no es la concepción clásica, esto es, la tangente en M como la posición límite de las secantes que pasan por M. Más bien es la siguiente: La tangente en M a la curva C asociada a la función f es la recta que mejor aproxima localmente a C; de manera más precisa, es la única recta que aproxima a C hasta un primer orden en las proximidades de M; o todavía: la tangente M a la curva C es la recta con la cual tiende a confundirse C cuando se amplía mediante zooms sucesivos en una vecindad de M (Alibert y Legrand, 1989, p. 113).

El diferencial de Fréchet, recupera características del diferencial de Cauchy, formulando una definición rigurosa sin necesitar de las cantidades infinitesimales, pero también presenta características del diferencial de Leibniz, porque recupera la idea de aproximación. De esta manera plantea López-Gay (2001) se lograr conciliar el rigor, que fue muy criticado y buscado por Leibniz y Newton; con una utilidad para resolver problemas físicos y geométricos.

### 3.5. El análisis no estándar de Robinson

Con los aportes de Weierstrass los infinitesimales perdieron su lugar en el cálculo pero en 1960 volvieron a resurgir como objetos matemáticos y definidos de manera rigurosa en el *análisis no estándar* desarrollado por el lógico matemático Abraham Robinson.

El cálculo desarrollado por Weierstrass y otros se basaba en el campo **R** ordenado y completo de los números reales, pero el análisis no estándar se basa en el campo **R*** ordenado, pero no completo, de los números hiperreales.

> **R*** es un campo de extensión de **R** en el que se pueden definir rigurosamente los infinitesimales: $\varepsilon\ \in$ **R*** es infinitesimal si $-a\ < \varepsilon\ < a$ para todos los positivos $a \in$ **R**. Por lo tanto, el único infinitesimal real es cero. El inverso de un infinitesimal distinto de cero es un número infinito (hiperreal). (Kleiner, 2012, p. 94)

El surgimiento del análisis no estándar fue posible, en parte, por los trabajos de Skolem sobre los modelos no estándar de aritmética y por la teoría de modelos de la lógica matemática, como lo menciona Robinson (1966, p. Vii):

> en el otoño de 1960 se me ocurrió que los conceptos y métodos de la lógica matemática contemporánea son capaces de proporcionar un marco adecuado para el desarrollo de Cálculo diferencial e integral mediante números infinitamente pequeños e infinitamente grandes.

Lo irónico de esta situación dice Kleiner (2012) es que los infinitesimales fueron excluidos del cálculo en el siglo XIX porque no presentaban una fundamentación lógica rigurosa, pero en el siglo XX se hicieron respetar, matemáticamente, gracias a la lógica.

El *teorema de parte estándar* desarrollado por Robinson menciona que "por cada número hiperreal finito $a$, existe exactamente un número real 'infinitamente cercano', denotado por $st(a)$. (Dos números hiperreales están infinitamente cercanos si su diferencia es infinitesimal)" (Kleiner, 2012, p. 96). Para calcular la derivada de una función $f(x)$ estándar se procede a calcular $f'\ (x) = st\{[f(x+\varepsilon) - f(x)]\ /\ \varepsilon\}$ siendo $\varepsilon$ un infinitesimal. En comparación con el procedimiento de Leibniz para el cálculo de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, y)$ por $\frac{dy}{dx}$, donde $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ que para la función $f(x) = x^2$ llegaría en el último paso a la expresión $2x + dx$ con lo cual la derivada se identificaría con $2x$. En cambio, en el análisis no estándar sería $f'(x) = st\{\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\}$ y para hallar la derivada de la misma función se llegaría a $st(2x + dx) = 2x$.

### 3.6. Conclusión

El concepto diferencial surge con Leibniz con las cantidades infinitamente pequeñas con un gran potencial por su utilización en la resolución de situaciones–problemas matemáticos como el cálculo de la tangente, longitud de arco, cuadraturas, superficies y volúmenes, pero también se presenta como una herramienta por excelencia por su gran desarrollo en el campo de las ciencias experimentales, en especial, en la física (Pulido, 1997; López-Gay et al., 2015).

Se puede observar que en este estudio histórico–epistemológico los lenguajes utilizados para trabajar con los diferenciales fueron: natural, geométrico, algebraico y simbólico ( $o, \Delta,\ d, dx, dy$). Los términos y conceptos que permiten identificar al diferencial son: diferencia, incremento pequeño, infinitamente pequeño, aproximación, aproximación lineal, estimación lineal e infinitesimal.

Con el surgimiento y consolidación del concepto de límite y número real, los infinitesimales perdieron su estatus dentro del cálculo en las matemáticas, pero no fueron desterrados porque siempre estuvieron presentes en las aplicaciones en las ciencias experimentales (Pulido, 1997).

# Capítulo 4

## ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LOS SIGNIFICADOS DEL DIFERENCIAL

### 4.1. Introducción

En este capítulo presentamos el análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas operativas y discursivas, que se utilizan para resolver una situación-problema en la cual intervienen conceptos y técnicas del cálculo diferencial. La configuración de prácticas, objetos y procesos que se ponen en juego en la solución de un tipo de problema, en la que interviene de manera esencial el concepto de diferencial, constituye el significado pragmático parcial de dicho objeto matemático. No obstante, en dichas prácticas intervienen además otros objetos conceptuales, lingüísticos, procedimentales, proposicionales y argumentativos cuya identificaciones son importantes para reconstruir la trama de funciones semióticas en la que el concepto de diferencial participa.

El análisis de los significados del diferencial y sus relaciones con los conceptos fundamentales del Cálculo, como la derivada y la integral, se realiza fijando la atención en los sistemas de prácticas que se realizan para resolver un problema específico en los marcos conceptuales elaborados por Leibniz, Cauchy, Fréchet y Robinson. El problema específico que hemos elegido es el siguiente:

Problema: *¿Cómo trazar la tangente a la parábola $y = x^2$ en un punto $P$ de la curva?*

### 4.2. Significado del diferencial en Leibniz

En el Cálculo de Leibniz una curva (cerrada) se concibe como un polígono de infinitos ángulos con un número infinito de lados de longitud infinitesimal, cada uno de los cuales coincide con una línea tangente a la curva. La secuencia básica de variables asociadas con la curva son las secuencias de abscisas $x$ y ordenadas $y$ de los infinitos vértices de este polígono.

> La diferencia de dos valores sucesivos de $x$ es la diferencial $dx$, y similarmente para $dy$. Se supone que las cantidades $dx$ y $dy$ no son cero sino incomparablemente pequeñas, y por lo tanto despreciables, con respecto a los valores de las variables $x$ e $y$. Del mismo modo, se supone que un producto de los diferenciales, como $(dx)(dy)$ o $(dx)^2$, es a su vez despreciable en comparación con los diferenciales $dx$ y $dy$. (Edwards, 1979, p. 261)

Apoyándonos en las descripciones que hacen Bos (1974), Edwards (1979) y Pulido (1997), entre otros autores, de los conceptos y procedimientos que introdujo Leibniz para abordar los problemas del Cálculo, consideramos que la solución del problema de la tangente fue abordado según la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

***Solución geométrica.***

**P1.** Se considera a la curva $y = x^2$, junto con el eje de abscisas y la ordenada en $x = 1$, como un *polígono infinitoangular*, es decir, un polígono con un número infinito de lados (Figura 4.1)

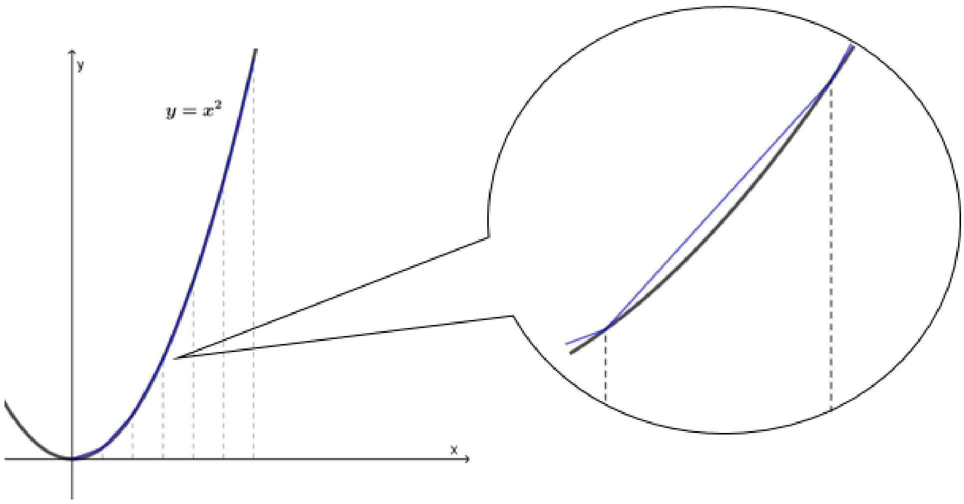


*Figura 4.1*. La curva como línea infinito-poligonal

**P2.** "Encontrar una tangente es dibujar una línea recta que une dos puntos de la curva que tienen una distancia infinitamente pequeña, es decir, el lado prolongado del polígono infinitoangular que para nosotros es lo mismo que la curva" (Leibniz, 1684, p. 223, citado en Bos, 1974, p. 19). (Figura 4.2)

**P3.** En la curva $y = x^2$ consideramos un lado $PQ$ del polígono infinitoangular, donde P y $Q$ son dos puntos próximos cuya distancia es infinitamente pequeña. Al prolongar el lado $PQ$ se determinan nuevas cantidades geométricas variables como la subtangente $\sigma = AT$ y la tangente $\tau = PT$ (Figura 4.2).

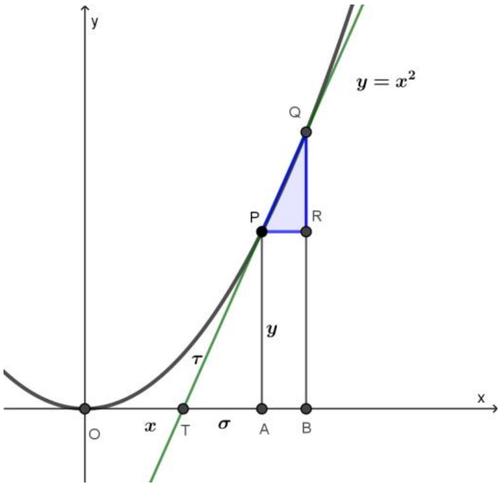


*Figura 4.2*. Prolongación del lado $PQ$ para determinar la subtangente $\tau = TA$

**P4**. En el triángulo $PRQ$ los lados $PR, QR$ y $PQ$ representan los incrementos o diferencias $\Delta x$, $\Delta y$ y $\Delta s$, respectivamente. $PQ$ es un lado del polígono infinitoangular cuya longitud es infinitamente pequeña. El triángulo $PRQ$ se denomina *triángulo característico o diferencial* de lados $dx, dy$ y $ds$ (Figura 4.3)

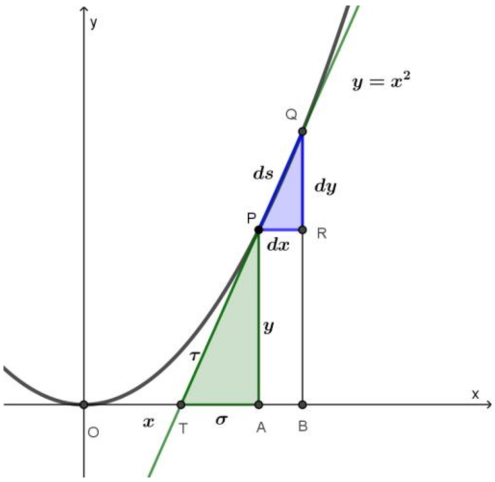


*Figura 4.3*. Triángulo diferencial de lados $dx, dy$ y $ds$

**P5.** Los triángulos $PRQ$ (triángulo diferencial) y el $TAP$, determinado por la subtangente $\sigma$, la tangente $\tau$ y la ordenada $y$, son semejantes porque las hipotenusas están sobre la misma recta, los catetos correspondientes son paralelos y los ángulos correspondientes congruentes (Figura 4.3). Por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales: $dx : dy : ds = \sigma : y : \tau$,

**P6.** $dy$ es el cuarto proporcional entre la subtangente, la ordenada y $dx$, es decir

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$, siendo la subtangente $AT = \sigma$

**P7.** A partir de la ecuación (1) se obtiene $AT = y\frac{dx}{dy}$. Conocido AT es posible ubicar el punto T.

**P8.** La tangente a la curva por el punto P se obtiene trazando la recta que pasa por los puntos P y T.

***Solución algebraica.***

**P9.** Para el caso de la curva $y = x^2$, los puntos infinitamente próximos P y Q se relacionan de la siguiente manera $y + dy = (x + dx)^2$; esto es, $y + dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2$

**P10.** Como se observa en la Figura 4.3 la diferencia de las ordenadas de los puntos Q y R viene dada por $dy = (x + dx)^2 - x^2$. Desarrollando el cuadrado del binomio y cancelando los términos $x^2$ resulta $dy = 2xdx + (dx)^2$. Luego se obtiene (2) $dy = 2xdx$, considerando que $(dx)^2 = 0$.

**P11.** De la expresión (2) se deduce que $dx = \frac{1}{2x}dy$. Al multiplicar ambos miembros por $y$, y dividimos por $dy$, se obtiene: (3) $y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2x}$

**P12.** El primer miembro de (3) representa la subtangente AT y el último, la expresión algebraica que permite calcular su valor en términos de cantidades conocidas y ubicar el punto T.

**P13.** La recta tangente a la curva por el punto P se obtiene trazando la recta que pasa por los puntos P y T.

En la tabla 4.1 incluimos, para la secuencia de prácticas P1 a P8 indicadas anteriormente, el uso o intencionalidad de cada una de ellas en el proceso de resolución del problema, como así también los objetos matemáticos que se ponen en juego. Esta configuración de prácticas y objetos constituye el significado sistémico-pragmático del concepto de diferencial en el marco del cálculo infinitesimal de Leibniz, para el caso de la solución geométrica. La tabla 4.2 incluye la configuración correspondiente para la solución algebraica.

Tabla 4.1

*Análisis ontosemiótico de la solución geométrica del problema de la tangente (en el marco del cálculo de Leibniz)*

| Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea | Uso e intencionalidad de las prácticas | Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) |
|---|---|---|
| P1 | Visualizar la curva como un polígono de infinitos lados. Construir el "polígono infinitoangular" | *Lenguajes:* natural, geométrico-cartesiano, simbólico<br>*Conceptos:* curva, ecuación, eje de abscisas y ordenada, polígono infinitoangular.<br>*Procedimientos:* trazar la poligonal sobre la curva considerando puntos sucesivos cuya distancia es infinitamente pequeña.<br>*Argumentos:* la curva como línea infinito-poligonal |
| P2 | Explicitar cuál es el procedimiento para hallar la tangente a la curva en punto. | *Lenguaje:* natural.<br>*Conceptos:* (...); tangente, línea recta, puntos infinitamente próximos, magnitud longitud (distancia), prolongación.<br>*Procedimientos:* trazar una tangente es unir dos puntos sucesivos de la curva con distancia infinitamente pequeña y prolongar el lado del polígono infinitoangular<br>*Argumentos:* se aplica la definición de recta tangente a la curva. |
| P3 | Determinar los segmentos tangente $\tau$ y subtangente $\sigma$ a la curva en el punto P | *Lenguajes:* (…); notaciones: $\sigma, \tau$, 'cantidades geométricas variables'.<br>*Conceptos:* (…); subtangente, cantidad geométrica variable.<br>*Procedimientos:* prolongar el lado PQ del polígono infinitoangular para obtener la subtangente $\sigma = AT$ y al tangente $\tau = PT$.<br>*Argumentos:* se aplica la definición de tangente y subtangente como segmentos determinados por la recta tangente sobre los ejes. |
| P4 | Definir y representar el triángulo característico o diferencial de lados $dx, dy$ y $ds$ | *Lenguajes:* (…); notaciones: $\Delta x, \Delta y, \Delta s, dx, dy, ds$ y 'triángulo característico o diferencial'.<br>*Conceptos:* (…); triángulo diferencial, incrementos o diferencias, diferenciales.<br>*Procedimientos:* Representación del triángulo diferencial. |
| P5 | Establecer la relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo diferencial y el triángulo formado por la subtangente, ordenada y tangente. | *Lenguaje:* (…); representación de igualdad de razones: $dx: dy: ds = \sigma: y: \tau$)<br>*Conceptos:* (…); triángulos semejantes, hipotenusa, catetos, paralela, ángulos correspondientes, congruencia de ángulos, razones y proporción.<br>*Proposiciones:* P1: "el triángulo diferencial y el triángulo TAP formado por la subtangente, ordenada y tangente son semejantes";<br>P2: "las razones entre los lados correspondientes de los triángulos diferencial y TAP son iguales $dx: dy: ds = \sigma: y: \tau$" |

| | | |
|---|---|---|
| | | *Argumentos:* relación de congruencia de ángulos y paralelismo de lados. Corolario del Teorema de Tales. |
| P6 | Establecer la ecuación proporcional $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$ | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (…); cuarto proporcional y ecuación proporcional.<br>*Proposiciones:* "$dy$ es el cuarto proporcional entre la subtangente, la ordenada y $dx$"<br>*Procedimientos* (conversión lenguaje natural a simbólico)*:* $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$<br>*Argumentos:* por la semejanza de triángulos. |
| P7 | Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{AT}$ para hallar la subtangente AT | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (…).<br>*Proposiciones:* $AT = y\frac{dx}{dy}$<br>*Procedimientos:* resolución de la ecuación proporcional.<br>*Argumentos:* propiedad fundamental de las proporciones. |
| P8 | Trazar la tangente PT a partir de hallar la subtangente AT | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (…).<br>*Proposiciones: "*por los puntos P y T pasa la recta tangente a la curva en el punto P".<br>*Procedimientos:* trazamos la recta tangente uniendo los puntos P y T.<br>*Argumentos:* definición de tangente; por dos puntos paso una sola recta. |

En el sistema de prácticas P1 a P8 se llevan a cabo procesos de interpretación y significación de los diferentes términos y simbolizaciones que se usan, destacando el concepto de "puntos infinitamente pequeños", "cantidades geométricas variables", la curva como "polígono infinitoangular", la tangente a la curva como recta que une dos puntos infinitamente próximos de la curva, empelando un lenguaje natural, geométrico y simbólico.

Como procesos de conceptualización destacan la definición de triángulo diferencial y los correspondientes elementos diferenciales $dx$, $dy$ y $ds$ como cantidades de longitud infinitamente pequeñas. Los diferenciales intervienen en procesos de algoritmización o cálculo una vez establecida la ecuación proporcional que relaciona las cantidades de magnitud geométrica, en este caso longitudes de segmentos.

Los argumentos que se utilizan provienen de la consideración de la curva como un polígono de infinitos lados, lo que permite determinar el triángulo diferencial y la semejanza con el triángulo formado por la subtangente, la ordenada y la tangente. A partir de establecer la semejanza entre los triángulos se establece las ecuaciones proporcionales que permiten hallar el valor de la subtangente AT y encontrar la tangente PT.

Tabla 4.2

*Análisis ontosemiótico de la solución algebraica del problema de la tangente (en el marco del cálculo de Leibniz)*

| Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea | Uso e intencionalidad de las prácticas | Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) |
|---|---|---|
| P9 | Establecer la relación entre los puntos P y Q, y la curva $y = x^2$ | *Lenguajes:* algebraico, simbólico y expresiones: $x + dx, y + dy, (dx)^2$<br>*Conceptos:* curva, ecuación, puntos, longitud infinitesimal, diferencial, diferencial de segundo orden.<br>*Proposiciones*: P1: "los puntos infinitamente próximos P y Q se relacionan de la siguiente manera $y + dy = (x + dx)^2$", P2: "la diferencia de la ecuación es $y + dy = x^2 + 2xdx + (dx)^2$"<br>*Procedimientos:* se incrementan las variables $x$ e $y$ en una cantidad infinitamente pequeña $dx$ y $dy$, respectivamente; desarrollo del binomio.<br>*Argumentos:* correspondencia entre las variables, donde un incremento infinitesimal $dx$ en $x$ produce un incremento infinitesimal $dy$ en $y$ |
| P10 | Determinar el $dy$ como la diferencia de las ordenadas de los puntos Q y R. | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (…); diferencia de ordenadas, cuadrado de un binomio, propiedad cancelativa.<br>*Proposiciones*: P1: "la diferencia de las ordenadas de los puntos Q y R es $dy = (x + dx)^2 - x^2$; P2: "los diferenciales de orden superior se reemplazan por cero".<br>*Procedimientos:* plantear que el $dy$ como la diferencia de las ordenadas y luego de resolver el cuadrado del binomio; reemplazar $(dx)^2 = 0$<br>*Argumentos: "*La diferencia de dos valores sucesivos de $x$ es la diferencial $dx$, y similarmente para $dy$*;* $(dx)^2$ es despreciable en comparación con los diferenciales $dx$ y $dy$" (Edwards, 1979, p. 261) |
| P11 | Manipular algebraicamente la ecuación $dy = 2xdx$ para escribirla como $y\frac{dx}{dy}$ (expresión de la subtangente AT) | *Lenguajes:* (…); expresiones: $y\frac{dx}{dy}$<br>*Conceptos:* (…); segmento y subtangente.<br>*Procedimientos:* primero se despeja $dx$, luego se multiplica por $y$ y se divide por $dy$ para obtener la expresión $y\frac{dx}{dy}$ Por último se reemplaza la ecuación de la curva.<br>*Argumentos:* multiplicación y división a ambos miembros de la ecuación. $y\frac{dx}{dy}$ es la expresión de la subtangente |

| | | |
|---|---|---|
| P12 | Reconocer la expresión de la subtangente | *Lenguaje:* natural.<br>*Conceptos:* (…).<br>*Proposiciones*: "la expresión de la subtangente es $y\frac{dx}{dy}$"<br>*Procedimientos:* calcular el valor de la subtangente AT para ubicar el punto T. |
| P13 | Trazar la recta tangente | *Lenguaje:* geométrico.<br>*Conceptos:* (…); recta y tangente.<br>*Proposiciones*: enunciado de la P13<br>*Procedimientos:* trazado de la recta que pasa por dos puntos.<br>*Argumentos:* secuencia de prácticas P9 a P12. |

En el sistema de prácticas, realizadas en la solución algebraica, se destaca el papel algorítmico desempeñado por el lenguaje algebraico; los elementos diferenciales $dx$, $dy$ intervienen como cantidades infinitesimales como si fueran datos conocidos con los que se puede operar.

Se destaca en P9 el procedimiento de "diferencia de la ecuación" en el cual intervienen una proposición fundamental en el cálculo de Leibniz "un incremento infinitesimal $dx$ en $x$, produce un incremento infinitesimal $dy$ en $y$" (Martínez-Torregrosa et al., 2002). En P10 se asume como verdadera otra proposición fundamental, P2: "Las diferencias de orden superior se reemplazan por cero". Estas proposiciones junto con el aparato algebraico desarrollado por Leibniz que se presentan en los procedimientos, caracterizan la manera en el cual eran utilizados los diferenciales.

Los procedimientos algebraicos utilizados para hallar la expresión de la subtangente AT como $y\frac{dx}{dy}$ permiten identificar la trama de objetos y procesos que intervienen para determinar la tangente PT a la curva en el punto P.

Observamos en los sistemas de prácticas matemáticas en el marco del cálculo de Leibniz, la utilización de un lenguaje natural, geométrico, algebraico y simbólico. Siendo este último, una de sus principales características por su persistencia en el tiempo. (Edwards, 1979; Bos, 1974; Kleiner, 2012; Pulido, 1997; Martínez-Torregrosa et al., 2002). El lenguaje geométrico se caracteriza por la utilización de los conceptos como cantidades geométricas variables, es decir, considerar a las variables como cantidades o magnitud. La utilización del triángulo diferencial para el cálculo de la subtangente y la tangente a una curva, la cual era considerada como un polígono de infinitos lados infinitamente pequeño.

El lenguaje algebraico se caracteriza por el procedimiento del cálculo de la subtangente y la tangente por medio de la diferencia de la ecuación de la curva, considerando que los diferenciales de orden dos son insignificantes o despreciables en comparación con *dx* y *dy*. (Edwards, 1979; Bos, 1974). La simbología introducida para denotar las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales son *dx* y *dy*, para las variables *x* e *y*, respectivamente; las cuales continúan siendo utilizadas en la actualidad.

Los sistemas de prácticas de la solución geométrica y algebraica permiten identificar un significado del concepto de diferencial, el diferencial de Leibniz, a partir del análisis ontosemiótico realizado identificando los objetos que intervienen y emergen en la resolución de la situación-problema del cálculo de la tangente a una curva en un punto.

### 4.3. Significado del diferencial en Cauchy

Cauchy definió la diferencial como una expresión construida a partir de la derivada: $df = f'(x) \cdot dx$, siendo $dx$ un incremento arbitrario de la variable y pasó a convertirse así en un simple instrumento formal, necesario para justificar y abreviar ciertas demostraciones. Se desprendió, entonces, a la diferencial de la ambigüedad de los infinitamente pequeños, pero al mismo tiempo quedó desprovista de cualquier significado físico o intuitivo propio: simplemente era el producto de la derivada por el incremento de la variable independiente (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

De manera específica incluimos a continuación la definición que aparece en Cauchy (1823, p. 13):

> Sea *y=f(x)* una función de la variable independiente *x*, *i* una cantidad infinitamente pequeña, y *h* una cuantidad finita. Si se plantea que *i* = *αh*, *α* será todavía una cantidad infinitamente pequeña, y se tendrá idénticamente
>
> $$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$
>
> De donde se concluirá
>
> $$(1) \quad \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h$$
>
> El límite hacia el cual converge el primer miembro de la ecuación (1), cuando la variable $\alpha$ se aproxima indefinidamente a cero y la cantidad $h$ permanece constante, es lo que se llama la diferencial de la función $y = f(x)$. Esta diferencial se indica por la característica *d*, de donde se sigue: $dy$ o $df(x)$. Es fácil obtener su valor cuando se conoce el de la función derivada $y'$ o $f'(x)$. En efecto, tomando los límites en los dos miembros de la ecuación (1) se encuentra (2) $df(x) = hf'(x)$. En el caso particular donde $f(x) = x$, la ecuación (2) se reduce a

(3) $dx = h.$

Así, la diferencial de la variable independiente $x$ no es otra cosa que la constante finita $h$. Por tanto, la ecuación (2) viene a ser

(4) $df(x) = f'(x).dx.$

o lo que viene a ser lo mismo,

(5) $dy = y'\,dx.$

El cálculo de Cauchy se caracteriza principalmente por la consideración de las cantidades como variables, a diferencia de Leibniz que consideraba a las cantidades geométricas variables como una cantidad infinitamente pequeña, menor que cualquier cantidad finita pero no nula (Kleiner, 2012). Para Cauchy (1821) "una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña, cuando su valor numérico disminuye indefinidamente para converger hacia el límite cero" (p. 26). Una cantidad infinitamente pequeña, denotada por α o $i$, es "una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente" (Cauchy, 1821, p. 27).

En Cauchy (1823, pp. 23-24) encontramos la siguiente explicación del problema de la tangente a una curva, que describe como determinar la inclinación de una curva en un punto. Para hacer un análisis de los tipos de objetos y procesos que pone en juego en la solución del problema dividimos la explicación dada por Cauchy en prácticas elementales:

**P1.** Consideremos la curva que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $y = f(x)$.

**P2.** En esta curva, la cuerda trazada desde el punto $(x, y)$ al punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, forma, con el eje de las $x$ prolongado en el sentido de las $x$ positivas, dos ángulos, uno agudo, el otro obtuso, donde el primero mide la inclinación de la cuerda, con respecto al eje de las $x$.

**P3.** Si el segundo punto se aproxima una distancia infinitamente pequeña del primero, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente trazada a la curva por el primer punto;

**P4.** y la inclinación de la cuerda, con relación al eje de las $x$, vendrá a ser la inclinación de la tangente, o lo que se llama *la inclinación de la curva* respecto al mismo eje.

**P5.** Planteado así, como la inclinación de la cuerda tendrá por tangente trigonométrica el valor numérico de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es claro que la inclinación de la curva tendrá por tangente trigonométrica el valor numérico del límite hacia el cual converge esta razón, es decir, de la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$.

**P6.** Si el valor de $y'$ es nulo o infinito, la tangente a la curva será paralela o perpendicular al eje de las $x$. Cuando es paralela, la ordenada $y$ viene a ser un máximo o un mínimo.

En la tabla 4.3 se presenta, la secuencia de prácticas de P1 a P6, el uso e intencionalidad de cada una de ellas en el proceso de resolución del problema, y los objetos matemáticos que entran en escena, para la solución del problema de la tangente. Esta configuración de prácticas y objetos constituye el significado sistémico-pragmático del concepto de diferencial en el marco del Cálculo de Cauchy.

Tabla 4.3
*Análisis ontosemiótico de la solución del problema de la tangente (en el marco del cálculo de Cauchy)*

| Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea | Uso e intencionalidad de las prácticas | Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) |
|---|---|---|
| P1 | Identificar a la curva por su ecuación $y = f(x)$ | *Lenguajes:* natural, geométrico, algebraico y funcional $y = f(x)$. *Conceptos:* curva, ecuación y coordenadas rectangulares. |
| P2 | Identificar el ángulo que mide la inclinación de la cuerda en el punto $(x, y)$ | *Lenguajes:* (…); simbólico $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ *Conceptos:* (…); cuerda, punto, incrementos, ejes coordenados, sentido positivo del eje, prolongación, ángulos (agudo y obtuso) e inclinación (magnitud amplitud angular). *Proceso de definición de inclinación de una cuerda:* el ángulo agudo formado entre la cuerda y el eje $x$ prolongado mide la inclinación de la cuerda. *Procedimientos:* trazado de la cuerda a partir de dos puntos de la curva. |
| P3 | Identificar la tangente con la cuerda cuando la distancia entre los puntos es infinitamente pequeña | *Lenguajes:* (…); expresiones: ‘infinitamente pequeño’, ‘confundirá sensiblemente’. *Conceptos:* (…); distancia infinitamente pequeña, inclinación de la cuerda y tangente. *Proposiciones*: “si la distancia entre los puntos es infinitamente pequeña, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente a la curva y la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente.” *Argumentos:* Una cantidad infinitamente pequeña es “una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente” (Cauchy, 1821, p. 27). Cuando los puntos difieren en un infinitesimal, la cuerda se convierte en la tangente a la curva, de la misma forma |
| P4 | Identificar la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente | |

| | | |
|---|---|---|
| | | que la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente. |
| P5 | Identificar a la inclinación de la curva con la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ | *Lenguajes:* (…); expresiones simbólicas: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{dy}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dx}$<br>*Conceptos:* (…); tangente trigonométrica, razón, valor numérico, límite, convergencia, función derivada, diferenciales y cociente de diferenciales<br>*Proposiciones*: P1: "la inclinación de la cuerda se obtiene por el valor numérico de la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$"; P2: "el valor numérico del límite hacia el cual converge la tangente trigonométrica es la inclinación de la cuerda, es decir, la función derivada"<br>*Procedimientos:* se evoca el cálculo del límite de la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para determinar la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$<br>*Argumentos:* la tangente trigonométrica se define como la razón de los incrementos, es decir, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. El límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ |
| P6 | Reconocer un máximo o un mínimo y la posición de la recta tangente por medio del valor que toma función derivada $y'$ | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (…); paralela, perpendicular, ordenada, máximo, mínimo, nulo e infinito.<br>*Proposiciones*: P1: "si el valor de $y'$ es nulo, la tangente a la curva es una recta paralela al eje x y es un punto máximo o mínimo"; P2: "si el valor de $y'$ es infinito, la tangente a la curva es perpendicular" |

En el sistema de prácticas desarrolladas en el marco del cálculo de Cauchy, se observa que el lenguaje empleado es geométrico, algebraico y funcional, donde se emplean conceptos y términos, como inclinación, cuerda, curva, tangente, infinitamente pequeño, tangente trigonométrica, límite, convergencia, razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada.

Estos conceptos son utilizados en el proceso de definición de la inclinación de la tangente y de la curva a partir de la inclinación de la cuerda, cuando los puntos que la definen se aproximan infinitamente y la distancia que los separa es una variable que tiene por límite cero.

Como proposición se plantea que la inclinación de la cuerda es medida mediante la razón entre incrementos, denominado tangente trigonométrica; y como procedimiento de cálculo se realiza el proceso de paso al límite que da lugar a la derivada de la función en el punto $(x, y)$. Los diferenciales aparecen como mera representación alternativa de la derivada.

Los argumentos que validan los procedimientos y proposiciones son la definición de inclinación de la curva, la tangente trigonométrica como la razón de los incrementos, el límite y la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas como una variable cuyo límite es cero, la función derivada como límite de la razón de incremento, y la igualdad entre la función derivada y el cociente de diferenciales.

El análisis ontosemiótico realizado permite identificar el significado del diferencial de Cauchy a partir de la configuración de prácticas y objetos que intervienen en la resolución del cálculo de la inclinación de la curva. El concepto de diferencial pasa a un segundo plano con Cauchy, debido a que la introducción de los límites permitió el paso de la razón de incrementos a la función derivada, colocando al cociente de diferenciales como expresión equivalente a la derivada. Donde antes eran necesario los diferenciales para hallar la tangente, ahora ya no lo son.

### 4.4. Significado del diferencial en Fréchet

Según Artigue & Viennot (1987), el diferencial fue definido como una función lineal, por primera vez por M. Fréchet en 1911, en el marco del desarrollo del análisis funcional. De hecho, la definición que introduce de diferencial rehabilita la vieja idea de aproximación que había predominado al comienzo del cálculo, pero había sido puesta a un lado después por razones de falta de rigor. La idea de función lineal y aproximación queda patente en la definición de diferencial de Fréchet:

> "Una función $f(x, y, z, t)$ admite una diferencial en el punto $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ si existe una función lineal y homogénea de los incrementos, o sea: $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + D\Delta t$, que no difiere del incremento de la función $\Delta f$ a partir del valor $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$ nada más que en un valor infinitamente pequeño respecto a la distancia $\Delta$ de los puntos $(x_0, \ldots, t_0)$ y $(x_0 + \Delta x\ \ldots, t_0 + \Delta t)$. La diferencial entonces es por definición: $df = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + D\Delta t$."
>
> Esta definición se expresa por la fórmula $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ donde ε tiende a cero cuando Δ tiende a cero. (Fréchet, 1911, citado en Artigue, 1989, p. 34)

La definición de Fréchet no requiere que el diferencial sea infinitamente pequeño, sino que $\Delta f - df$ es infinitamente pequeño respecto $\Delta$; esto no significa que $(\Delta f - df)$ será siempre un número muy pequeño, o incluso menos que $\Delta f$ o $df$ sean pequeños. El requisito que se plantea es que $(\Delta f - df)$ tienda a cero más rápidamente que $\Delta$, esto es que el límite de $(\Delta f - df)/\Delta$ es cero cuando $\Delta$ tiende a cero. Esto quiere decir que $df$ es una función lineal homogénea de los incrementos, y se puede expresar al $\Delta f$ de la siguiente manera: $df + \varepsilon.\Delta$, donde $\lim_{\Delta\to 0} \varepsilon = 0$ (Martínez-Torregrosa et al., 2006, p. 456).

De esta manera, el diferencial de Fréchet se define como la estimación lineal del incremento respecto al cambio de variable. Se entiende que el diferencial es una función que puede tomar cualquier valor y su expresión diferencial va a estar sujeta a la condición de que $(\Delta f - df)$ sea infinitamente pequeña respecto a $\Delta x$. Esto quiere decir que $df$ no es infinitamente pequeño, sino que la diferencia entre el incremento y el diferencial es infinitamente pequeño respecto a $\Delta x$ (López-Gay, 2001).

Sabiendo que el diferencial se define como una aplicación lineal, resulta necesario destacar que la función diferencial $df$ es una función de dos variables (Martínez-Torregrosa et al., 2002; Rabuffetti, 1987) ya que depende del punto $x = a$ y del diferencial de $x$, cuya notación es: $df(a, dx) = f'(a)dx$

Problema: Hallar una aplicación lineal homogénea que aproxima a la función $y = x^2$ en el punto $a$ de tal modo que el error que se comete en la estimación, relativo al incremento $\Delta x$ de la variable $x$, es infinitamente pequeño respecto de dicho incremento.

***Solución:***

**P1.** Dada la función $f: A \to R$ tal que $f(x) = x^2$, se busca una aplicación lineal y homogénea que aproxime $f(x) = x^2$ en el punto $a$, de tal manera que el error que se produce con la estimación respecto al incremento $\Delta x$ de la variable $x$ sea infinitamente pequeño respecto del incremento $\Delta x$.

**P2.** El incremento de la función $f(x) = x^2$ en el punto $a$ respecto del incremento $\Delta x$ es $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2$

**P3.** Luego tenemos que $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a)dx + \varepsilon dx$ con $f'(a) = 2a$.

**P4.** Entonces, si $\varepsilon$ tiende a cero cuando $\Delta x$ tiende a cero, el $\Delta f \approx f'(a)dx$, es decir $\Delta f \approx 2adx$ en el punto $a$.

**P5.** La aplicación lineal y homogénea que aproxima al incremento de la función en el punto $a$ respecto al incremento $\Delta x$ es la función $df(a) = 2adx$

En la tabla 4.4 se presentan, la secuencia de prácticas de P1 a P5, el uso e intencionalidad de cada una de ellas en el proceso de resolución del problema, y los objetos matemáticos primarios que intervienen en la resolución del problema. Esta configuración de prácticas y objetos constituye el significado sistémico-pragmático del concepto de diferencial en el marco de Fréchet.

Tabla 4.4

*Análisis ontosemiótico de la solución del problema de la tangente (en el marco del diferencial Fréchet)*

| Secuencia de prácticas matemáticas para resolver la tarea | Uso e intencionalidad de las prácticas | Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) |
|---|---|---|
| P1 | Plantear las condiciones que tiene que cumplir la función que aproxime al incremento de $f(x) = x^2$ en un punto $a$ respecto al incremento de $x$ | *Lenguajes:* natural, geométrico, algebraico, simbólico: $f\colon A \to R$ , $f(x) = x^2$, $\Delta x$, y términos: 'aproximación', 'estimación', 'infinitamente pequeño', 'incremento' y 'error'<br>*Conceptos:* función, variable, punto, aplicación lineal y homogénea, aproximación o estimación, incremento, error, infinitamente pequeño. |
| P2 | Identificar el incremento de la función en el punto $a$ respecto al incremento $\Delta x$ | *Lenguajes:* (…).<br>*Conceptos:* (…).<br>*Procedimientos:* planteo del incremento de la función $f$ como $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$<br>*Argumentos:* definición de función |
| P3 | Definir el incremento de la función como la suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$ y un $\varepsilon$ que es infinitamente pequeño respecto a $\Delta x$ | *Lenguajes:* (…).<br>*Conceptos:* (…); límite, derivada,<br>*Proposiciones:* P1: "$\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$"; P2: "$df = f'(a)dx$ es una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$"; P3: "$\Delta x = dx$"<br>*Procedimientos:* calcular la derivada de $f$ y reemplazar en el $\Delta f$.<br>*Argumentos:* definición del diferencial como una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$; definición del incremento de la función como $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ donde ε tiende a cero cuando Δ tiende a cero (Fréchet, 1911); cálculo de derivada. |
| P4 | Identificar que el incremento de la función es aproximadamente igual al diferencial de la función cuando $\varepsilon$ tiende a cero. | *Lenguajes:* (…), símbolo: ≈ 'aproximadamente igual'.<br>*Conceptos:* (…), límite, aproximadamente igual.<br>*Proposiciones:* P1: "$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_a(\Delta x) = 0$";<br>P2: "$\Delta f \approx f'(a)dx$"<br>*Procedimientos:* cálculo de límite<br>*Argumentos:* definición de límite. |
| P5 | Identificación del $df$ con la aplicación lineal y homogénea que aproxima el incremento de la función. | *Lenguajes:* (…).<br>*Conceptos:* (…).<br>*Proposiciones:* P1: "$\Delta f \approx df$";<br>P2: "$df = f'(a)dx$".<br>*Argumentos:* definición del diferencial |

Los sistemas de prácticas matemáticas de P1 a P5 permiten caracterizar el significado del diferencial de Fréchet, donde se utiliza los lenguajes natural, geométrico, algebraico y simbólico. Los conceptos y términos que emergen de las prácticas son:

aplicación lineal y homogénea, función, variable, incremento, aproximación, estimación, error, infinitamente pequeño, límite y derivada.

Los enunciados y proposiciones que se realizan sobre los conceptos y definiciones son:

P1: "$\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$" (el incremento de la función se puede escribir como una suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$ y una función $\varepsilon$ que tiende a cero cuando $\Delta x$ tiende a cero).

P2: "$df = f'(a)dx$ es una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$"

Los procedimientos que se emplean para determinar la aplicación lineal y homogénea que aproxime al incremento de la función provienen del cálculo de límites y derivadas. En cuanto a los argumentos que validan los procedimientos y proposiciones se utilizan la definición de función, límite, incremento de la función $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ y el diferencial como una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$.

El análisis ontosemiótico realizado sobre las configuración prácticas y objetos que intervienen y emergen en la resolución del problema permite identificar un significado del concepto de diferencial, el diferencial de Fréchet, que se caracteriza por las formas en que interaccionan los objetos matemáticos identificados en la solución.

### 4.5. Significado del diferencial en el análisis no estándar

El análisis no-estándar desarrollado por Robinson (1966) mostró que es posible definir los conceptos fundamentales del análisis (continuidad, diferenciación, integración, etc.) en términos de infinitesimales, en lugar de tener que usar necesariamente el concepto de límite, lo cual conecta esta teoría matemática con la aproximación histórica al cálculo infinitesimal de Leibniz.

Una idea central es construir una ampliación del conjunto R de los números reales a *R (conjunto de números hiperreales), que incluye como nuevos elementos números infinitamente pequeños e infinitamente grandes, considerados como números hiperreales. Como estructura algebraica es un cuerpo no arquimediano y métricamente incompleto que contiene al conjunto arquimediano y completo identificable con los números reales.

Robinson (1966 p. 56) define de la siguiente manera los números hiperreales infinitésimos e infinitos:

> Un número $a$ ϵ*R se llamará infinitesimal o infinitamente pequeño si $|a| < m$ para todo número positivo $m$ ϵ R. Según esta definición, 0 es infinitesimal. …Un número $r$ ϵ*R, $r \neq 0$, es infinitesimal si y solo si $r^{-1}$ es infinito. Si $a$–$b$ es infinitesimal, entonces decimos que $b$ está infinitamente próximo a $a$, y se escribe $a \simeq b$. Esto es, dos hiperreales $x$, $y$ ϵ*R son infinitamente cercanos (notación: $x \simeq y$), $x \simeq y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)\ |x - y| < 1/n$

El cuerpo *R proporciona un marco para el desarrollo del cálculo diferencial e integral mediante los números hiperreales infinitamente pequeños e infinitamente grandes.

> Obviamente, el uso de los infinitesimales en el análisis no-estándar recuerda al cálculo infinitesimal de Leibniz, y el análisis no-estándar se puede considerar por los matemáticos actuales como una rehabilitación del uso de las cantidades infinitamente pequeñas de Leibniz. Esta visión es fuertemente defendida por Robinson. (Bos, 1974, p. 82)

No obstante, Bos (1974) no comparte plenamente la opinión de Robinson. Para probar su valor como una teoría matemática el cálculo de Leibniz no necesita un ajuste a los requisitos de aceptabilidad de las matemáticas del siglo XX mediante una reformulación en términos del análisis no-estándar. Considera, además que ambas teorías difieren sustancialmente. Un aspecto fundamental en que ambas teorías difieren se refiere a la concepción del conjunto de infinitesimales. Leibniz y la mayoría de sus seguidores concibieron que el conjunto de infinitesimales estaba constituido de sucesivos órdenes de pequeñez infinita. Así, si $dx$ era un diferencial de primer orden, entonces todos los diferenciales de primer orden tienen una razón finita con $dx$; en general todos los diferenciales de orden *n* están en razón finita con $dx^n$, y el conjunto de los infinitesimales está formado sólo de estas clases de diferenciales.

Otra diferencia entre ambas teorías está en el hecho de que el análisis infinitesimal de Leibniz trata con cantidades geométricas, variables y diferenciales, mientras que el análisis no-estándar, así como el análisis real moderno en general, trata con números reales, funciones y derivadas, a pesar de la aceptación de los diferenciales. Los problemas relacionados con la diferenciación de órdenes superiores de cantidades variables no ocurren en el análisis no estándar.

Keisler (2000) usa el problema de la tangente a la parábola $y = x^2$ para explicar de manera intuitiva las dificultades de usar las cantidades infinitamente pequeñas $\Delta y, \Delta x$ para calcular la pendiente a una curva (p. 23). La pendiente promedio para un incremento $\Delta x$ viene dada por, $\Delta y/\Delta x = 2x_0 + \Delta x$, y por tanto solo se puede calcular cuando $\Delta x$ es distinto de cero porque de lo contrario el cociente $\Delta y/\Delta x$ está indefinido.

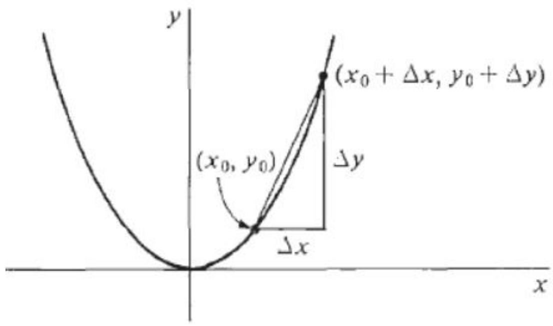


*Figura 4.4.* Relación entre la pendiente y los incrementos (Keisler, 2000, p. 26)

El razonamiento en el cálculo de Leibniz es que tomando $\Delta x$ infinitamente pequeño aunque no nulo entonces el término $\Delta x$ se puede despreciar y de este modo se tiene que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0$$

Se necesita establecer una distinción nítida entre los números que son suficientemente pequeños para ser despreciables en los cálculos y los que no lo son. De hecho, ningún número real excepto el cero es suficientemente pequeño como para ser despreciable. El análisis no estándar resuelve este problema al crear los números hiperreales, y dentro de ellos números infinitesimales o infinitamente pequeños.

**Definición de diferencial en el análisis no estándar.**

Supongamos que $y$ depende de $x$, $y = f(x)$:

**(i)** La diferencial de $x$ es la variable independiente $dx = \Delta x$.

**(ii)** El diferencia de $y$ es la variable dependiente $dy$ dada por $dy = f'(x)dx$.

La relación entre la derivada y el cociente de diferenciales es la igualdad:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Mientras que la derivada y el cociente incremental difieren en un infinitésimo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

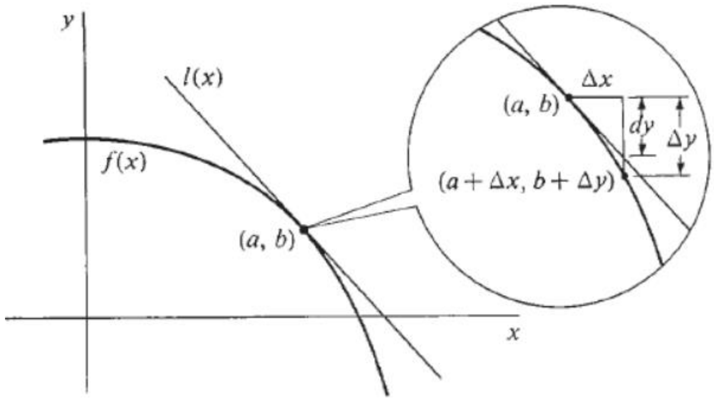


*Figura 4.5.* Distinción entre incremento y diferencial (Keisler, 2000, p. 56)

Veamos cómo se aborda el cálculo de la pendiente a la curva $y = x^2$ en el punto $(x_0, y_0)$ usando los números hiperreales infinitésimos.

**Problema de la tangente:**

**P1.** Considera un punto real $(x_0, y_0)$ sobre la curva $y = x^2$. Sea $\Delta x$ un infinitésimo positivo o negativo (pero no cero), y $\Delta y$ el cambio correspondiente en $y$.

**P2.** La pendiente en $(x_0, y_0)$ se define del siguiente modo:

[pendiente en $(x_0, y_0)$ ] = [el número real infinitamente próximo a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$]

**P3.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se calcula de igual modo que se ha hecho antes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^{\,2} - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

**P4.** Este es un número hiperreal, no uno real. Puesto que $\Delta x$ es infinitesimal, el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$ .

**P5.** Concluimos que [pendiente en $(x_0, y_0)$ ] = $2x_0$

El mismo método se puede aplicar a cualquier otra curva.

En la tabla 4.5 se presenta la secuencia de prácticas mátemáticas de la solución del problema junto con la identificación del uso e intencionaldiad de cada una de ellas. Además se estudia los objetos matemáticos primarios que entran en juego en cada práctica con el objetivo de construir el significado sistemico–pragmático del diferencial en el análisis no estándar.

Tabla 4.5

*Análisis ontosemiótico de la solución del problema de la tangente (en el marco del análisis no estándar)*

| Secuencias de prácticas matemáticas para resolver la tarea | Uso e intencionalidad de las prácticas | Objetos referidos en las prácticas (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) |
|---|---|---|
| P1 | Identificar los elementos que entran en juego en el problema de la tangente a una curva en el análisis no estándar | *Lenguaje:* natural (infinitésimo); geométrico, algebraico y simbólico (notación de incrementos).<br>*Conceptos:* curva, punto real, función, variables, ecuación, infinitésimo. |
| P2 | Definir la pendiente a una curva en relación con los números hiperreales | *Lenguaje:* (…); simbólico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y términos "infinitamente próximos"<br>*Conceptos:* (…); pendiente a una curva en un punto, números reales e hiperreales, infinitamente próximo, razón de incrementos infinitesimales.<br>*Proposición:* "pendiente en $(x_0, y_0)$ = el número real infinitamente próximo a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$" |
| P3 | Calcular la pendiente | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (…).<br>*Proposiciones*:<br>$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$<br>*Procedimientos:* planteo del $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y cálculo algebraico con números hiperreales.<br>*Argumentos:* definición de la pendiente como la razón de incrementos infinitesimales y propiedades del álgebra de los números hiperreales. |
| P4 | Interpretar el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (...).<br>*Proposiciones*: P1: "el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ no es un número real"; P2: "el número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$"<br>*Argumentos:* definición de número hiperreal e infinitamente próximos. |
| P5 | Identificar la pendiente | *Lenguaje:* (…).<br>*Conceptos:* (…).<br>*Proposiciones*: enunciado de la P5.<br>*Argumentos:* secuencia de prácticas P1 a P4. |

Los objetos primarios que intervienen en los procesos de definición y cálculo de la pendiente a una función $y = f(x)$ en el marco del análisis no estándar se caracterizan por la utilización de los lenguajes natural, geométrico, algebraico y simbólico. Los conceptos que entran en juego en las prácticas son: infinitésimo, número hiperreal, número real, números infinitamente próximos, curva, pendiente, y razón de incrementos infinitesimales. Estos conceptos son empleados para establecer proposiciones como:

P1: “El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ no es un número real”;

P2: “El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$”

En cuanto a los procedimientos se observan que se plantea la razón de incrementos infinitesimales y que se resuelve mediante el cálculo algebraico con números hiperreales. Es por ello que los argumentos que validan esta resolución provienen de la definición de números hiperreales y de las propiedades algebraicas de las operaciones con números hiperreales.

En el sistema de prácticas descritas en el marco del análisis no estándar se puede identificar un significado del diferencial, el diferencial de Robinson en el análisis no estándar, el cual se caracteriza por las configuraciones de prácticas y objetos de donde surge el concepto.

### 4.6. Significados del diferencial

En esta sección queremos destacar y distinguir los objetos que intervienen en los sistemas de prácticas matemáticas discursivas y operativas, en la resolución de la situación–problema seleccionada, con el fin de establecer relaciones entre los significados de los diferenciales de Leibniz, Cauchy, Fréchet y del análisis no estándar.

El análisis ontosemiótico realizado en los apartados anteriores nos permite identificar los sistemas de prácticas y objetos que intervienen en las situaciones-problemas con el objetivo de reconocer los significados sistémico-pragmático del diferencial para construir un significado referencia del concepto diferencial (Godino et al., 2007).

Tabla 4.6.
*Significados parciales del diferencial*

| Objetos | Diferencial de Leibniz (Siglo XVII-XVIII) | Diferencial de Cauchy (Siglo XIX ) | Diferencial de Fréchet (Siglo XX) | Diferencial en el análisis no estándar (Siglo XX) |
|---|---|---|---|---|
| Situación Problema | Cálculo de la tangente | Cálculo de la inclinación de la curva | Cálculo de la aplicación lineal y homogénea que aproxima el incremento de la función en un punto respecto del incremento de $x$ | Cálculo de la pendiente |
| Lenguajes | Natural, geométrico, algebraico y simbólico | Geométrico, algebraico y simbólico. | Natural, geométrico, algebraico, simbólico y funcional. | Natural, geométrico, algebraico y simbólico. |
| Conceptos | Cantidades infinitamente pequeñas, diferencia, curva, polígono infinitoangular, triángulo diferencial, subtangente, tangente, semejanza, ecuación proporcional | Inclinación, cuerda, curva, infinitamente pequeño, tangente trigonométrica, límite, convergencia, razón de incrementos, diferenciales, cociente de diferenciales y función derivada. | Aplicación lineal y homogénea, función, variable, incremento, aproximación, estimación, error, infinitamente pequeño, límite, diferencial y derivada | Número hiperreal, número real, números infinitamente próximos, curva, pendiente, diferenciales y razón de incrementos infinitesimales |
| Proposiciones | P1: "el triángulo diferencial y el triángulo formado por la subtangente, ordenada y tangente son semejantes"; P2: "los puntos infinitamente próximos P y Q se relacionan de la siguiente manera $y + dy = (x + dx)^2$ | P1: "si la distancia entre los puntos es infinitamente pequeña, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente a la curva y la inclinación de la cuerda con la inclinación de la tangente."; P2: "el valor numérico del límite hacia el cual converge la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la inclinación de la cuerda, es decir, la función derivada" | P1: "$\Delta f = f'(a)dx + \varepsilon dx$" (el incremento de la función se puede escribir como una suma de una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$ y una función $\varepsilon$ que tiende a cero cuando $\Delta x$ tiende a cero). | P1: "pendiente en $(x_0, y_0)$ = el número real infinitamente próximo a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$"; P2: "El número hiperreal $2x_0 + \Delta x$ está infinitamente próximo al número real $2x_0$" |
| Procedimientos | Trazar una tangente es unir dos puntos sucesivos de la curva y prolongar el lado del polígono infinitoangular para obtener la subtangente y la tangente. | Trazar la cuerda a partir de dos puntos de la curva. Evocar el cálculo del límite de la tangente trigonométrica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para determinar la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ | Plantear el incremento de la función $\Delta f = df + \varepsilon \Delta$ Calculo de límites y derivadas | Platear la razón de incrementos infinitesimales. Cálculo algebraico con números hiperreales |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Incrementar las variables $x$ e $y$ en una cantidad infinitamente pequeña $dx$ y $dy$, respectivamente (diferencia de la ecuación) | | | |
| Argumentos | Curva como línea infinito-poligonal, definición de recta, semejanza de triángulos, propiedad fundamental de las proporciones, la diferencia de dos valores sucesivos de $x$ es la diferencial $dx$, y similarmente para $dy$. | Una cantidad infinitamente pequeña es una variable cuyo valor numérico disminuye indefinidamente, es decir, tiene límite cero. La cuerda se convierte en la tangente a la curva y la inclinación de la cuerda en la inclinación de la tangente. La tangente trigonométrica se define como la razón de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. El límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la función derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ | Definición de función, límite e infinitésimo, el incremento de la función $\Delta f = df + \varepsilon\Delta$ y el diferencial como una aplicación lineal y homogénea del incremento de $x$. | Definición de números hiperreales y de las propiedades algebraicas de las operaciones con números hiperreales. |

En la tabla 4.6 presentamos las configuraciones de objetos y procesos que caracterizan a cada significado del diferencial, indicando los lenguajes y términos utilizados, los principales conceptos y definición que intervienen en las prácticas. También destacamos las proposiciones sobre los conceptos y las formas de proceder para resolver la situación–problema, que en cada significado adquiere una forma especial. Por último, comparamos los argumentos que validaban las proposiciones y procedimientos empleados para resolver los problemas.

En el estudio histórico–epistemológico que hemos realizado sobre el origen y evolución del concepto de diferencial, en el capítulo 3, se presenta la emergencia del concepto a la largo del desarrollo del cálculo, indicando cuales fueron las necesidades y obstáculos que tuvo que afrontar el diferencial. En el capítulo 4 comenzamos el análisis ontosemiótico a parir de una situación-problema que involucra el cálculo de la tangente a una curva en un punto e identificamos cuatro configuraciones ontosemióticas asociados a los significados sistémicos-pragmáticos del diferencial.

Las configuraciones ontosemióticas (CO) las hemos denominado de la siguiente manera: $CO_1$: Diferencial de Leibniz, $CO_2$: Diferencial de Cauchy, $CO_3$: Diferencial de Fréchet y $CO_4$: Diferencial en el análisis no estándar. El análisis ontosemiótico realizado sobre cada significado caracterizado por la configuración de prácticas, objetos y procesos, permiten establecer interconexiones entre los significados parciales y configurar un significado de referencia (Godino et al., 2017).

Resulta interesante realizar diferentes observaciones respecto a la tabla 4.6, identificando algunas interconexiones entre las configuraciones. En primer lugar, podemos destacar que a lo largo de la evolución histórica del concepto diferencial, la situación-problema que hemos seleccionado se mantiene en gran parte, comenzando en Leibniz con el cálculo de la tangente, luego pasando al cálculo de la inclinación de la curva con Cauchy, cálculo de la aplicación lineal que aproxima al incremento de la función con Fréchet y finalmente el cálculo de la pendiente en el análisis no estándar, esto quiere decir, que la problematización de la tarea en esencia es la misma, pero los objetos que intervienen van cambiando.

Esta última característica que hemos mencionado responde al propio desarrollo histórico de las matemáticas, y es una particularidad de la historia del cálculo, ya que como se hizo mención en el estudio histórico-epistemológico y en los antecedentes del trabajo, el avance del cálculo tuvo varias etapas: ingenuo, formal y crítico (Kleiner, 2012).

En la resolución del problema emerge un primer objeto a estudiar, que son los conceptos-definiciones que en la tabla 4.6 observamos que el diferencial se Leibniz se caracteriza principalmente por el uso de las cantidades infinitamente pequeñas, los infinitesimales, para obtener la subtangente y la tangente. Con el diferencial de Cauchy, los infinitesimales se reconfiguran y pasan a ser considerados como variables que tienen límite cero cuando el incremento de *x* tiende a cero. A partir de los conceptos de límite, convergencia, tangente trigonométrica y derivada, el diferencial pasa de ocupar un lugar central en el cálculo (Edwards, 1979; Kleiner, 2012), a un lugar marginal definiéndose como una expresión que depende de la derivada. (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

Luego en el diferencial de Fréchet, los infinitesimales siguen apareciendo como un objeto necesario para el surgimiento de los nuevos conceptos que emergen de las prácticas matemáticas, como la aplicación lineal y homogénea, aproximación lineal y la estimación. Finalmente, los infinitesimales que surgieron con Leibniz, en el siglo XX son definidos formalmente en el análisis no estándar con Robinson (1960), donde entran en juego nuevos conceptos entorno a la $CO_4$, como números hiperreales y números infinitamente próximos, pero muchos otros se siguen manteniendo como pendiente, razón de incrementos infinitesimales, etc. Los conceptos que intervienen en la $CO_4$ en el marco del análisis no estándar permiten identificar un cierto nivel de generalización y formalización, producto del propio avance de las matemáticas.

En la evolución de los lenguajes, observamos en un principio, que el diferencial está íntimamente relacionado al geométrico y natural, aunque también se destacan los lenguajes algebraicos y simbólicos con la introducción de *dx*, *dy* en la $CO_1$. A medida que fueron surgiendo las otras CO, adquirieron relevancia otros como, por ejemplo, en la $CO_2$ con Cauchy, se destaca el algebraico y simbólico, principalmente por la expresión $df = f'(x)dx$. En la $CO_3$ con Fréchet resalta el lenguaje algebraico, funcional y simbólico al trabajar con las aplicaciones lineales y la aproximación lineal del incremento de $f$. En el análisis no estándar se destaca el lenguaje geométrico, algebraico y simbólico con la formalización de los infinitesimales.

En cuanto a las proposiciones, es interesante observar en la tabla 4.6 cómo se enuncian y relacionan los conceptos de cada CO para enunciar diferentes afirmaciones sobre el diferencial, donde algunas tienen puntos en común y otras no.

Los procedimientos en cada CO tienen puntos de encuentro, por ejemplo, en el planteo de la tangente trigonométrica en la $CO_2$ con Cauchy y la razón de incrementos infinitesimales en el análisis no estándar ($CO_4$), aunque cada procedimiento tiene asociado una CO que permite construir un significado sistémico–pragmático parcial del diferencial. Los argumentos que se emplean para validar los enunciados y razonamientos están en estrecha relación con los conceptos-definiciones involucrados en cada CO.

En general, observamos que las CO asociadas al diferencial presentan varias interconexiones las cuales permiten establecer niveles de generalización y formalización entre ellas, a partir de las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) y los objetos que intervienen y emergen de las mismas, como se presentan en la Figura 4.6.

Como primer nivel colocamos a la $CO_1$: diferencial de Leibniz ya que se considera el origen del diferencial asociado principalmente al concepto-definición de las "cantidades infinitamente pequeñas". En el segundo nivel, colocamos a la $CO_2$: diferencial de Cauchy porque hay una evolución en los objetos que intervienen y destacamos la expresión simbólica $df = f'(x).dx$, la cual es utiliza, en cierta medida, por todas las demás CO.

En el tercer nivel de generalización y formalización ponemos a la $CO_3$: diferencial de Fréchet, el cual lo identificamos con la aplicación lineal; y en el cuarto nivel se encuentra la $CO_4$: diferencial en el análisis no estándar donde resaltamos a los "infinitesimales". Cabe aclarar que en la $CO_4$ el concepto de aplicación lineal y aproximación de la $CO_3$ son utilizados en el teorema del incremento del análisis no estándar.

Las $CO_1$, $CO_2$ y la $CO_3$ están contemplados en la $CO_4$ porque es posible pensarlos como casos particulares estableciendo ciertas condiciones en la utilización de los objetos matemáticos primarios. Esta característica la podemos observar en la Figura 4.6 por medio de las dobles implicaciones entre los objetos que destacamos en cada CO. El conjunto de las $CO_1$, $CO_2$, $CO_3$ y la $CO_4$ forman los significados parciales del concepto diferencial.

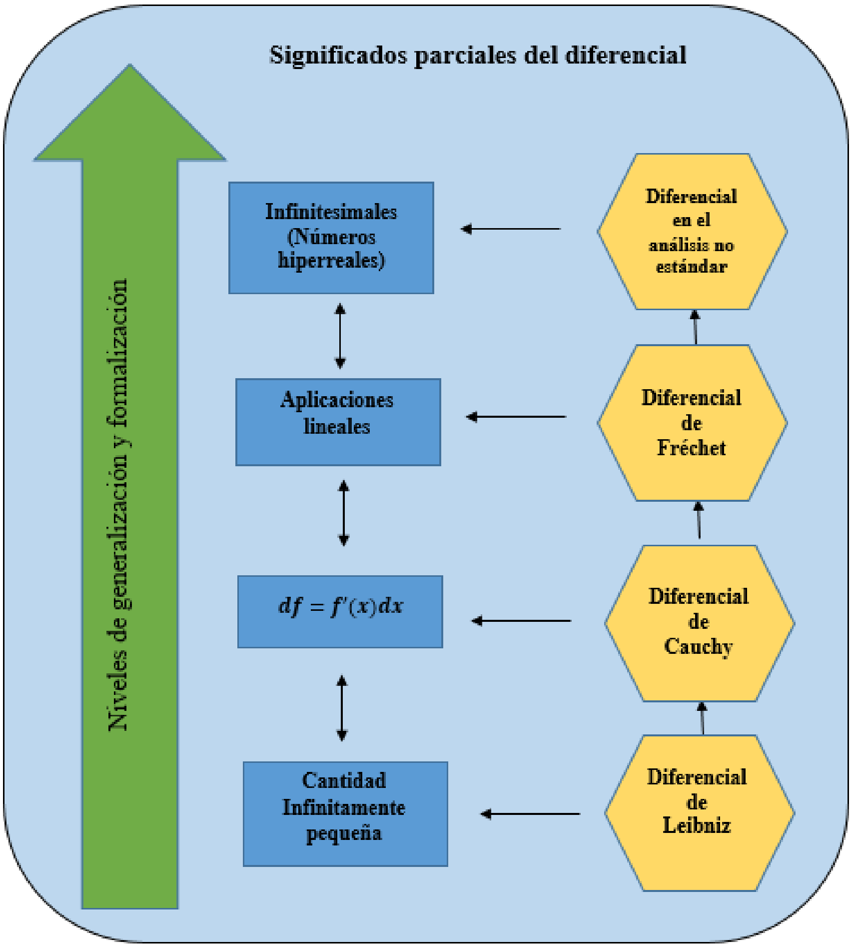


*Figura 4.6*. Modelo ontosemiótico de los significados del diferencial

# Capítulo 5

## SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

La enseñanza y el aprendizaje del cálculo ha sido objeto de estudio por muchas investigaciones, en las cuales se identifican las dificultades que tienen profesores y estudiantes al abordar los conceptos de límite, derivada e integral, como se presentó en el capítulo 2. Pero existen pocas investigaciones que se centraron en el concepto de diferencial de una función, concepto que consideramos importante porque en él tiene su origen el cálculo con Leibniz en el siglo XVII, y además es utilizado en los conceptos de derivada, integrales, ecuaciones diferenciales, formas diferenciales, etc. Es por ello que esta investigación tiene como objeto de estudio el concepto de diferencial y es necesario cuestionarnos sobre los significados del diferencial de una función, ya que es un contenido que está presente en los currículos de diversas carreras universitarias de matemáticas y de las ciencias experimentales.

Frente a este problema de investigación, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuáles son los diversos significados del diferencial?* Esta pregunta nos llevó a realizar un estudio histórico–epistemológico sobre el origen y evolución del concepto de diferencial, el cual se presenta en el capítulo 3 del trabajo. Además ampliamos algunas cuestiones que consideramos importantes de la evolución del concepto de diferencial, pero por motivos de espacio las hemos colocado en los anexos.

Este estudio, realizado en el capítulo 3, pretende reflejar la emergencia del concepto diferencial en la historia del cálculo, ya que se analizan las situaciones–problemas que dieron origen al mismo junto con su evolución. Este análisis está en relación con los objetivos específicos planteados, porque en el OE1 nos propusimos *realizar un estudio histórico–epistemológico del objeto diferencial* y en el OE2 *identificar los significados parciales del concepto diferencial a partir del estudio histórico–epistemológico*.

A partir de este estudio pudimos identificar algunos de los significados del diferencial que emergieron en diferentes momentos y en condiciones distintas. En primer lugar, aparece el diferencial de Leibniz, luego el diferencial de Cauchy, el diferencial de Fréchet y el diferencial en el análisis no estándar.

Frente a la pregunta *¿Qué elementos permiten distinguir los significados del diferencial?*, realizamos en el capítulo 4 un análisis ontosemiótico de los significados a partir de la selección de una situación–problema, cuya resolución según los distintos marcos, permitió identificar el sistemas de prácticas prototípicas y analizar los objetos que intervienen y emergen de las mismas. Con este análisis se identificaron los conceptos que entran en juego en la resolución del problema, así como las proposiciones y procedimientos que se realizan para obtener la solución. Estos objetos regulativos son apoyados por el lenguaje utilizado y se validan por los argumentos que se presentan.

Este análisis presentado en el capítulo 4 se corresponde con el OE3, donde nos propusimos *reconocer las configuraciones de prácticas, objetos y procesos asociados a los diversos significados del diferencial*. Las configuraciones ontosemióticas que identificamos son: $CO_1$: Diferencial de Leibniz, $CO_2$: Diferencial de Cauchy, $CO_3$: Diferencial de Fréchet y $CO_4$: Diferencial en el análisis no estándar.

En la búsqueda de respuesta a la pregunta de investigación *¿Cómo se relacionan y articulan entre sí los diversos significados del diferencial?*, hemos logrado identificar las diferentes interconexiones entre los significados parciales para construir un significado de referencia del concepto diferencial, como lo planteamos en el OE4: *Reconstruir un significado de referencia del diferencial a partir de los significados parciales y las configuraciones ontosemióticas identificadas*. Estos significados lo hemos puesto de manifiesto en forma gráfica en la Figura 4.6.

Cabe aclarar que el significado de referencia del diferencial que hemos construido no representa el significado global, en términos del EOS, ya que es necesario ampliar este estudio a otras campos de las matemáticas, como la geometría diferencial, pero es importante destacar que el significado construido es un primer paso y constituye una referencia para los cursos pre-universitarios y los primeros cursos de cálculo.

Frente a la pregunta *¿Es posible definir un modelo para categorizar los significados del diferencial según el grado de generalidad y formalización de los objetos intervinientes?*, consideramos que un punto de partida para construir un modelo que permita categorizar los significados del diferencial, es determinar los significados parciales del diferencial y sus interconexiones, el cual los hemos logrado y constituye un aporte para la construcción del modelo.

Luego de revisar el cumplimiento de los objetivos específicos, podemos decir que el OG el cual era *construir un modelo ontosemiótico de referencia de los diversos* *significados del diferencial*, se ha logrado con el análisis de los significados del concepto diferencial.

En cuanto a las implicancias y cuestiones abiertas de esta investigación, en referencia a los significados, que no han sido abordados debido al tiempo que se requiere para su estudio y el que se dispone en el marco del TFM, podemos mencionar:

En primer lugar, un aspecto que reconocemos interesante de estudiar es el uso del concepto diferencial en la enseñanza de las ciencias experimentales, en especial en la física y en las carreras de ingeniería. El diferencial ocupa un lugar central en las ciencias experimentales para la modelación o matematización de procesos de cambio o variación de fenómenos (López-Gay, 2015). Es por ello que sería interesante poder establecer relaciones entre los significados del diferencial que hemos construido en las matemáticas con las otras ciencias, teniendo en cuenta lo que menciona Freudenthal (1973) al afirmar que, "Es una situación imposible que el matemático enseñe una matemática que no se puede aplicar y el físico aplica una matemática que no ha sido enseñado por el matemático" (p. 553).

Por otro lado, resultaría de interés poder avanzar en el estudio de los significados del diferencial en las otras ramas de las matemáticas superiores, en especial, en la geometría diferencial, cálculo tensorial y cálculo de variedades, ya que su uso se ha ido generalizando con el avance y desarrollo del cálculo. También es posible avanzar sobre el estudio de los usos del diferencial en las ecuaciones diferenciales, cuya indagación está en estrecha vinculación con los significados del diferencial en las ciencias experimentales. Estos significados todavía no los hemos estudiado debido al tiempo que requieren y el espacio disponible del TFM. Consideramos que el estudio de los significados del diferencial en las otras ramas de las matemáticas ampliaría el esquema de los niveles de generalización y formalización de los significados del diferencial (Figura 4.6).

Observamos también que, tomando como base la reconstrucción de los significados del diferencial que hemos logrado, se podría pensar en un modelo ontosemiótico del diferencial más amplio, que incluya otros significados que permitan categorizarlo según los niveles de generalización y formalización.

Otras líneas de investigación importante, relacionada con el modelo de significados del diferencial podrían ser: el estudio de los libros de textos y los diseños curriculares, tanto de matemáticas como de física, considerando interesante identificar las configuraciones de prácticas, objetos y procesos que entran en juego, a partir del análisis de los significados parciales que se presentan en los mismos.

Además, es posible pensar en diseñar, implementar y evaluar propuestas didácticas que permitan abordar en los primeros cursos de cálculo los significados parciales del diferencial, teniendo en cuenta cuales son los significados que necesita, por ejemplo, un ingeniero, un físico, un matemático o un profesor de matemáticas.

## REFERENCIAS


Artigue, M. (1989). Le passage de la différentielle totale à la notion d'application linéaire tangente. En *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe I)*. Université Paris 7: IREM et LDPES.

Artigue, M. & Viennot, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. En J. D. Novak (ed), *Poceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Sciences and Mathematics (vol. III)*. Cornell, Ithaca, USA: Ed. Cornell University.

Alibert, D. & Legrand, M. (1989). Procedures differentielles et integrales aun niveau du premier cycle universitaire – une mise au point. En *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe VII)*. Université Paris 7: IREM et LDPES.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York, USA: Dover.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and derivatives in the Leibnizian calculus. *Archive for history of exact sciences,14* (1), 1-90.

Burgos, M. & Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática.* (aceptado).

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. París: de l'Imprimerie Royale, ETH Library Zurich. doi: 10.3931/e-rara-26185

Cauchy, A. L. (1823). *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal.* París: de l'Imprimerie Royale, ETH Library Zurich. doi: 10.3931/e-rara-25962

Cauchy, A. L. (1826). *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie.* París: de l'Imprimerie Royale, ETH Library Zurich. doi: 10.3931/e-rara-59689

Cauchy, A. L. (1829). *Leçons sur le calcul différentiel.* París. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=HXltAAAAMAAJ&hl=es&pg=GBS.PP1

Edwards, C.H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York, USA: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-1-4612-6230-5

Eves, H. (1981). *Great moments in mathematics (After 1690)*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Ferrini-Mundy, J., & Gaudard, M. (1992). Secondary school calculus: Preparation or pitfall in the study of college calculus? *Journal for Research in Mathematics Education, 33* (1), 56-71.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124. doi: 10.1007/s10649-012-9411-0

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. & Blanco, T.F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 24* (1), 35-52.

Giacomone, B. (2017). Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/giacomone.pdf

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39,* 127–135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. & Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3–15. doi: 10.46219/rechiem.v12i2.25

Gordillo, W. & Pino-Fan, L. R. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30* (55), 535-558.

Keisler, H. J. (2000). *Elementary calculus. An infinitesimal approach*. California, USA: University of Wisconsin.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York, USA: Oxford University Press.

Kleiner, I. (2012). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus, with remarks for the teacher. In *Excursions in the History of Mathematics*. (pp. 67-101). New York, USA: Birkhäuser Boston. doi: 10.1007/978-0-8176-8268-2_4

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Universidad, 1992.

López-Gay, R., Sáez, J. M., & Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education, 24*(5-6), 591-613. doi: 10.1007/s11191-015-9757-7

López-Gay, R. L. V. (2001*). La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, España.

Martínez-Torregrosa, J., López-Gay, R., Gras-Martí., A., & Torregrosa-Gironés, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias, 20* (2), 271-283.

Martínez-Torregrosa, J., López-Gay, R., & Gras-Martí, A. (2006). Mathematics in physics education: scanning historical evolution of the differential to find a more appropriate model for teaching differential calculus in physics. *Science & Education, 15*(5), 447-462. doi: 10.1007/s11191-005-0258-y

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Moll, V. F. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa 13*(1). 141-178.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del sable matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. (Tesis doctoral). Cinvestav, México.

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13*(4-I), 85-97.

Rabuffetti, H. T. (1987). *Introducción al análisis matemático*. Buenos Aires, Argentina: El Ateneo.

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*. Los Ángeles, USA: North-Holland Publishing Company Amsterdam.

Rossi, P. (1997). *El nacimiento de la ciencia moderna en Europa*. Barcelona: Crítica - Grijalbo Mondadori, 1998.

Tall, D. (1981a). Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus. *For the Learning of mathematics, 2*(2), 16-21.

Tall, D. (1981b). Intuitions of infinity. *Mathematics in School, 10*(3), 30-33.

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of Working Group 3 on Students difficulties in calculus, ICME*-7.

Taylor, A. (1974). The differential: nineteenth and twentieth century developments. *Archive for History of Exact Sciences, 12*(4), 355-383

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 229-274.

Valdivé, C., & Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 413-450.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77-120.

# ANEXOS

## A.1. Los incrementos pequeños de Fermat

En la década de 1630 Fermat desarrolló un método para encontrar tangentes a cualquier curva polinómica. El procedimiento consistía en, por ejemplo, para encontrar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(x, x^2)$, en primer lugar se consideraba el punto $x + e$ sobre el eje x y $s$ a la subtangente de la parábola en el punto $(x, x^2)$, como se puede observar en la Figura A.1. A partir de la semejanza de triángulos que quedan determinados es posible escribir que $\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s+e}$ donde Fermat afirma que $k$ es "adecuado o lo más parecido" a $(x + e)^2$ nos queda que $k \cong (x + e)^2$ y al reemplazarlo obtenemos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{s} \cong \frac{(x + e)^2}{s + e}$$

Despejamos $s$ de la ecuación (la numeración es sólo para guiar la lectura del procedimiento)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $x^2(s + e) \cong s(x + e)^2$ | 5 | $s \cong \frac{x^2 e}{(x + e)^2 - x^2}$ |
| 2 | $x^2 s + x^2 e \cong s(x + e)^2$ | 6 | $s \cong \frac{x^2 e}{x^2 + 2xe + e^2 - x^2}$ |
| 3 | $x^2 e \cong s(x + e)^2 - x^2 s$ | 7 | $s \cong \frac{x^2 e}{e(2x + e)}$ |
| 4 | $x^2 e \cong s[(x + e)^2 - x^2]$ | 8 | $s \cong \frac{x^2}{2x + e}$ |

Por lo que resulta que $\frac{x^2}{s} \cong 2x + e$

Donde $\frac{x^2}{s}$ representa la pendiente de la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(x, x^2)$, luego Fermat "elimina" la $e$ obteniendo así la pendiente de la tangente.

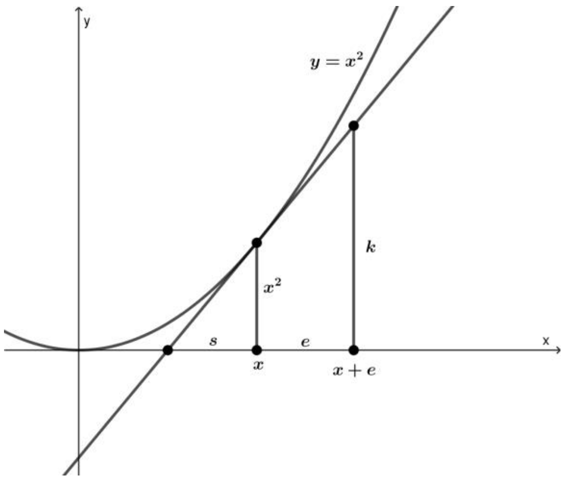


*Figura A.1.* Método de Fermat

El método empleado fue muy criticado por Descartes por la utilización de la $e$ ya que en un principio en el procedimiento se podía dividir por $e$ como si no fuese cero, pero luego se lo eliminaba como cero. Sobre este hecho Kleiner (2012) afirma que "la misteriosa $e$ de Fermat encarnaba una idea crucial: la entrega de un "pequeño" incremento a una variable" (p. 70).

Como se puede observar, en el procedimiento del cálculo de la tangente de Fermat, identificamos un lenguaje geométrico y algebraico con símbolos y términos como la '$e$' para expresar un incremento pequeño, '$\cong$' como 'adecuado o lo más parecido'.

Las prácticas matemáticas empleadas para la resolución de este problema siguió siendo tema de discusión por grandes matemáticos, físicos y filósofos por la utilización de las cantidades pequeñas.

## A.2. El cálculo de las fluxiones de Newton

El cálculo de Newton y Leibniz se basa en la noción de infinitesimal, donde se entiende que un infinitesimal era una cantidad infinitamente pequeña, menor que cualquier cantidad finita pero no nula (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

Para Newton las variables eran "fluidos", desde un enfoque geométrico y cinemático, de una cantidad que experimenta un cambio continuo, es decir, que implícitamente consideraba las variables como funciones que dependían del tiempo.

La "fluxión" era la tasa de cambio instantánea (velocidad instantánea) del fluido x, cuya notación es $\dot{x}$, y para calcular $\dot{x}$ se considera el movimiento de un punto en una curva $f(x, y) = 0$

> Como la composición de los movimientos horizontales y verticales con velocidades $\dot{x}$ e $\dot{y}$, respectivamente (…), y desde la dirección del movimiento de un punto en la curva es a lo largo de la tangente a la curva, se deduce que la pendiente de la tangente a la curva $f(x, y) = 0$ en un punto $(x, y)$ en la curva es $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. (Kleiner, 2012, p. 73)

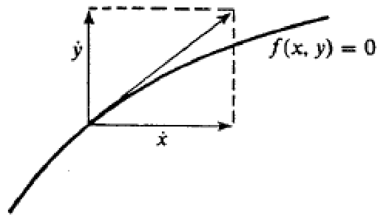


*Figura A.2.* Descomposición de Newton sobre el movimiento de un punto en una curva por los movimientos horizontales y verticales. (Kleiner, 2012, p. 73)

En términos de la notación actual $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ donde la pendiente de la recta tangente, la derivada en el punto queda representado por el cociente de fluxiones $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. A continuación desarrollamos un ejemplo de cómo se calculaba la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en un punto $(x, y)$. Newton considera un intervalo de tiempo infinitamente pequeño denotado por $o$, donde $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ representan incrementos infinitesimales en $x$ e $y$, respectivamente, suponiendo que $\text{distancia} = \text{velocidad x tiempo} = \dot{x}o$ o $\dot{y}o$. Las velocidades instantáneas $\dot{x}$ e $\dot{y}$ del punto $(x, y)$ permanecen constantes durante todo un intervalo de tiempo infinitamente pequeño $o$. Newton denomina a $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ como momentos, y un momento de un fluido es la cantidad que aumenta en un período de tiempo infinitesimal.

Entonces el punto $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ es un punto de la curva infinitamente próximo a $(x, y)$. Donde Newton afirma que "de modo que si las líneas descritas [coordenadas] son $x$ e $y$ en un momento, serán $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en el próximo" (Kleiner, 2012, p. 73). Luego sustituimos el punto $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ en la ecuación algebraica y resolvemos de la siguiente manera:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0 \quad (1)$$

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a(\dot{x}o)^2 + axy + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}o\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0 \quad (2)$$

Restando las ecuaciones (1) y (2) eliminamos los términos $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ y dividimos por $o$, nos queda:

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + ax\dot{y} + a\dot{x}y + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0$$

Luego se eliminan los términos que contienen a $o$ porque se los considera que son "infinitamente menos" que los términos restantes (Kleiner, 2012), resultando una ecuación que relaciona $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} = 0$$

A partir de esta ecuación podemos obtener la pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto $(x, y)$ por medio de $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$$(3x^2 - 2ax + ay)\dot{x} + (ax - 3y^2)\dot{y} = 0$$

$$(3x^2 - 2ax + ay)\dot{x} = (3y^2 - ax)\dot{y}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Con este procedimiento Newton observa un procedimiento general que permite determinar la pendiente de la tangente de cualquier curva algebraica.

### A.3. Del cálculo de las curvas al cálculo de las funciones por Euler

En 1696 L'Hospital introduce de manera sistemática el cálculo de Leibniz en su libro de texto *El análisis de lo infinitamente pequeño, para la compresión de las líneas curvas*. Luego a principio del siglo XVII el cálculo siguió desarrollándose con los aportes de los hermanos Jakob y Johann Bernoulli pero como se puede observar en el título del libro de L´Hospital "la principal preocupación contemporánea del cálculo era la geometría de las curvas: tangentes, áreas, volúmenes, longitudes de arcos" (Kleiner, 2012, p. 78). Por más que Newton y Leibniz hayan desarrollado un aparato algebraico y simbólico potente, su motivación y aplicación en los problemas lo realizaban con las curvas desde un enfoque geométrico o físico a partir del cálculo de variables relacionadas por ecuaciones.

A mediados del siglo XVIII, Euler hace un avance fundamental en el cálculo al introducir la noción de función como pieza central del mismo. Euler no fue el primero en trabajar con las funciones, pero fue el primero en considerar el cálculo como una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las funciones, de esta manera afirma Euler que el cálculo no se ocupa de curvas sino de funciones. Con lo cual permite reconocer que la derivada como cociente diferencial y la integral no son producto de abstracciones de las nociones de velocidad tangencial o instantánea, o bien, área o volumen; sino que son conceptos básicos del cálculo que tienen que investigarse por sí mismos (Kleiner, 2012).

### A.4. Los infinitesimales y la búsqueda del rigor en matemáticas

Los matemáticos del siglo XVII y XVIII observaban que los desarrollos que se estaban realizando no estaban sentados sobre bases firmes, de hecho eran conscientes de que los infinitesimales no cumplían el axioma de Arquímedes, muy importante para la teoría griega de la proporción, para el álgebra y la geometría del siglo XVII.

> El axioma de Arquímedes dice que dados dos números reales positivos $a$ y $b$, existe un número entero positivo n tal que $na > b$. Pero si a es infinitesimal y $b = 1$, entonces $na < 1$ por cada número entero positivo $n$. (Kleiner, 2012, p. 81)

Newton y Leibniz intentaron dar explicaciones rigurosas a sus métodos de cálculo pero no lograron dar respaldo lógico a sus procedimientos. Leibniz dijo respecto de sus diferenciales "será suficiente simplemente usarlos como una herramienta que tiene ventajas para el propósito del cálculo, así como los algebristas conservan raíces imaginarias con gran beneficio" (Edwards, 1972, p. 265).

El principal cuestionamiento que se le planteaba al cálculo de Newton y Leibniz era la consideración de las cantidades infinitamente pequeña, ¿son cero?, ¿cómo se puede dividir por eso?, ¿por qué en determinado momento se lo puede ignorar tratándolo como cero? (Martínez-Torregrosa et al., 2002).

Frente a estos planteamientos Newton, en Principia trata de resolver esta dificultad con la *teoría de las razones primeras y últimas*, considerado como un “dispositivo para tratar los límites de proporciones de cantidades geométricas expresadas en el lenguaje de la geometría sintética” (Kleiner, 2012, p. 82). En un intento por definir un límite Newton en el Lema I de los Principia introduce el concepto importante de *igualdad última*: “Las cantidades y las proporciones de cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes del final de ese tiempo se acercan entre sí por cualquier diferencia dada, en última instancia, se vuelven iguales” (Boyer, 1959, p. 197).

La aplicación de esta noción se observa en el siguiente ejemplo: Dado un acorde del arco AB de una curva y un segmento correspondiente AD de la tangente a la curva en el punto A, como se muestra en la Figura A.3. Si los puntos A y B se acercan y se encuentran, “la relación última del arco, el acorde y la tangente, de uno a otro, es la relación de igualdad" (Boyer, 1959, p. 197).

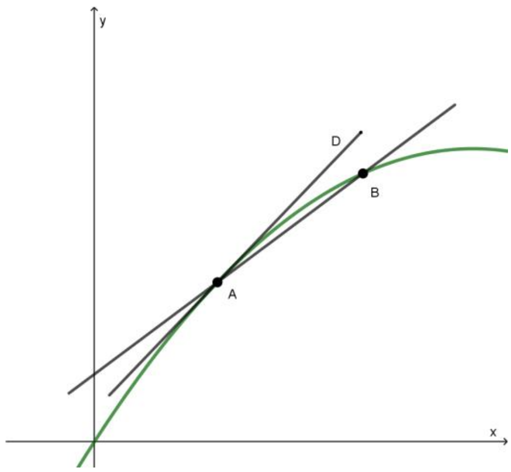


*Figura A.3.* Relación de Newton entre curva, arco y tangente (Kleiner, 2012, p. 83)

Luego Newton trabaja sobre las "proporciones finales de cantidades evanescentes" (Kleiner, 2012, p. 82), refiriéndose en términos actuales al límite de la proporción de cantidades cercanas a cero (la derivada).

> Por la relación final de cantidades evanescentes se debe entender la relación de las cantidades no antes de que desaparezcan, ni después, sino con la que se desvanecen ... Esas proporciones finales con las que se desvanecen las cantidades no son realmente las proporciones de las cantidades finales, sino límites hacia los cuales las relaciones de cantidades que disminuyen sin límite siempre convergen; y al cual se acercan más que por cualquier diferencia dada, pero nunca van más allá, ni alcanzan, hasta que las cantidades disminuyen en el infinito. (Edwards, 1979, p. 225)

Como ejemplo (Kleiner, 2012) se plantea encontrar la tangente a la curva $y = x^2 + 3x + 2$ que siguiendo el procedimiento de Newton sería: En primer lugar hay que tener en cuenta que un incremento pequeño $o$ en la variable x, produce un correspondiente incremento en la variable y, el cual es:

$$[(x + o)^2 + 3(x + o) + 2] - [x^2 + 3x + 2]$$

Ahora, por la relación de incrementos, nos queda:

$$\frac{[(x + o)^2 + 3(x + o) + 2] - [x^2 + 3x + 2]}{o}$$

$$\frac{x^2 + 2xo + o^2 + 3x + 3o + 2 - x^2 - 3x - 2}{o}$$

$$\frac{2xo + o^2 + 3o}{o}$$

$$\frac{(2x + o + 3)o}{o}$$

$$\frac{2x+3+o}{1}$$

En este punto, se deja que se desvanezca obteniendo la relación última de cantidades evanescentes, cantidades que Newton dice que se acercan a cero, resultando $2x+3$. Con la terminología actual se obtiene $\frac{dy}{dx}=2x+3$.

Por su parte, Leibniz tenía varios enfoques para resolver los problemas de los diferenciales, en algunas oportunidades reconocía su existencia real considerándolas como cantidades infinitamente pequeñas distintas de cero, pero más pequeñas que cualquier cantidad real. En cambio, en otras ocasiones consideraba a los diferenciales como "ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente" (Edwards, 1979, p. 264). Pero en otro momento, los diferenciales eran "cantidades finitas que pueden causar errores, pero estos errores pueden ser tan pequeños como se desee" (Kleiner, 2001, p. 83).

Leibniz dice: "Si se prefería rechazar cantidades infinitamente pequeñas, era posible suponer que eran tan pequeñas como se juzga necesario para que ... el error producido no tenga ninguna consecuencia, o sea menor que cualquier magnitud dada." (Boyer, 1959, p. 215).

### A.5. Las críticas al uso de los infinitesimales

Durante el siglo XVIII los matemáticos contemporáneos realizaban fuertes críticas al cálculo de Newton como al de Leibniz sobre los fundamentos lógicos de los mismos. El obispo George Berkeley se destaca por sus críticas planteadas en su ensayo titulado The Analyst (1743) con subtítulo, Un discurso dirigido a un matemático infiel, donde intenta desacreditar al cálculo como herramienta fundamental del progreso de la ciencia. La principal crítica realizada por Berkeley era sobre el uso de los infinitesimales en el cálculo como lo mencionan Edwards (1979, p. 294) y Kline (1972, p. 428):

> ¿Y cuáles son estos mismos incrementos evanescentes? No son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni nada. ¿No podemos llamarlos los Fantasmas de las cantidades difuntas? ... En virtud de un doble error, llegas, aunque no a una ciencia, sino a la verdad.

Una respuesta a las preguntas de Berkeley fue dada por d'Alembert en 1754 en un artículo titulado Différentiel de la Encyclopédie. La concepción de derivada de Newton como razón última fue reemplazada por d'Alember por una concepción de derivada como el límite de un cociente de incrementos, es decir, que: "La diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en encontrar el límite de la razón de las diferencias finitas de los dos cantidades contenidas en la ecuación" (Edwards, 1979, p. 295).

D'Alember consideraba que: "Una cantidad es el límite de otra si la segunda puede acercarse a la primera más cerca que por una cantidad dada, de modo que la diferencia entre ellas es absolutamente inasignable" (Boyer, 1959, p. 247). Observamos en la definición que d'Alember hace referencia al límite de una cantidad, no al límite de una función y no se permitía que el límite de la cantidad oscile alrededor de su límite (Kleiner, 2012).

En 1784 la Academia de Berlín ofreció un premio al que pueda explicar cómo se han desarrollados tantos teoremas verdaderos bajo la existencia de los infinitesimales, considerado como suposición contradictoria. La respuesta vino de la mano de Lagrange quien formuló sus ideas en dos libros Théorie des fonctions analytiques (1797) y Leçons sur le calcul des fonctions (1801) (Kleiner, 2012). Lagrange al intentar dar fundamentos rigurosos al cálculo, lo redujo a un enfoque algebraico donde eliminó las referencias entorno a los infinitesimales o límites, y en consecuencia los diferenciales, mencionando que: "los principales teoremas del cálculo diferencial sin el uso de cantidades infinitamente pequeñas o que se desvanecen o límites y fluxiones, y reducidos al arte del análisis algebraico de cantidades finitas" (Kline, 1972, p 430).

La consideración de las series de potencias como polinomios infinitos, utilizadas por Lagrange en su análisis algebraico fue predominante en el siglo XVIII. Pero la principal contribución de Lagrange al cálculo fue su enfoque funcional, es decir, la utilización de notación funcional para las derivadas, con lo cual se reconoce de manera explícita que la derivada de una función es otra función, pasando de esta forma al cálculo de funciones y derivadas en lugar del cálculo de diferenciales y fluxiones (Kleiner, 2012).

### A.6. Sin lugar para los infinitesimales con los aportes de Dedekind y Weierstrass

Dedekind, Weierstrasss y otros comenzaron a trabajar desde un nuevo enfoque en el cálculo, desde la aritmética, producto de los vacíos de las formulaciones aritméticas-algebraicas y las justificaciones geométricas intuitivas. Es por ello que Dedekind plantea encontrar una base puramente aritmética y rigurosa para los principios del análisis infinitesimal porque menciona que las afirmaciones del cálculo diferencial se basan en magnitudes continuas, pero en ninguna parte se realiza una explicación de esta continuidad. El tiempo de la "aritmetización del análisis" (término utilizado por Felix Klein) se debe al proceso de establecer los teoremas del cálculo desde la aritmética. Este hecho se debe a que desde los inicios del cálculo hasta la época de Cauchy los números reales se consideraban geométricamente y esto llevaba a que los fundamentos de los teoremas del cálculo se basaran en consideraciones geométricas e intuitivas. La perspectiva de Dedekind y Weierstrass permitió reconocer que una definición aritmética rigurosa de los números reales resolvería los problemas de los fundamentos del cálculo infinitesimal (Kleiner, 2012).

Weierstrass desarrolló una definición estática del concepto de límite utilizando desigualdades de $\varepsilon$ y $\delta$, a diferencia de Cauchy cuya definición se consideraba que se basaba en una concepción intuitiva y cinemática. Con la formulación del concepto de límite en $\varepsilon - \delta$, Weierstrass logra eliminar a los infinitesimales que fueron utilizados por Cauchy y sus predecesores por más de dos siglos.