

Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle

MARIE-PAULE ROMMEVAUX

Resumo

Será que os alunos conseguem aprender a ver tridimensionalmente? O objetivo do presente artigo é responder essa questão. As interações entre as representações utilizadas para solucionar um problema de geometria tridimensional são apresentadas e analisadas conforme estudos históricos e didáticos. Nessa resolução, a importância da identificação de vários planos é avaliada através da complexidade matemática e da complexidade heurística. Variações nessa dupla complexidade permitiram que uma seqüência de aprendizagem fosse construída. Suas três fases e as diferentes representações utilizadas em cada uma delas são descritas abaixo.

Palavras-chave: visualização geométrica, coordenação entre espaço e plano, registro de representação.

Abstract

Can students learn to see three-dimensionally? The aim of the present paper is to answer this question. Interactions between representations used to resolve a 3D geometry problem are put forward and analysed according to historical and didactical studies. In this resolution, the importance of the recognition of various planes is assessed through mathematical complexity and heuristic complexity. Variations in this double complexity allowed us to construct a learning sequence. Its three phases and the different representations used in the interaction during each one of them are described below.

Key words: geometry visualization, coordination between space and plane, representation of register.

Résumé

Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l'espace? C'est à cette question que nous essayons d'apporter une réponse. Il apparaît que les principales difficultés rencontrées dans la résolution d'un problème de géométrie tridimensionnelle se situent dans le discernement des différents plans entrant dans les situations étudiées et représentées. La complexité mathématique, due aux diverses définitions d'un plan, et la complexité heuristique, due aux représentations en perspective des situations tridimensionnelles, ont été évaluées. Leurs interactions sont schématisées par un double indice dont les variations permettent d'analyser les difficultés d'un problème de géométrie tridimensionnelle. Elles nous ont permis de construire une séquence d'apprentissage. La séquence, dont nous détaillerons les trois phases, a été expérimentée et évaluée. Nous donnerons enfin quelques uns des résultats obtenus.

Mots-clés: visualisation géométrique; coordenação entre 3D-espace et 2D-espace; registre de représentation.

Le travail présenté a pour objet l'étude – du point de vue cognitif – des interactions entre représentations utilisées en géométrie tridimensionnelle.

L'importance de cette partie des mathématiques – que ni les élèves ni les professeurs n'apprécient –, en plus des applications directes qu'elle peut avoir, se situe pour nous dans les interactions entre perception et savoir discursif. Les fréquents changements de registre que cet apprentissage met en œuvre sont pour le développement des connaissances mathématiques *pour tous* un atout certain. Si les figures de la géométrie bidimensionnelle paraissent livrer du *premier coup d'œil* toutes leurs propriétés – ce qui nous le savons n'est pas exact –, tout le monde s'accorde pour reconnaître aux figures de géométrie tridimensionnelle une certaine complexité. Après l'échec fréquent de cet apprentissage le découragement amène généralement la constatation suivante: *il y a ceux qui voient et ceux qui ne voient pas.*

Qu'est ce que cela signifie pour les élèves résolvant un problème de géométrie tridimensionnelle ? Il ne s'agit pas de *voir dans un espace de dimension trois* mais de voir trois dimensions sur une figure géométrique qui n'en a que deux. L'examen des étapes nécessaires à la résolution d'un problème de géométrie tridimensionnelle montre une succession de sélection de plans, résolution de problèmes plans et coordination de ces résultats. *Voir dans l'espace* peut donc se manifester par cette aptitude à discerner les plans sur une représentation non tridimensionnelle.

Comment en est-on arrivé des objets du monde sensible à la géométrie tridimensionnelle et aux représentations de situations spatiales? Une rapide incursion dans l'histoire des mathématiques nous a donné peu de renseignements sur les supports matériels ou visuels utilisés par les mathématiciens créateurs des règles de la géométrie tridimensionnelle. Il faut attendre le XVII^e siècle pour trouver un exposé théorique de la perspective parallèle et les véritables théories de la représentation sont dues à G.Monge (1746-1818) dont il ne faut pas oublier qu'il a débuté sa carrière dans un atelier de dessin et de fabrication de maquettes. L'importance des objets matériels, que cette dernière remarque souligne, n'a pas échappé aux chercheurs qui se sont penchés sur cet apprentissage. Nous analyserons le rôle de ces objets dans leurs expérimentations avant de donner les éléments de notre analyse et les détails de la séquence d'apprentissage que nous avons expérimentée.

Les élèves auxquels nous nous sommes adressée sont des élèves de seconde (15-16 ans), sans tenir compte de l'âge ou de la classe, cet apprentissage s'adresse à des personnes qui peuvent *identifier* sur une représentation en perspective parallèle un solide connu, qui connaissent certaines des propriétés de ces représentations – conservation du parallélisme, du milieu etc. –, mais ne peuvent se servir de ces figures pour *traiter* un problème sur la configuration représentée.

Introduction

Pour tenter de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle nous commencerons par nous interroger sur les processus mis en œuvre dans la résolution d'un problème relevant de cette partie.

Prenons un exemple:

$ABCA'B'C'$ est un prisme de base ABC triangulaire, les arêtes (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles. I est le milieu de (BC) , I' est le milieu de $(B'C')$ et M est un point de l'arête (AA') .

- a) Déterminer l'intersection de la droite (MC') et du plan (ABC) .
- b) Déterminer l'intersection de la droite (MB') et du plan (ABC) .
- c) Déterminer l'intersection de la droite (MI') et du plan (ABC) .
- d) Montrer que les trois points ainsi trouvés sont alignés sur une droite parallèle à une arête du prisme.

L'intersection d'une droite et d'un plan est un point, figure géométrique de **dimension zéro**. Déterminer cette figure va demander la construction d'éléments de dimension supérieure, au moins un segment – de **dimension un** –, dont il peut être un point. Le plus souvent les points sont définis comme intersection de droites, mais, nous sommes dans un espace de **dimension trois** dont les éléments structurants sont les plans, de **dimension deux**.

Une première difficulté rencontrée par les apprenants déjà familiarisés avec la géométrie "plane" est le changement de dimension des éléments structurants. Les droites deviennent des éléments "incontrôlés" de cet espace dont l'ossature est faite de plans qui ne peuvent

être représentés que par des couples de droites ou, des figures fermées particulières rencontrées dans les polyèdres.

Abordons le problème proposé et représentons la situation en perspective parallèle. La figure-source¹ n'est formée que d'un prisme triangulaire dont les sommets et les milieux de certaines arêtes sont nommés. Le texte s'intéresse aux droites (MC') , (MB') et (MI') , cette figure et les données sont représentées ci-dessous:

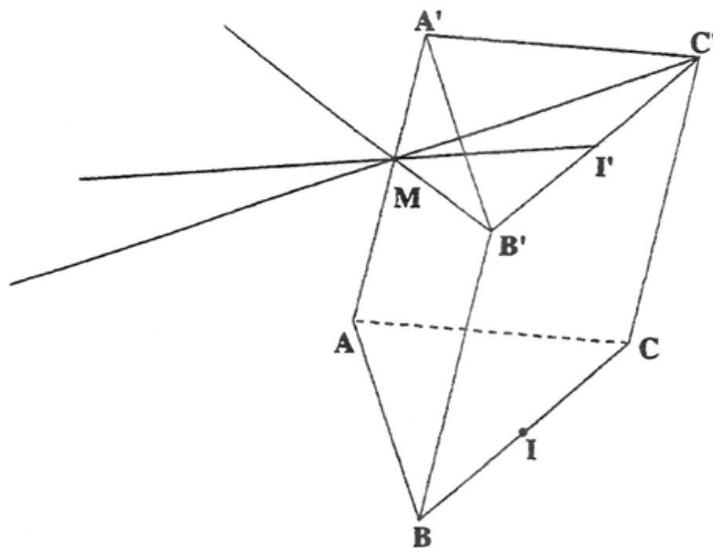


Figure 1: Projection parallèle sur un plan parallèle à $(ACC'A')$.

Cette représentation illustre ce que nous disions précédemment, ce ne sont pas les droites qui permettent de structurer la figure mais les plans, représentés ici par deux triangles et trois parallélogrammes. Répondre aux questions posées va demander une montée en dimension,

¹ Nous appelons figure-source la figure obtenue en représentant les figures élémentaires – points, droites, etc. – données dans la question. Cette figure peut être effectivement représentée sur un support matériel ou être imaginée. Elle devra peut-être être complétée pour devenir une figure facilitant l'appréhension opératoire de la situation. Toutes les figures que nous donnons sont des figures géométriques: complexes de traits et d'hypothèses, les ambiguïtés susceptibles d'apparaître dans les représentations en perspective parallèle sont levées par les textes qui les accompagnent. Si certaines hypothèses, dans ce texte, ne sont pas explicitement rappelées, c'est que nous voulons insister sur un aspect perceptif des figures.

il va falloir plonger chacune des droites tracées dans un plan qui la contient et qui coupe le plan ABC . Si les plans des faces s'imposent pour deux d'entre elles, une section est à déterminer pour la troisième. Le parallélogramme section est facile à déterminer, ses quatre sommets sont donnés dans le texte. Nous avons représenté ci-dessous la figure livrant la solution.

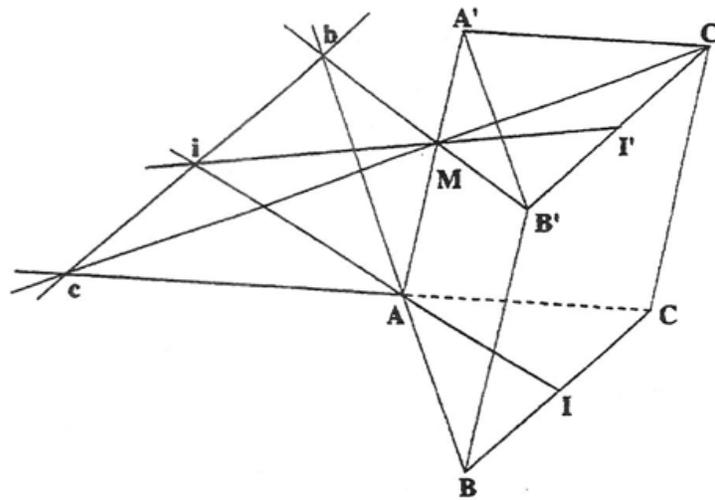


Figure 2

Dans ce cas la figure-source a des qualités heuristiques que les élèves peuvent apprendre à exploiter pour résoudre les problèmes de géométrie tridimensionnelle. Les plans des faces y sont **immédiatement perceptibles** – pour qui cherche à les voir –, le plan $AA'I'I$ de section est lui **directement discernable**². Déterminer les points b, c, i n'est pas immédiat, il faut en effet choisir la droite à prolonger et pour cela avoir présent à l'esprit que la droite d'intersection de deux plans contient tous leurs points communs. Les points b, c, i déterminés il s'agit de constater sur la figure qu'ils sont alignés, que la droite qui les porte est parallèle à (BC) ou $(B'C')$ et, de le démontrer. C'est encore une **montée en dimension** qui va permettre de résoudre ce problème. Plonger les points $MB'C'I'bc$ dans un même plan est immédiat, la réponse est donnée par l'intersection par un même plan de deux plans parallèles.

² Voir le § III-2.

Nous avons essayé de situer dans cet exemple les difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'ils résolvent un problème simple de géométrie tridimensionnelle. Ceci va nous permettre de mieux expliquer les choix qui ont présidé à la séquence d'apprentissage que nous avons conçue et à l'analyse théorique qui l'accompagne.

Les différentes phases de résolution du problème précédent montrent la succession de *sélection de plans* – face du prisme ou section –, *résolution de problèmes plans* – ici intersection de deux droites – et enfin *coordination des résultats plans* – les trois points trouvés sont alignés. Les problèmes plans rencontrés au début de l'apprentissage sont en général très simples, la difficulté principale est donc la sélection des plans pertinents pour la résolution de ces questions planes. Quels registres de représentation utiliser, en plus du registre discursif – indispensable en géométrie – pour faciliter ces opérations ?

Les représentations tridimensionnelles sont souvent évoquées et utilisées au tout début de l'apprentissage. Mais, elles ne peuvent remplir que des fonctions de simulation et de communication et non la fonction de traitement (Duval, 1995b). Cette dernière fonction, essentielle dans la résolution de problèmes ne peut être remplie que par les représentations sémiotiques et en géométrie ce sont les représentations figurales de dimension deux qui peuvent venir soutenir le discours. Ces représentations étant de dimension deux pour des situations de dimension trois nous savons qu'il y a perte d'informations, de plus la production de ces représentations doit obéir à des règles dont on veut favoriser l'apprentissage.

Résumons ce "cercle vicieux": les représentations en perspective parallèle paraissent les plus aptes à remplir une fonction de traitement, comment faire pour que les élèves puissent les utiliser dans ce sens ? Ceci ne paraît pas spontané et cette constatation donne lieu aux appréciations rituelles: *il y ceux qui ne voient pas dans l'espace et ceux qui voient ...* C'est-à-dire ceux qui sont capables de distinguer représentant – bidimensionnel – et représenté – tridimensionnel –, qui conçoivent le feuilletage de l'espace tridimensionnel en plans de différentes directions et sont capables de les discerner sur une représentation bidimensionnelle. La question qui se pose alors est: **Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l'espace ?**

Nous avons essayé de trouver dans l'histoire des mathématiques les sources d'inspiration des mathématiciens créateurs des concepts de la

géométrie tridimensionnelle, centrant notre recherche sur les types de représentation utilisés. La pauvreté des renseignements recueillis nous a conduite vers les utilisateurs des mathématiques, nous avons trouvé là quelques renseignements intéressants. Nous rendrons compte ensuite rapidement de quelques travaux didactiques sur ce sujet en mettant en évidence l'articulation des différents types de représentation en présence. Nous aborderons alors nos propres travaux.

État des recherches

Dans l'histoire

Le premier fait qui ressort de notre "survol historique" (Rommevaux, 1997, p. 45-80) est la distance temporelle qui sépare le corpus mathématique nécessaire aux théories de la représentation, déjà en place dans les *Éléments* d'Euclide, de leur émergence en tant que telles. Le second fait frappant est que cette théorisation a été préparée et mise en place par des praticiens: peintres, tailleurs de pierres...

Les traités mathématiques ne nous donnant pas beaucoup d'indications sur les fonctions heuristiques des éventuelles représentations nous avons regardé ce que les utilisateurs de géométrie tridimensionnelle que sont les constructeurs ou architectes pouvaient nous apprendre. Notre quête a été plus riche dans ce domaine, même si, nous le savons, les artisans, surtout les compagnons, conservaient secrets leurs savoir-faire. Certains écrits comme le *Carnet de Villard de Honnecourt* (XIII^e siècle), nous permettent d'entrevoir ce que pouvaient représenter pour les bâtisseurs de cathédrales certaines constructions et représentations géométriques. Si certaines figures ont, d'après R. Bechmann (*Bechmann*, 1991), un caractère ésotérique d'autres sont proprement géométriques. Nous y trouvons par exemple le moyen de déterminer le centre d'une colonne "que l'on ne voit pas tout entière", celui de "tailler des pendants réglés" etc. Nous avons essentiellement retenu dans ce *Carnet* la présence de gabarits dont l'usage était fréquent à cette époque:

On appelait *moles* d'une part les modèles des différentes faces des pierres et, d'autre part, également, ce qu'on appelle aujourd'hui

gabarits, indiquant la section et qui servaient pour les profils de moulures, de nervures, de bandeaux, de corniches, de pilastres, etc. (Bechmann, 1991 p.52)

Ces modèles, encore utilisés de nos jours, servent à conserver, ou vérifier, la forme d'une section perpendiculaire aux génératrices d'une colonne ou autre élément de forme cylindrique, ou servent aussi comme des pochoirs pour reproduire des formes dessinées sur un support plan. L'usage que nous en avons fait avec les élèves est plus "symbolique": les gabarits nous permettent de plonger l'espace 2D dans l'espace 3D.

Nous trouvons dans le *Carnet* de Villard de Honnecourt les traces d'une géométrie pratique et appliquée qui va évoluer vers un savoir plus élaboré et discursif avec A., Dürer et Philibert de l'Orme et être finalement théorisé par G., Monge. Esquissions rapidement cette évolution.

La géométrie était une science importante pour les peintres de *Quattrocento* et de la Renaissance, on retient généralement de leurs travaux l'invention de la perspective linéaire, ce n'est pas pour cet aspect que nous en évoquerons deux d'entre eux, mais pour des remarques moins "purement mathématiques".

E. Panofsky (Panofsky, 1987, p. 373) souligne le fait que malgré ses connaissances mathématiques et ses qualités de géomètre, A.Dürer (1471-1528) retient pour la construction des coniques la méthode des projections parallèles. D'ailleurs, comme J. Peiffer le rappelle, il considère comme prérequis à l'étude de sa géométrie d':

Avoir bien compris comment toute chose doit être tracée dans son plan et dans son élévation, selon la méthode que les tailleurs de pierre pratiquent tous les jours. (Peiffer, 1993, p. 11)

A. Dürer dans *Les instructions pour la mesure, à la règle et au compas, des lignes, plans et corps solides*, a le souci de transmettre des connaissances géométriques: pour se faire "bien comprendre" il donne *la procédure et le procédé*:

Afin que "les jeunes aient sous les yeux et intériorisent ces images", Dürer cherche à représenter graphiquement toutes les figures décrites dans le livre. (Peiffer, 1993, p. 10)

La nécessité de représenter un même objet dans deux registres sémiotiques différents est ici manifeste.

Le souci de prendre en compte les méthodes utilisées par les praticiens et de leur faciliter la tâche en retour est aussi manifeste dans certains ouvrages de Piero della Francesca (1415-1492). Le *Libellus de quinque corporibus regularis* (1482) doit son originalité au:

lien qu'il établit entre la géométrie euclidienne et les mathématiques de l'abaque, c'est-à-dire entre les mathématiques des savants et celles des techniciens. Piero est conscient d'être parmi les premiers à s'y essayer: dans sa dédicace à Guidobaldo de Montefeldre, le seigneur d'Urbino où il vivait, il affirme que la nouveauté de son travail réside dans la transposition des "choses" d'Euclide et des géomètres vers les arithméticiens. (Gamba & Montebelli, 1996, p.68)

Mais, le *Libellus* ne contient pas que des calculs ³:

Si Piero transpose Euclide dans le domaine de l'abaque, il utilise aussi ses talents artistiques en géométrie. L'inclusion de l'icosaèdre dans le cube est "vue" et "tracée", avant d'être démontrée, à partir de propriétés géométriques. Piero dessine une perspective à lignes de fuite parallèles plutôt qu'une perspective à lignes de fuite convergentes, selon le procédé inventé par Brunelleschi et Alberti, et théorisé par Piero dans son propre traité de perspective, parce que le raisonnement mathématique est ainsi plus clair: c'est une innovation remarquable. Piero est l'un des fondateurs du dessin technique et géométrique moderne: si l'on compare ses dessins avec les figures géométriques qui illustrent les éditions d'Euclide de l'époque, on constate des différences abyssales. Son œuvre, comme celles d'autres auteurs, reflète la demande d'un nombre croissant de techniciens qui souhaitaient disposer de constructions graphiques non équivoques et fiables. (Gamba & Montebelli, 1996, p. 70)

Cette longue citation montre la nécessité des représentations dans la transmission des connaissances, et met l'accent sur l'intérêt des

³ Nous soulignons.

représentations en perspective parallèle. Cet intérêt est celui que nous lui accordons encore aujourd'hui: ces représentations **ne reconstituent pas ce que nous voyons** mais facilitent les traitements mathématiques ou pratiques. Notons que les représentations en perspective parallèle furent explicitement théorisées, mais "à contre-cœur" par le jésuite Jean Dubreuil en 1651 (Rommevaux, 1997, p. 45 et 75)

Autre figure marquante pour notre propos: "le premier architecte français", Philibert de l'Orme (env. 1510 ? – 1570). Fils d'un maître maçon il perpétue les traditions du passé et les adapte en leur donnant des bases rationnelles et non plus empiriques. Il utilise les mêmes *instruments* que Villard de Honnecourt mais leur donne des fonctions différentes. Les maquettes et les gabarits sont utilisés dans les chantiers pour **anticiper, prescrire et transmettre**⁴. P. Potié souligne ces fonctions dans son ouvrage (Potié, 1996, p. 68 et 69), nous retiendrons ici que Philibert de l'Orme en révélant dans un ouvrage l'art du tracé des gabarits choisit d'exposer la:

méthode propre à faire de son trait de géométrie l'outil apte à conjointre théorie et pratique en la figure unique de son art stéréotomique. (Potié, 1996, p. 91)

La stéréotomie et le tracé des gabarits nécessitent une virtuosité très grande dans l'art du discernement des plans et du changement de plans. Virtuosité dont fait preuve Philibert de l'Orme, particulièrement dans la construction de la trompe d'Anet. Il a exposé cette construction dans l'un de ses traités.

Afin de valoriser cette leçon, il offre ensuite au lecteur la seule vue en perspective présente dans le traité. On remarquera au passage l'étonnant manque d'intérêt de Philibert de l'Orme pour une discipline géométrique voisine de l'art du trait. Il est possible qu'il ne maîtrisât pas suffisamment la perspective pour l'employer couramment. Il est possible également qu'il n'en ait pas eu l'usage,

⁴ La géométrie des constructions, la confection des maquettes que l'on retrouve dans de nombreuses *Maisons de l'œuvre* de cathédrales, renvoient à une situation pratique: les unités n'étaient pas universelles et les chantiers duraient plusieurs décennies. Il était nécessaire de laisser aux successeurs des représentations utilisables.

préférant ses maquettes au savoir-faire des peintres. (Potié, 1996, p. 91)

Théorie et pratique ont à partir de cette époque de plus étroites relations, comme nous allons rapidement le montrer en évoquant l'œuvre de G. Desargues (1591-1661) et de G. Monge (1746-1818). Nous retiendrons de Girard Desargues, dont le nom est attaché à la géométrie projective, qu'étudiant les techniques graphiques utilisées dans différents domaines pratiques: perspective, taille des pierres, gnomonique, il:

avait réussi à discerner clairement les principes géométriques qui servaient de base à ces différentes techniques. Et, tandis que les épreuves de la coupe des pierres l'amenaient à pressentir, après Dürer et avant Monge, les procédés de la géométrie descriptive, la perspective pratique et la gnomonique le conduisaient à étudier, d'une façon rigoureuse et approfondie, les propriétés théoriques de la perspective géométrique. (Taton, 1951, p. 95)

Terminons cette partie historique en évoquant la carrière de Gaspard Monge, créateur de presque toutes les méthodes utilisées en géométrie tridimensionnelle, qu'elles soient graphique – géométrie descriptive – ou symboliques – géométries différentielle et analytique. B. Belhoste et J. Sakarovitch insistent dans leurs articles (Belhoste, 1989 ou 1997), (Sakarovitch, 1995) sur la formation technique et pratique de ce futur mathématicien.

À l'école de Mézières, il a commencé comme "artiste": il dessine, coupe des pierres et des bois et prépare des modèles en plâtre à la gâcherie ; son habileté est remarquable. Toute sa vie il conservera ce sens du concret qui le rattache au monde de l'échoppe et de l'atelier dont il est issu. (Belhoste, 1989, p.67)

G. Monge saura théoriser ces pratiques et essentiellement celles de la taille des pierres:

La géométrie descriptive, comme la géométrie différentielle de Monge, emprunte à la taille des pierres sa définition des surfaces, ou plus exactement donne une définition théorique de la notion

de surface qui dérive directement de la manière dont celles-ci sont obtenues par le tailleur de pierres. (Sakarovitch, 1995, p.86)

Nous avons essayé de donner ici quelques éléments à l'appui de ce que nous affirmions au début: nous trouvons dans les chapitres XI et XIII des *Éléments* les théorèmes essentiels en géométrie tridimensionnelle, les théories de la représentation s'appuyant sur ces théorèmes ne sont apparues que par l'intervention de praticiens: peintres épris de géométrie, constructeurs, architectes, tailleurs de pierres, dessinateurs.

L'apprentissage de cette partie des mathématiques ne devrait-il pas lui aussi prendre en compte l'interaction entre théorie et pratique ?

Ce sont ces interactions que nous avons essayé de mettre en évidence dans les études didactiques consacrées à l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle que nous allons évoquer maintenant.

Dans la didactique

Le projet des différents auteurs est toujours le même: trouver un chemin facilitant le franchissement des étapes d'un parcours allant de l'espace sensible qui nous entoure - tridimensionnel - à l'espace du dessin - bidimensionnel - qui seul autorise les traitements ceux-ci permettant, en retour, d'appréhender l'espace géométrique tridimensionnel et ses propriétés. Le cheminement historique que nous avons esquissé à grands traits montre que le chemin est long. Il va se construire, pour un individu, tout au long de la découverte de l'espace sensible et de la géométrie. Nous avons retenu dans les travaux sur ce sujet certaines études marquant les différentes étapes de cette initiation. Notre choix a été guidé par les fonctions que les auteurs attribuaient aux types de représentations en présence et à l'étude de leurs interactions.

Donnons des exemples de ces travaux en prenant comme fil conducteur l'âge des apprenants.

Lorsque les enfants sont à l'école maternelle ou primaire, les expérimentations utilisent des objets matériels qui seront dessinés - modèle à représenter - mais aussi manipulés pour résoudre de petits problèmes. La vue et le toucher sont sollicités, ces deux sens vont permettre la "naissance de la fonction symbolique des représentations". Les représentations, analogiques dans certains cas, non analogiques dans

d'autres, varient suivant les tâches et les moyens graphiques dont disposent les enfants.

Si J. Caron-Pargue s'intéresse aux différents modes de codage mis en œuvre par les enfants, étudie leurs évolutions suivant l'âge et la tâche – avec ou sans manipulation de l'objet représenté – (Caron-Pargue, 1981 et 1987), d'autres expérimentations comme celles de A. Bessot et M. Eberhard (Bessot & Eberhard, 1987a et 1987b) vont jouer sur les tâches et les objets pour faciliter l'émergence d'un certain type de codage, en l'occurrence le repérage orthogonal de la géométrie analytique.

Nous retiendrons de ces études les apports positifs et les obstacles dus à ces manipulations. La citation suivante a accompagné tous nos travaux:

Manipuler, c'est d'après le dictionnaire, "remuer, déplacer, faire fonctionner un objet" ; et par là même, l'explorer, le transformer. Mais on peut concevoir une manipulation qui ait lieu de façon médiate, sur des substituts de l'objet. Nous qualifierons la première de "matérielle" et la seconde de "symbolique". La **manipulation matérielle** entraîne un certain afflux d'informations vers le sujet; mais ces informations seront-elles toujours adéquates à la tâche? Cet afflux va-t-il entraîner des conséquences au niveau de la sélection, de l'organisation et de la réorganisation des informations? Dans la **manipulation symbolique**, le substitut filtre les informations de telle ou telle façon suivant sa nature; ce filtrage, s'il est approprié, peut constituer un apport économique intéressant pour le sujet. Mais d'autre part, le substitut de l'objet véhicule lui-même des informations qui lui sont propres, et dont l'articulation avec celles qui proviennent de l'objet peut être souhaitable ou non suivant la nature ou le but de la tâche à accomplir. (Caron-Pargue, 1981, p. 7-8)

Trois tâches sont primordiales dans cet apprentissage: prendre toutes les informations, les organiser et surtout **en abandonner**. Il y a là une question de choix qui ne peut être résolue de façon unique. Nous voyons d'ailleurs que l'âge⁵ n'est pas dans ces cas là déterminant et que l'adéquation du traitement de la représentation à la tâche doit s'apprendre.

⁵ Voir dans (Rommevaux, 1997, p. 122-123) les résultats que nous avons retenus des travaux de R.Baldy avec des adultes en formation.

S'adressant à de très jeunes enfants les expérimentateurs essaient d'étudier les différents codages qu'ils mettent "spontanément" en œuvre pour traiter les problèmes proposés. Dans les expérimentations que nous allons évoquer maintenant il y a une intention d'enseignement qui ne figurait pas dans les expérimentations précédentes. Les tâches de communication d'assemblages de cubes proposées vont obliger les élèves à transmettre une information complète, ces tâches vont faire apparaître des représentations non analogiques – prise en compte d'un plan de référence et codage numérique. Jouant sur les variables cubes accrochables ou non-accrochables et sur le nombre de cubes à la disposition des élèves, A. Bessot et M. Eberhard vont essayer de les conduire de la manipulation des cubes, à des représentations graphiques non normalisées⁶ et à un repérage symbolique. Elles constatent, au cours du déroulement de ces expérimentations⁷ que le référentiel évolue et tend à se détacher du sujet dans la succession des situations-problèmes. Ce qui leur permet,

en jouant sur la situation de communication (et sur des familles de polycubes), d'envisager une suite de situations-problèmes où l'élève construite, comme solutions, des représentations graphiques non normalisées pour aboutir à un repérage dans l'espace faisant intervenir trois coordonnées: ce repérage nécessite un détachement du référentiel par rapport à l'objet lui-même, dernier passage du graphique au symbolique. (Bessot & Eberhard 1987a, p. 70)

Nous retiendrons de ces expérimentations l'usage fait des objets matériels qui gardent le statut central qu'ils peuvent avoir dans la vie industrielle ou artisanale. Leur manipulation est motivée par les enjeux de la situation et nous ne trouvons pas dans ces articles certaines des considérations qui en font des objets d'étude mathématique peu prisés.

6 Une représentation normalisée très présente dans notre environnement: la perspective est quelquefois utilisée par les enfants, mais aussi bien J. Caron-Pargue que A. Bessot et M. Eberhard soulignent sa non-maîtrise et son peu de spontanéité dans les productions des enfants.

7 Celles-ci ont été faites avec des élèves différents, de l'école primaire au collège de 1982 à 1987.

Nous retiendrons également l'importance qui est donnée à deux de nos sens: la vision et le toucher⁸.

Il faut néanmoins qu'en tant qu'"êtres infiniment plats"⁹ nous apprenions à représenter sur un plan les solides tridimensionnels. C'est en général au collège – entre 11 et 15 ans – que se place cet apprentissage. C'est aussi à ce moment là que la contradiction qui le sous-tend apparaît de façon plus aiguë. Comment initier les élèves à ces représentations sans donner les règles qui les justifient et permettent de les interpréter ?

Deux activités essentielles sont expérimentées: l'exécution de représentations en perspective parallèle – de l'objet au dessin – et la "lecture" de représentations de même type – du dessin à l'objet. L'objectif est de pouvoir aller d'un dessin de l'objet à un autre dessin de l'objet sans le passage par l'objet matériel lui-même.

L'équipe dirigée par G.Audibert a beaucoup travaillé dans ce domaine. Partant d'observations faites au travers des problèmes "FIL" et "SEC" les auteurs ont constaté que la perspective cavalière paraissait la mieux adaptée aux élèves pour traiter les problèmes de géométrie euclidienne et l'objectif de leur travail a été de mettre en place une séquence d'apprentissage de cette technique de représentation.

Dans le paragraphe précédent nous avons noté qu'historiquement cette remarque avait été faite. Les auteurs s'attachant à cette question qu'elle soit scolaire ou technique reconnaissent aux perspectives parallèles des qualités qui facilitent les traitements géométriques (Comar, 1994, p. 59). Mais, il ne faudrait pas suggérer que cette représentation reproduit notre "vision" de l'objet représenté, elle n'en est qu'une *image*:

S'il n'existe aucune solution "exacte" pour fixer l'espace sur un plan, c'est que toute image – même fondée géométriquement – transforme les choses ; elle en privilégie certains aspects. (Comar, 1994. p.82)

8 Nous insistons dans (Rommevaux, 1997 p. 74-75 et 91-94) sur l'importance du toucher dans l'appréhension des formes tridimensionnelles.

9 Gaston Julia évoquant l'œuvre de Louis Antoine, géomètre qui venait de disparaître, déclarait en 1971: "Tout ce que l'on peut prévoir comme relevant du bon sens est exact dans le plan, et Antoine en donne le premier, une démonstration rigoureuse, mais est toujours faux dans l'espace à plus de deux dimensions. Notre intuition géométrique est surtout celle d'êtres infiniment plats." (Nordon, 1992, p.7.)

Le fait que la perspective parallèle est une projection sur un plan et non une reproduction de l'image visuelle que l'on a de l'objet ne nous paraît pas suffisamment prise en compte dans l'apprentissage de ces représentations. L'évocation de la vision crée des confusions entre représentant et représenté qui sont très résistantes: nous avons eu quelques difficultés à faire admettre à des professeurs que l'on pouvait représenter un cube avec un *coefficient de réduction* de 2^{-10} , et qu'un parallélépipède quelconque pouvait avoir la même représentation en perspective parallèle qu'un cube (Rommevaux, 1997, p. 33).

Les élèves de cinquième qui, à Montpellier, ont suivi la séquence PC (Bonafe, 1991) n'ont pas réussi à surmonter ces obstacles: il nous semble que l'introduction de l'objet à *dessiner*, le fait de représenter des lignes *cachées*, créent des différences de traitement entre objet mathématique et objet matériel que les élèves ont des difficultés à analyser. Un autre facteur intervient aussi, que nous avons souligné dans nos expérimentations et que souligne également F. Bonafe: le temps.

L. C. Pais (Pais, 1991) s'est, sous les mêmes hypothèses de départ, intéressé à la représentation des corps ronds. La lecture de ces travaux, et tout particulièrement de l'analyse *Problème SEC*, fait e par A. Chevalier (Chevalier, 1989) nous paraît mettre en évidence deux faits importants: malgré la présence d'un objet matériel les élèves les plus jeunes¹¹ ont des difficultés à distinguer représentant et représenté et, nous le constatons dans toutes les expérimentations précédentes: représenter ou déterminer la forme d'une section est un problème très difficile à résoudre car on ne peut que rarement découvrir sa forme en manipulant l'objet matériel.

En conclusion, il semble que les élèves de collège peuvent apprendre à représenter de façon "conventionnelle" les solides en appliquant ce que F. Bonafe appelle "l'algorithme de la construction", ils peuvent aussi reconnaître sur une représentation un solide simple. Mais, résoudre des problèmes et tout particulièrement utiliser des sections demande plus de maturité et un apprentissage spécifique faisant peut-être intervenir des maquettes. La fonction donnée aux maquettes

10 Évidemment le terme est mal choisi!

11 Voir les études de R. Baldy signalées précédemment qui montrent pour les adultes les mêmes différences.

dans les expérimentations concernant les élèves de collège ne nous paraît pas clairement définie: ni simulation, ni illustration, ni source d'informations puisque certaines sont "grossièrement" construites, d'autres opaques alors que les objets que l'on étudie sont transparents. Les auteurs semblent craindre que les élèves ne puissent s'en détacher et en font volontairement des objets à négliger.

Les études historiques et certaines études techniques montrent cependant que ces objets peuvent avoir, pour la compréhension de l'espace réel ou virtuel, des fonctions importantes: fonction heuristique par les simulations qu'elle autorise, fonction de vérification – utile –, mais qui ne peut intervenir que lorsque le problème est résolu. Les deux expérimentations dont nous allons rendre compte maintenant leur donnent un rôle beaucoup plus important.

B. Parzys dans ses travaux (Parzys, 1989 et 1991) se préoccupe tout d'abord de *l'encodage et du décodage* des dessins. Il analyse les représentations des manuels, les dessins d'objets – cubes ou pyramides squelettes¹² – faits par des élèves au cours d'enquêtes. Une seconde phase de ses enquêtes consiste à proposer aux élèves des représentations et à leur demander de les interpréter. L'auteur constate, et ceci se retrouve dans les études d'autres chercheurs, que les élèves réussissent mieux en *décodage* qu'en *encodage*. L'analyse précise de ses enquêtes basée sur la mise en évidence du conflit *voir/savoir*, a permis à B. Parzys d'élaborer une ingénierie didactique qu'il a expérimentée dans une classe de Seconde et de Première scientifique. Nous retiendrons de ses expérimentations l'usage d'une maquette adaptable aux tâches proposées: les études d'ombres. Ombre au flambeau qui matérialise une projection conique et ombre au soleil qui elle, matérialise une projection parallèle. La maquette utilisée est posée sur le bureau du professeur: elle a une *fonction de simulation* – l'ampoule de poche placée en haut du "flambeau" n'est pas allumée – elle sert au professeur ou à un élève à trouver, expliquer ou vérifier une solution. Il s'agit dans cette phase de l'apprentissage de déterminer l'ombre d'un cube squelette dans différentes positions de l'objet ou de la source lumineuse. Les règles de la projection sont alors découvertes puis institutionnalisées. Cette compétence acquise les élèves vont pouvoir poursuivre l'étude de l'espace. Pour les élèves de seconde,

12 Réduits à leurs arêtes.

des difficultés persistent au niveau du passage de la représentation à l'objet de l'espace et la différenciation entre représentant et représenté n'est pas encore stable.

Le rôle, dans toutes ces expérimentations, des objets tridimensionnels ne nous paraissait pas suffisant. Pourquoi ne pas leur donner dans la construction du savoir mathématique l'importance qu'ils peuvent avoir pour certaines autres activités pour lesquelles:

Le substitut représentant contrôle les actions et celles-ci par leurs effets modifient la connaissance que l'on a de l'objet représenté.
(Bresson, 1989, p. 936)

Il nous fallait tout d'abord savoir si, comme le craignait la plupart des expérimentateurs, les élèves "lisait tout sur la maquette": c'est à cette question que l'observation faite en 1989 (Rommevaux, 1991, p. 85-123) nous a permis de répondre. Nous avons pour cette première expérimentation étudié en détails les "capacités heuristiques" données à un objet-maquette par la matière dont il est fait. Les objets tridimensionnels ne pouvant constituer un registre sémiotique, nous voulions que les maquettes proposées aux élèves possèdent presque toutes les possibilités qu'offre une représentation d'un tel registre: permettre la fonction de traitement.

Un objet creux – une surface – en acétate transparent permettant le dessin, les vérifications par transparence, et autorisant les changements de points de vue, nous a paru la forme la plus apte à remplir les contraintes imposées. Regarder un tel objet peut même suggérer une représentation en perspective parallèle: toutes les arêtes du polyèdre représenté sont visuellement accessibles et les "arêtes cachées" sont plus *pâles* que les arêtes visibles. Nous n'avons pas utilisé cette possibilité qui, comme nous l'avons vu précédemment, ne constitue pas une approche efficace de la représentation en perspective parallèle.

L'objet que nous avons présenté aux élèves pour cette première observation avait toutes les qualités possibles: bien construit, conforme aux données du texte, permettant les mesures, le dessin, la vérification par transparence. L'énoncé demandait d'étudier l'évolution du périmètre des sections *horizontales* d'un cube suspendu par une diagonale *verticale*.

Nous avons été obligée de constater que, si la maquette jouait un rôle très important dans la phase heuristique du problème, les élèves n'utilisaient pas toutes les possibilités que donnait l'objet et, que les difficultés qu'ils rencontraient se situaient dans l'impossibilité dans laquelle ils étaient de concevoir la variabilité des directions de plans et celle des sections d'un cube. La remarque de P. Cartier est toujours d'actualité pour les débutants en géométrie tridimensionnelle:

La vision fine de l'espace est délicate: qui d'entre nous n'a pas été surpris la première fois qu'on lui a montré que l'intersection d'un cube et d'un plan pouvait être un hexagone régulier? (Cartier, 1991, p. 12)

Dans cette phrase, que nous citons souvent, le mot montré illustre tout à fait les intentions qui sont à l'origine de l'apprentissage dont nous allons décrire les intentions et le déroulement dans les paragraphes suivants.

Après avoir mis en évidence les différences importantes existant entre les figures illustrant des situations bidimensionnelles et celles illustrant des situations tridimensionnelles, nous donnerons les principaux éléments de l'analyse qui nous a permis de mieux comprendre la spécificité de la géométrie tridimensionnelle. Plus encore qu'en géométrie plane, les interactions entre représentation figurale et texte doivent être maîtrisées et nous mettrons en évidence deux indices de complexité qui, pour les questions premières de la géométrie tridimensionnelle nous ont guidée dans la conduite de l'apprentissage et dans la progression des questions de l'évaluation finale.

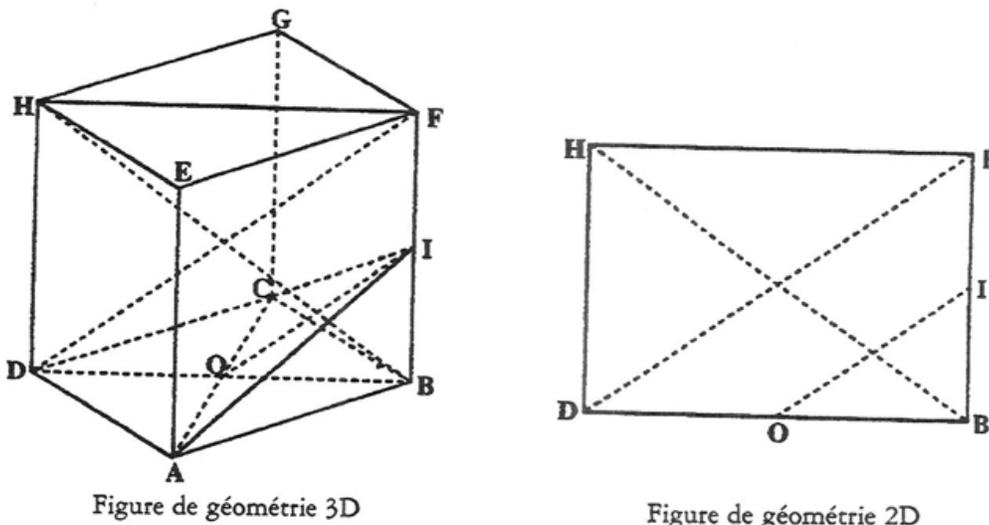
Le discernement des plans: une entrée en géométrie tridimensionnelle

Éléments d'analyse heuristique des figures géométriques

Considérons ci-dessous deux figures géométriques ¹³: celle de droite représente un rectangle, ses diagonales et le segment joignant les milieux

¹³ Nous appelons figure géométrique toute représentation figurale d'une situation mathématique donnée: c'est un complexe de lignes et d'hypothèses. (Duval, 1995b)

de deux côtés; celle de gauche représente la projection parallèle du cube $ABCDEFGH$ sur un plan parallèle au plan $BDHF$, et certaines figures liées à un problème.



Quoique dans le même registre de représentation sémiotique, il existe des différences importantes entre ces figures. Pour bien comprendre ces différences il faut distinguer: le support de la représentation (feuille de papier, écran d'ordinateur, tableau), le ou les plan(s) de référence, le ou les plan(s) propre(s) de la situation géométrique représentée. À partir de ces distinctions, deux différences apparaissent entre ces représentations.

La première différence est dans les éléments de référence représentés:

– en géométrie bidimensionnelle, le support de la représentation, le plan de référence, le plan de la situation coïncident.

– en géométrie tridimensionnelle, l'un des plans de référence peut coïncider ou ne pas coïncider avec le support de la représentation, peut également coïncider ou ne pas coïncider avec un plan de la situation géométrie étudiée.

La seconde différence est dans la nature du lien entre l'objet et sa représentation:

– en géométrie bidimensionnelle on représente les objets mathématiques que l'on veut étudier et toute modification sur la

représentation peut immédiatement être interprétée comme une modification sur l'objet lui-même;

– en géométrie tridimensionnelle, ce sont les plans de référence qui sont essentiellement représentés et éventuellement certains plans de la situation. Discerner ces différents plans: support de la représentation, plans de référence, plans pertinents pour la situation est une opération qui doit précéder l'identification des objets mathématiques dans ces plans.

La représentation du cube ci-dessus illustre cette complexité: le plan de la représentation "coïncide" avec un plan du solide: le plan du rectangle diagonal qui, dans le problème proposé est aussi un plan pertinent pour la situation étudiée. Les plans de référence sont les faces du cube¹⁴.

Discerner les plans sur une représentation en perspective d'une situation spatiale est, nous le voyons, difficile. Une telle figure ne livre pas immédiatement les pistes pour procéder visuellement à un certain travail de discrimination. Il faut donc savoir *a priori* ce que l'on cherche, ce que l'on *devrait voir*.

Comment sont définis les plans que l'on cherche? Nous trouvons plusieurs définitions contrairement aux droites, qui elles, sont définies par deux points distincts. Trois points distincts non alignés ne sont pas la seule façon de reconnaître un plan qui peut aussi être défini par une paire de droites sécantes ou parallèles. Dès lors, si *voir* en géométrie plane que trois points sont alignés est simple – il suffit d'avoir une règle –, *voir* – tout simplement – sur une représentation en perspective que quatre points sont coplanaires est beaucoup plus difficile. Nous allons maintenant examiner ce problème à travers des questions que nous avons proposées à l'évaluation finale. Cette épreuve nous a permis de mesurer, par rapport à un groupe témoin, l'efficacité ou la neutralité, de l'apprentissage expérimenté.

¹⁴ Nous voudrions faire remarquer à ce propos que si toutes les situations étudiées au cours de cet apprentissage se situent dans des solides, ce ne sont pas les cubes, parallélépipèdes, prismes, pyramides qui ont constitué l'objet de l'étude mais les plans – faces ou sections – qu'ils permettent de représenter. Les polyèdres ne servent qu'à mettre en évidence des droites et plans de l'espace qui se trouvent ainsi matérialisés, ils ne sont que des outils.

Critères de discernabilité des plans

Premier exemple:

La figure 4 ci-contre représente une pyramide à base carrée $SABCD$ de sommet S , en perspective parallèle sur un plan parallèle à SHI . I, J et K sont respectivement les milieux des arêtes (BC) , (SA) et (SD) .

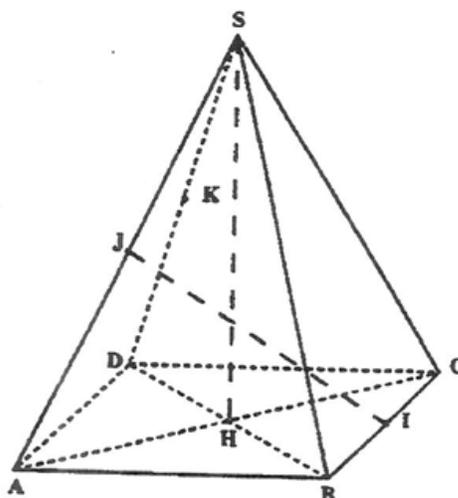


Figure 4

Les droites (SH) et (JI) sont-elles sécantes ?

La figure proposée aux élèves est ici la figure-source¹⁵. Répondre directement sur celle-ci est à éviter: deux droites sécantes sur la représentation ne le sont pas nécessairement sur l'objet, les élèves, après apprentissage connaissent généralement cette restriction. La question doit être reformulée – c'est pour nous la marque d'une certaine complexité mathématique –, les quatre points S, H, J et I regroupés différemment. Un rapide calcul montre qu'avec quatre points six situations nouvelles peuvent être envisagées, la figure va ici venir au secours du raisonnement combinatoire: trois des quatre points sont dans un plan immédiatement perceptible sur la figure: le plan SAC déjà dessiné qui contient S, J et H . La réponse à la question est alors elle aussi immédiate. La figure peut donc, après raisonnement ou formulation explicite d'une nouvelle question livrer la solution.

Les plans qui "sautent aux yeux" dès que leur recherche est clairement formulée ont été qualifiés de plans immédiatement

¹⁵ Voir une note précédente.

perceptibles. De tels plans sont représentés par des figures fermées, faces des solides de référence ou sections de formes triangulaires ou trapézoïdales déjà présentes sur la figure-source. Ces figures suggèrent l'existence d'un plan, celle-ci doit ensuite être établie par une démonstration.

Cette même question pouvait être résolue avec d'autres plans, comme nous allons le voir ci-dessous.

On peut s'intéresser au plan SHI , plan de section de la pyramide non représenté dans la figure-source mais facile à déterminer en joignant des points déjà présents. Il s'agit alors de déterminer une sous ou surfigure dans laquelle sera *plongée* la figure étudiée.

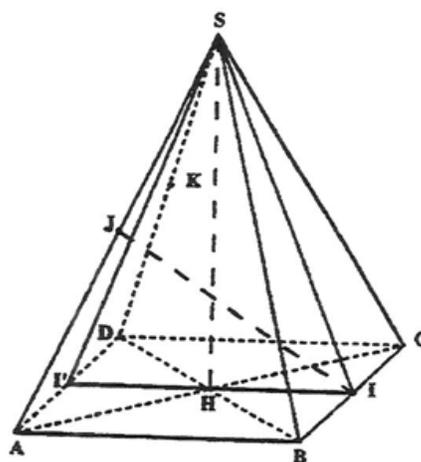


Figure 5

Dans ce cas la sous ou sur-figure utile pour déterminer le plan pertinent pour la résolution est directement *représentable* sur la figure-source: il suffit de joindre des points déjà présents pour la mettre en évidence sans résoudre de problème auxiliaire difficile. Nous dirons que le plan pertinent est un **plan directement discernable**. Texte et représentation figurale sont, comme toujours en géométrie, très dépendants mais ici, le langage, l'expression explicite de ce que l'on cherche guide de façon encore plus utile la perception de la figure: **on ne peut y voir que ce l'on cherche**.

Le second exemple que nous avons choisi est encore plus représentatif de la remarque précédente. Les différentes solutions que nous donnons ici en exemple sont des solutions que nous avons effectivement trouvées dans les productions des élèves.

Deuxième exemple:

Un cube $ABCDEFGH$ est représenté ci-contre en projection parallèle sur le plan $BDHF$. Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes (AB) , (GF) , (GH) , (HD) et (AD) .

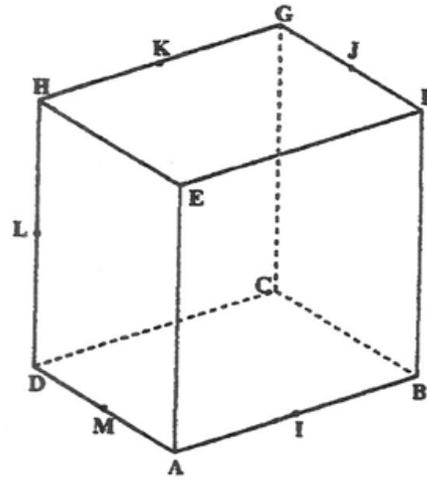


Figure 6

Les points L, J, B, K sont-ils dans un même plan ?

Les lois de la Gestalt, qui ont pu être renforcées par l'apprentissage, amènent à regrouper les stimuli (Palmer & Rock, 1991): à joindre sur le papier ou mentalement les points donnés – ce qui est fait en trait gras sur la figure –, la forme obtenue constitue la figure-source.

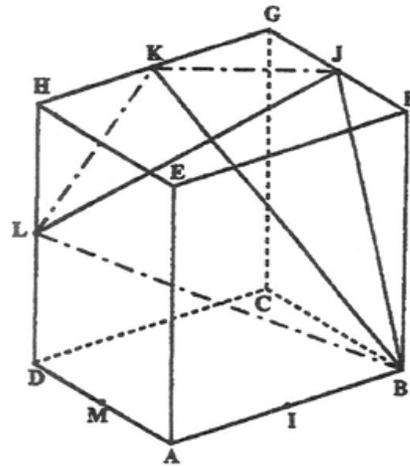


Figure 7

Celle-ci est une forme ouverte, elle ne permet pas comme l'indiquent les lois du regroupement ou de clôture de détacher une forme du fond. Tentant, toujours selon les mêmes lois, de percevoir la forme la plus simple avec l'information disponible, on cherche à joindre les points donnés

pour obtenir une forme fermée qui, dans les meilleurs cas peut suggérer la réponse: la figure dessinée en trait pointillé. Nous voyons ici que les figures obtenues en traits plein ou pointillé ne suggèrent aucune piste. Il est alors nécessaire pour répondre à la question de dissocier les points et de les regrouper: les sept possibilités de regroupement sont ici ouvertes. Nous allons donner quatre solutions effectivement trouvées dans les productions d'élèves, chacune répond à une reformulation du problème proposé.

a) Les droites (LK) et (BJ) sont-elles dans un même plan?

Dans la figure-source associée à cette nouvelle question les droites seront tracées qu'il faudra *plonger* dans des plans permettant de répondre. Chacune d'elles est située dans une face du cube – plans directement discernables –, ces faces, adjacentes, se coupent suivant une arête. Il faut ensuite trouver l'intersection de deux droites dans un plan et, interpréter en dimension trois ce que permet de lire la figure: les points d'intersection des deux droites avec l'arête sont distincts.

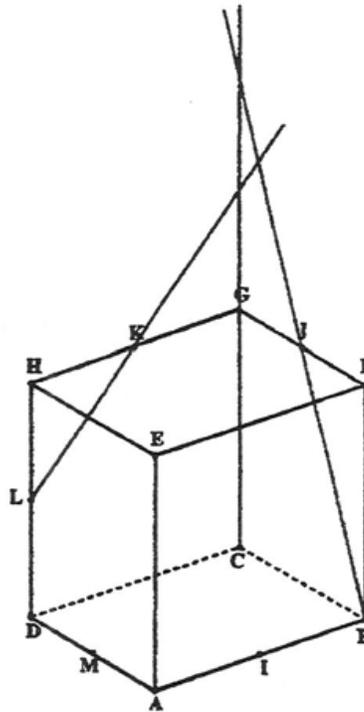


Figure 8

La démonstration, de géométrie bidimensionnelle, est calquée sur cette appréhension. L'obstacle ne réside pas ici dans l'action de "sortir" du plan, ce que les élèves apprennent sans trop de difficulté, mais dans les changements constants de dimension: montée en dimension: choix des plans, puis descente en dimension: arête commune etc., qui conditionnent la maîtrise de cette "sortie" hors du monde fermé des

solides¹⁶. Ces différents changements lorsqu'ils deviennent conscients peuvent tout à fait être réussis par des élèves de seconde. La représentation figurale permet une interaction productive entre **appréhension perceptive** et **appréhension opératoire** (Duval, 1995b).

b) Les droites (LB) et (JK) sont-elles dans un même plan ?

La résolution de cette question reformulée va faire intervenir des éléments de dimension disparate, ce qui peut paraître simple pour des esprits exercés à la géométrie tridimensionnelle mais ne l'est pas pour les débutants. Comme précédemment, il est nécessaire de plonger chacune des droites dans un plan qui la contient: l'un est une face du cube, l'autre le plan diagonal $DBFH$, ils sont directement discernables.

Après avoir résolu un problème plan très simple dans $EFGH$, il faut, pour répondre, associer la droite (JK) et le plan $DBFH$ et "oublier" la droite (LB) . Comme précédemment **appréhension perceptive** et **appréhension opératoire** sont étroitement associées et peuvent permettre une démonstration presque immédiate.

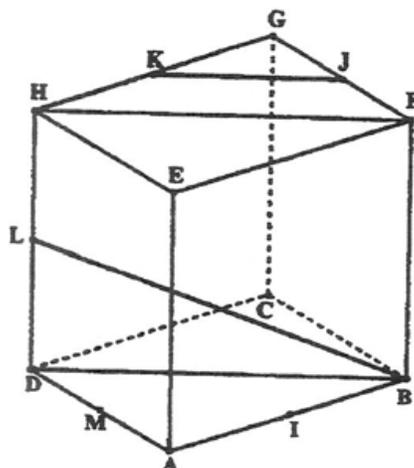


Figure 9

Nous allons maintenant étudier deux des regroupements déterminant un plan, ceux que nous avons rencontré dans les productions des élèves. Les deux autres donnent des pentagones difficiles à déterminer pour des élèves de ce niveau. Nous donnerons ensemble les deux formulations qui relèvent d'une même analyse.

- c) Le point L est-il dans le plan (KJB) ?
- d) Le point B est-il dans le plan (LKJ) ?

¹⁶ La maîtrise de ces changements se lit sur les dessins: les élèves prolongent l'arête.

Dessiner sur la représentation en perspective parallèle du cube les plans (KJB) ou (LKJ) demande la résolution d'un problème d'intersection de plans. La droite (BD) – ci-contre –, ou (LM) , (MI) etc. – ci-dessous – ne peuvent être créées qu'après un raisonnement.

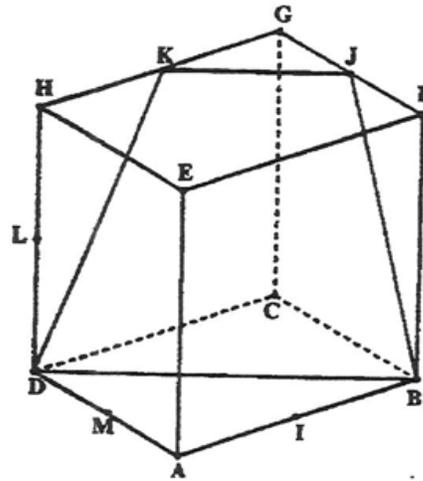


Figure 10

Nous dirons que dans ce cas la figure n'a pas, intrinsèquement, de qualités heuristiques, elle permet seulement une meilleure prise en compte des divers éléments entrant dans la démonstration. Le plan pertinent pour la résolution est, dans la figure-source, non visuellement accessible. Le problème d'intersection résolu la solution est immédiate.

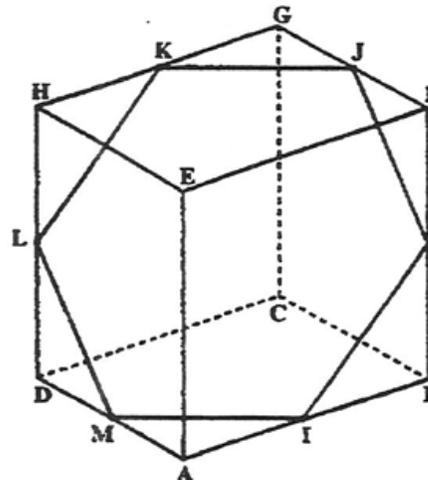


Figure 11

Mais, toute la difficulté est dans ce problème non explicitement posé. Il semble clair que seuls les élèves ayant déjà rencontré ces sections du cube, donc en concevant *a priori* l'existence, peuvent produire ces solutions.

Les deux complexités que nous avons définies:

- complexité mathématique liée aux différentes définitions d'un plan, donc impliquant un choix,
- complexité heuristique liée aux formes qui peuvent sur la figure-source suggérer l'existence d'un plan pertinent pour la résolution, ont été

déclinées en trois degrés que nous allons donner séparément puis combiner en un tableau croisé. Ce tableau nous a permis de gérer les différentes étapes de l'apprentissage et de graduer les exercices de l'évaluation. Associés, à l'origine, à la détermination des plans dans les problèmes de géométrie tridimensionnelle, nous les avons adapté à d'autres types de problèmes pour lesquels ils peuvent aussi permettre d'analyser des démarches complexes.

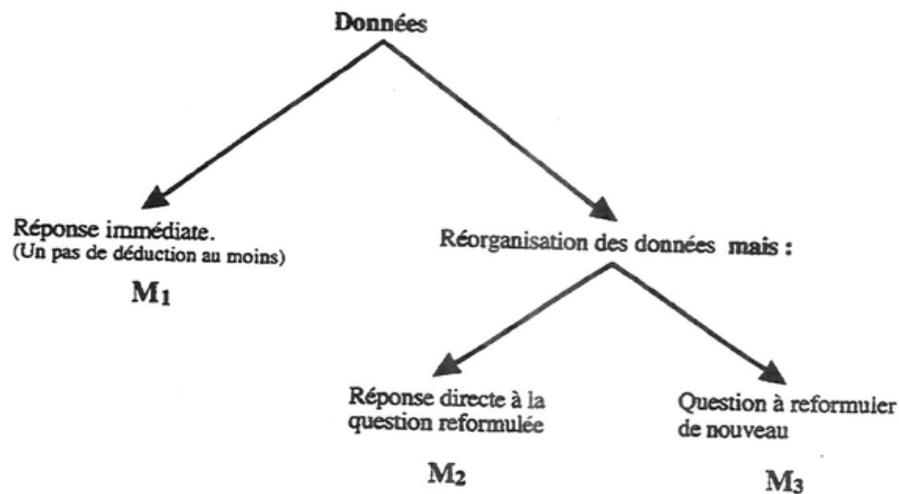


Figure 12: Indice de "complexité mathématique"

Lorsque les données de la question doivent être réorganisées, les éléments de la figure interviennent pour orienter le choix, c'est pour cette raison que les deux indices doivent être croisés.

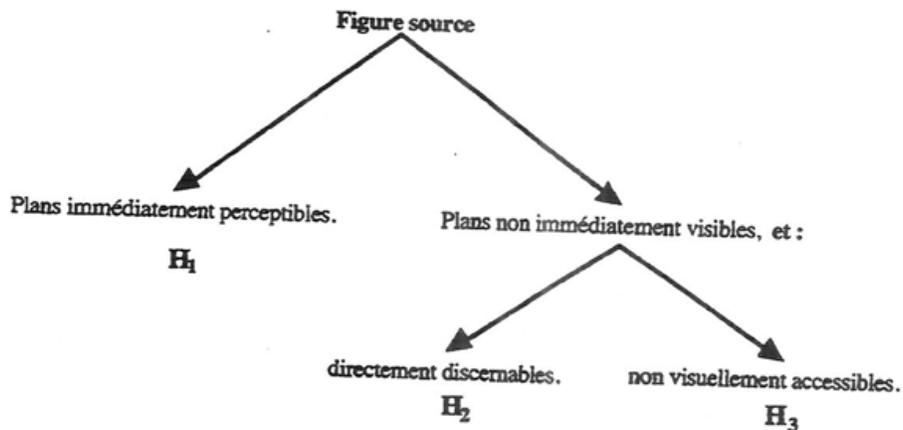


Figure 13: Indice de "complexité heuristique"

Lorsque les plans ne sont pas immédiatement perceptibles – c'est-à-dire déjà représentés sur la figure: plans de référence ou plans ayant été définis dans des réponses précédentes –, les éléments de la figure-source représentés et la reformulation de la question vont intervenir conjointement dans la recherche de la solution.

Heuristique Mathématique	Plans immédiatement perceptibles H_1	Plans directement discernables H_2	Plans non visuellement accessibles H_3
Réponse immédiate M_1			
Réponse immédiate à la question reformulée, M_2			
Question à reformuler au moins une seconde fois M_3			

Figure 14: Prise en compte simultanée des deux indices.

Ce tableau est destiné à recevoir les pourcentages de réussite aux questions d'un problème analysé en fonction des indices précédemment définis. Il nous permet, dans l'analyse préalable des questions, de mesurer la difficulté prévue et, dans l'analyse des productions effectives, de confirmer certains points. Ce tableau a été mis à l'épreuve pour un problème classique de géométrie tridimensionnelle, il a répondu à notre attente (Rommevaux, 1997, p. 256-264).

Après une synthèse des éléments issus de l'analyse précédente nous donnerons les étapes de la séquence d'apprentissage expérimentée.

Comment développer chez les élèves l'aptitude à discerner les plans en liaison avec un apprentissage de la géométrie tridimensionnelle?

Nous avons montré que complexité mathématique et complexité heuristique étaient liées dans la recherche aboutie des solutions. Il est donc nécessaire que l'apprentissage prenne en compte ces deux aspects et ne se satisfasse pas du seul contenu mathématique. Il faut alors tenir compte des représentations figurales ou matérielles aussi bien que du contenu des définitions ou des problèmes. La coordination des représentations en présence est ici essentielle.

L'objectif de l'apprentissage est le développement de la fonction de traitement des représentations en perspective parallèle. D'autres études ont montré que l'usage, souvent efficace, qu'en font les élèves se centre surtout sur la fonction de communication. La fonction de traitement est moins disponible car les élèves n'imaginent pas le feuilletage en plans de l'espace graphique. Il nous fallait donc trouver une représentation intermédiaire permettant de donner aux représentations planes cette possibilité virtuelle. Cette représentation ne pouvait être que matérielle, sa présence seule ne suffit pas. Il faut pour que la fonction de traitement se développe que les représentations en présence soient bien coordonnées. Ce qu'un mathématicien fait spontanément doit, pour la plupart des individus, être acquis par l'apprentissage: *voir dans l'espace* peut s'acquérir comme tout autre savoir.

Examinons les représentations en présence et les conditions de leur coordination.

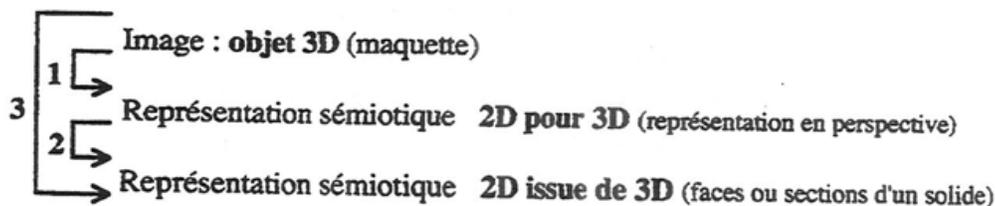


Figure 15

Nous avons noté ci-dessus les deux types de représentations, autres que langagière, en présence en géométrie tridimensionnelle. Nous avons

distingué les représentations sémiotiques de celles que nous appelons image (Duval, 1995a, p. 15). Les images sont des reproductions d'objets réels ou virtuels: le support physique ou psychique qui les reçoit agit comme un récepteur, il n'y pas comme pour une représentation sémiotique adaptation au registre dans lequel elles sont formées ni choix des traits représentés (Rommevaux, 1997, p. 23-27). Des représentations figurales de deux types ont été distinguées pour cette coordination:

– celles que nous appelons “2D pour 3D” pour montrer qu'elles représentent un objet d'un autre espace que celui dans lequel elles sont formées;

– celles que nous appelons “2D issues de 3D” pour montrer qu'elles sont effectivement représentées dans leur registre d'origine mais, extraites de l'espace dans lequel elles étaient plongées.

Les flèches numérotées codent les interactions entre les représentations. La flèche 1: passage d'un objet matériel à une représentation en perspective, dite: *dessin de l'objet* est le passage qui apparaît le plus fréquemment dans l'enseignement. Les flèches 2 et 3, passages d'une représentation en perspective ou d'un objet, à une représentation plane de figures planes extraites, sont moins souvent utilisés. Le passage 2 apparaît en général au niveau des contrôles de connaissances, le passage 3 n'est pratiquement jamais envisagé au niveau des décisions d'enseignement. Contrairement à ce que l'on pourrait croire les figures dessinées sur une maquette ne livrent pas au *premier coup d'œil* leur formes planes, le passage 3 demande aussi à être travaillé. Malgré les sens choisis dans le schéma précédent, les interactions sont à double sens. Notre objectif étant de rendre aux représentations sémiotiques, ici les représentations figurales, leurs qualités heuristiques: **permettre la sélection des plans**, les flèches indiquent les interactions privilégiées. Les représentations étant simultanément présentes les actions se situent aussi fréquemment dans les sens réciproques.

Deux expérimentations ont été nécessaires pour mettre au point la coordination des représentations en présence. Nous pensions, après les premières observations (Rommevaux, 1991, p. 119), que les élèves devaient d'abord savoir résoudre les problèmes sur la maquette et être en possession des règles de la représentation en perspective parallèle pour pouvoir les utiliser avec profit. Nous avons alors utilisé *successivement* les deux types de représentation. Les résultats de l'évaluation finale n'ont

pas été probants. Lors de la seconde expérimentation, celle que nous allons présenter, les deux types de représentation étaient présents dès le début de l'apprentissage, avant que les élèves ne soient en possession des règles mathématiques qui les fondent. Les résultats d'études déjà faites montrent que la fonction de communication est disponible très tôt, il suffisait, par différenciation fonctionnelle, de développer la fonction de traitement de ces mêmes représentations sémiotiques¹⁷. La séquence d'apprentissage est fondée sur un travail d'observation de variations concomitantes sur deux types de représentations. Les variations sur une représentation "2D pour 3D" sont observées en coordination avec celles que l'on effectue systématiquement et non pas de manière illustrative ou indicative sur une représentation de type maquette. Pour conduire ce travail, la tâche mathématique choisie est la construction des sections planes d'un cube. Ce choix a été dicté par l'importance de ces sous-figure planes dans la résolution des problèmes de géométrie tridimensionnelle, et la difficulté qu'ont les élèves à les imaginer (Rommevaux, 1991 p. 119). Le choix s'est porté sur le cube car il offre la plus grande variété de sections planes. Cet objet n'a pas été choisi comme modèle d'un objet mathématique précis mais comme outil permettant d'apprendre à discerner les plans, en articulation avec le fonctionnement des représentations en perspective parallèle.

Nous allons étudier maintenant les différentes phases de la séquence expérimentée. Les maquettes que nous avons utilisées tout au long de l'apprentissage sont toutes en acétate transparent pour rétroprojecteur et possèdent toutes les qualités que nous avons détaillées à la fin du paragraphe II. La trame de la séquence d'apprentissage est donnée par la coordination des représentations en présence:

– le langage naturel: registre sémiotique indispensable pour donner aux représentations "2D pour 3D" leur troisième dimension, pour donner

17 Ces deux modes de présentation d'un concept ont été étudiés par P. Oléron: *L'erreur est sans doute de croire à une solution générale alors que le niveau des sujets, en particulier leur capacité à comparer les stimuli, joue un rôle important voire déterminant. Pour la formation des concepts on tiendra compte de la complexité des données ; la présentation successive est en un sens un moyen d'analyser celle-ci en amenant à les considérer l'une après l'autre et non en bloc. Mais l'élément de rétention mnémonique intervient alors en un sens défavorable.* (Oléron, 1963, p. 23).

les hypothèses – faire de la figure une figure géométrique –, mais aussi pour désigner les différents plans en présence – la désignation participe ici à la fonction d’objectivation – et participer à la coordination des résultats plans qui ne peut se faire que par l’intermédiaire d’un discours explicite ou intériorisé ;

– une maquette en acétate transparent modèle du solide de référence – objet 3D ;

– des représentations en perspective parallèle et des représentations de sections planes de solides – représentations sémiotiques du registre figural 2D.

Les trois phases de l’apprentissage vont jouer sur ces trois types de représentation et prendre en compte les analyses que nous avons développées précédemment ainsi que celles développées par R. Duval dans (*Duval, 1994*).

Phase exploratoire

La première phase a été précédée d’un prétest et d’un état des lieux, d’une harmonisation connaissances des élèves, essentiellement au niveau du vocabulaire et des définitions déjà données au collège.

Cette première phase met en *concurrence ou en synergie* les espaces bi et tri-dimensionnels, l’objectif de cette phase est la prise de conscience par les élèves de la variabilité des directions de plans. Elle se déroule dans l’espace sensible. Une première feuille est proposée aux élèves¹⁸ ainsi qu’une maquette de cube et le dessin de quatre formes planes. La tâche : répondre par OUI ou NON à la question :

— Pouvez-vous obtenir, en “coupant” le cube, le polygone dessiné ?

Il était demandé aux élèves de donner les raisons de leur choix. Précisons également que les dimensions du cube étaient données et que les élèves pouvaient fournir tout type d’arguments. Ces premières réponses données, les feuilles sont ramassées et les élèves reçoivent une nouvelle feuille et des rectangles de carton dans lesquels des formes ont été évidées. La tâche est la même que précédemment avec la question :

¹⁸ Les élèves, en classe c’est-à-dire avec l’objet matériel, travaillent en binôme. Mais ensuite le travail de mise au point – la rédaction, si importante pour l’objectivation – se fait individuellement et est corrigé par le professeur.

– Pouvez-vous obtenir, en “coupant” le cube, le polygone évidé ?

La première question était accompagnée de quatre formes, la seconde est accompagnée de six formes évidées dont les quatre précédentes que les élèves peuvent reconnaître car elles portent les mêmes numéros.

Si dans la première tâche les deux espaces bi et tri-dimensionnels coexistent, dans la seconde les plans peuvent être matériellement plongés dans l'espace du cube dont certaines formes sont issues. Cette action est la même que celle que faisaient les tailleurs de pierres autour du XIII^e siècle, les élèves ne la font pas spontanément. Ils montrent aussi, en “collant” les formes sur les faces que pour eux les seuls plans existants sont ceux déjà matérialisés. Mais, ce pas franchi certains, manifestent un grand intérêt pour les découvertes qu'il suscite. Des raisons données pour refuser certaines formes sont remises en cause et discutées. Certains binômes voudraient que toutes les formes s'enfilent autour du cube¹⁹: le pentagone régulier en particulier subit beaucoup d'outrages!

Dans la première tâche les feuilles portant les formes sont posées sur la table ou *mises à côté du cube*, pour identifier les sections il faut les imaginer. Les explications fournies pour refuser les formes sont très révélatrices des conceptions des élèves: les élèves transfèrent au solide les propriétés des formes planes qui le caractérisent, ici le carré. Les polygones ayant *plus de quatre côtés* sont en général refusés, tous les polygones ayant *un angle droit* généralement acceptés comme le triangle rectangle ou le trapèze rectangle.

Lorsque les polygones sont présentés sous forme de gabarits la maquette va permettre une *montée en dimension*: le plan “entoure” le cube, plusieurs gabarits enfilés autour du cube visualisent la variabilité des directions de plans et des formes des sections. Les élèves déduisent de la réussite ou de l'échec de ce plongement certaines des propriétés des sections: par exemple le parallélisme de côtés du polygone dès que leur nombre est supérieur à quatre. Les propriétés ne sont pas constatées mais leur nécessité est établie par la manipulation et l'observation des figures en présence.

Cette séance qui ne dure qu'une heure reviendra comme un point de repère tout au long des séances suivantes qui vont permettre aux élèves d'entrer dans la phase plus discursive de l'apprentissage. Ils apprendront

19 On trouvera en annexe les représentations réduites des quatorze formes proposées.

au cours de la phase suivante comment ont été construits les polygones sections dont les formes leur ont paru bizarres.

Phase de traitement figuratif

Avant de détailler le déroulement de la recherche associée à la dernière feuille de cette phase – la plus longue –, nous voudrions faire le point sur les connaissances supposées des élèves à ce stade. Ils ont presque tous vu au collège des représentations en perspective parallèle, savent que deux droites parallèles dans l'espace sont représentées par des droites parallèles sur le dessin et que dans les directions parallèles les proportions sont conservées²⁰. Ils connaissent également les différentes façons de définir un plan.

L'objectif de cette phase est de donner aux représentations en perspective parallèle, qui ont à ce stade une fonction de communication, la fonction de traitement qui en fera un outil indispensable pour l'heuristique d'un problème. Cette nouvelle fonction sera acquise par l'étude des variations concomitantes des traitements sur la maquette et sur les représentations "2D pour 3D". La *nécessité* des propriétés d'incidence sera suggérée par les tracés sur la maquette, les règles seront ensuite institutionnalisées et réutilisées au fur à mesure de la complexification des tâches associées à la recherche des différentes sections.

On trouvera en annexe 2 le libellé de la dernière feuille de cette phase qui en comporte cinq. Après avoir découvert une section triangulaire, deux sections quadrilatères – un parallélogramme et un trapèze – une section pentagonale, la feuille que nous allons étudier fait découvrir une section hexagonale. Les textes sont toujours proposés sur le même modèle: trois points sont donnés sur trois arêtes du cube, les variations de leurs positions ou des situations relatives des arêtes qui les portent, vont nous permettre de gérer la complexité des tâches, qu'elles soient mathématiques ou heuristiques.

Trois tâches vont contribuer à la coordination des représentations en présence au travers des différentes appréhensions d'une figure:

– le dessin sur la maquette de la section, seule tâche faisant réellement intervenir l'axiomatique de la géométrie tridimensionnelle, –

²⁰ Les calculs de proportionnalité seront repris à cette occasion.

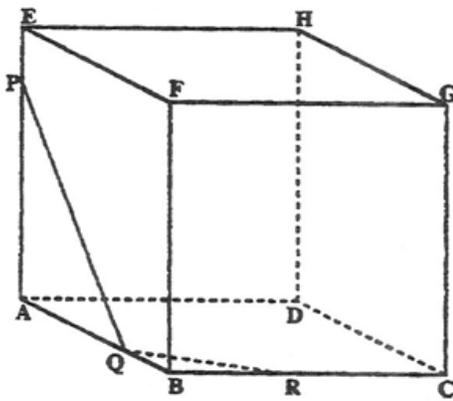
appréhension perceptive et manipulation demanderont, d'une feuille à l'autre à être appuyées par une appréhension discursive et opératoire: tout ne se voit pas sur la maquette;

– la **représentation en vraie grandeur du polygone section** dont la nature a été découverte sur la maquette – il s'agit ici d'une tâche de construction plane qui va demander une appréhension séquentielle de la figure. Cette tâche, par les détours que nécessitent les constructions auxiliaires, va impliquer la sélection de plans – autres que les faces du solide –, ainsi que des descentes et montées en dimension, des coordinations de résultats. Toutes ces opérations sont facilitées par la mobilité et la transparence de la maquette;

– enfin, la troisième tâche est la **représentation de la section obtenue, sur l'une ou l'autre des deux représentations en perspective données**, – ce sont ici les variations concomitantes sur les deux types de représentation qui vont développer l'appréhension opératoire des représentations en perspective parallèle.

La première tâche permet de découvrir la nécessité des règles de la géométrie tridimensionnelle, celles-ci ne doivent pas être abstraites à partir du constat des résultats de leur application sur des représentations comme cela est fait dans la plupart des manuels mais leur pertinence doit s'imposer dans l'exploration des objets, maquette et figures, qui sont manipulés. Elles seront réinvesties dans la tâche de dessin des sections sur la maquette au fur et à mesure que celles-ci se compliquent. Les deux autres tâches tendent à développer ce que l'on peut appeler *la vision dans l'espace*, et plus spécialement le *discernement des plans*. La seconde tâche par les multiples directions de plans qu'elle nécessite permet l'appréhension opératoire de la variabilité des directions de plans. La troisième tâche prend, au fur et à mesure de l'évolution de l'apprentissage de plus en plus d'importance. Jouant sur les contraintes de l'organisation de la classe on demande aux élèves de terminer le travail à la maison, n'ayant plus de maquette mais seulement les représentations en perspective parallèle ils doivent transcrire sur celles-ci le plus possible de renseignements de façon à poursuivre leur travail. Ces représentations n'ont pas été construites par les élèves mais ils peuvent en identifier les éléments conservés en vraie grandeur et choisir le point de vue en nommant les sommets, elles vont peu à peu remplacer la maquette et acquérir par ce biais la *fonction de traitement*.

La première tâche proposée est le dessin sur la maquette de la section plane définie par les trois points donnés. Après avoir nommé les sommets du cube et placé les points P , Q et R conformément au texte donné ²¹ les élèves doivent dessiner sur les faces du cube les segments côtés du polygone section. Les qualités de la maquette: mobilité, transparence, vont permettre de découvrir certaines des propriétés d'incidence. Par exemple le parallélisme des droites d'intersection sur deux faces parallèles du cube.



Nous avons représenté ci-contre – en perspective obligatoirement – les tracés obtenus sur la maquette à partir des données. Ces tracés étant faits, les élèves ont eu la surprise de ne trouver aucun théorème, aucune action perceptivo-gestuelle susceptible de leur permettre de continuer immédiatement le tracé.

Figure 16

La situation demande alors à être analysée collectivement.

L'intersection de deux plans étant une droite, deux procédures mathématiques sont disponibles:

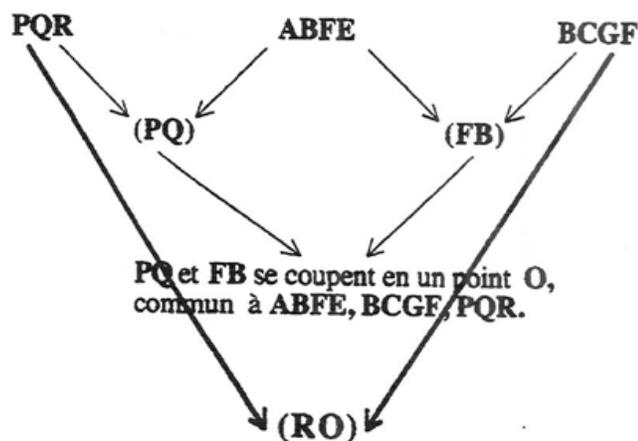
- on peut en déterminer deux points: c'est le cas des points donnés qui sont sur des arêtes,
- on en connaît un point et la direction: c'est une procédure que les élèves connaissent à ce stade de l'apprentissage.

²¹ Cette tâche a, au tout début de l'apprentissage posé quelque problème aux élèves: la mobilité de la maquette est ici un handicap. Notons également que la notion de section plane est à définir et rappeler très souvent. Seule l'expérience de la *pomme de terre* (Bonafe, 1985, p. III.1) permet aux élèves de comprendre la différence entre section plane et solide résultant de la coupe. Assimiler cette distinction demande un certain temps.

Examinons la situation pour faire un choix entre ces deux procédures.

Dans l'impossibilité de connaître la direction commune des deux droites intersections du plan PQR et des plans $ADHE$ et $BCGF$, peut-on trouver un point, autre que P ou R commun à l'une des faces et à PQR ? Il faut rappeler que l'ensemble des points communs à deux plans est leur droite d'intersection et que lorsqu'on cherche un tel point on est guidé par cette propriété. Les élèves sont invités à faire un recensement des renseignements déjà en leur possession.

Le professeur doit alors reprendre la classe pour étudier avec les élèves les intersections des différents plans en présence. Cette recherche est schématisée ci-dessous.



Ce schéma indique les intersections de plans et de droites. Fait avec les élèves il les aide à analyser formellement la situation, ils doivent ensuite déterminer sur leurs représentations le point O .

Figure 17

La procédure que nous proposons pour cette détermination utilise les interactions entre espaces bi et tri-dimensionnel, descente et montée en dimension. Il faut "sortir" du cube pour déterminer le point O qui se trouve sur la droite BF et dans le plan de la face $ABFE$. Cette face n'étant qu'une figure du plan il faut donner une autre représentation de celui-ci. Sur une feuille de papier par exemple, reproduire le carré en prolongeant ses côtés, placer les points P et Q , déterminer O puis, recommencer avec le plan de la face $BCGF$ pour déterminer le point S qui, enfin, peut être placé sur l'arête CG . Procédure illustrée ci-dessous.

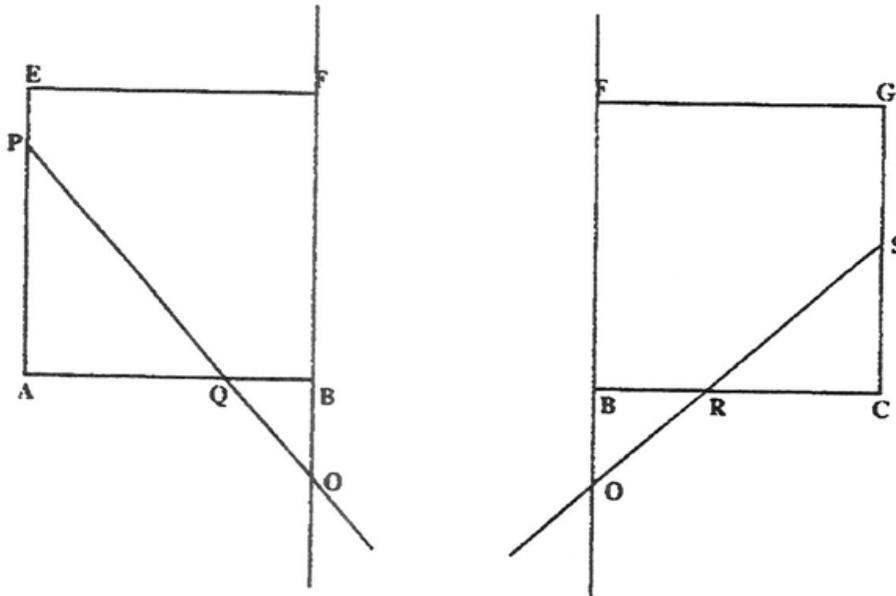


Figure 18

Pour aider les élèves ayant des difficultés à imaginer ces interactions et l'infinitude des plans nous avons proposé de prendre une feuille de papier de la plier en deux, d'appliquer le pli sur l'arête BF de la maquette, de "décalquer" chacune des faces $BFEA$ et $BFGC$ puis de déplier cette feuille. On peut alors, en dimension 2, dessiner la droite PQ , son intersection avec le "pli": O , puis la droite RO qui coupe l'arête CG en S . On replie ensuite la feuille et on peut placer le point S sur CG , toujours en "décalquant". **Sélection des plans utiles, traitement du problème bidimensionnel, coordination des résultats et plongement dans l'espace tridimensionnel** sont ainsi mis en action. La figure ci-dessous – à gauche – représente la feuille dépliée et les constructions effectuées. Elle peut aussi permettre aux élèves de mettre en place des procédures de calculs des segments en cause. À droite le dessin de la section sur la maquette est terminé en utilisant les propriétés d'intersection de deux plans parallèles par un même plan. La transparence permet de comprendre cette construction et les élèves "reportent" PQ sur la face $CDHG$ et tracent la parallèle à PQ passant par S . Ces constructions permettant de terminer la représentation ont déjà été effectuées pour les sections précédentes.

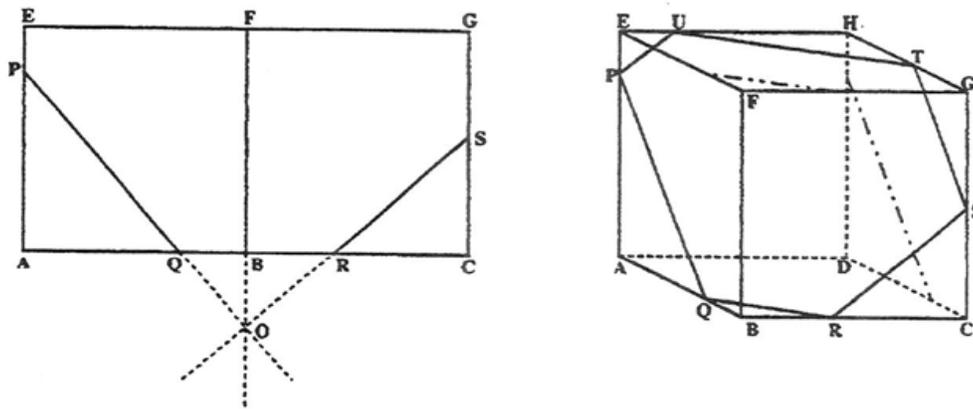


Figure 19

La première tâche terminée: la section est dessinée sur la maquette, la seconde tâche demande de la construire en vraie grandeur sur la feuille. L'appréhension séquentielle de la figure, nécessaire à toute construction, va amener les élèves à "entrer" dans le cube. Les traces du plan PQR sur les faces du cube ne suffisent pas à déterminer le polygone section. Dès qu'il a plus de trois côtés les mesures des angles²² ou de certaines diagonales sont indispensables pour le *rigidifier*. Pour déterminer la longueur des segments PQ et QS par exemple – ce qui est suffisant car ensuite le parallélisme prend la relève –, certains triangles, si possible rectangles, doivent être imaginés. La mobilité de la maquette permet de poser le cube sur la table de façon à *voir* que les triangles PBR et QBS sont rectangles en B . L'orthogonalité de toute verticale et d'un plan horizontal, a quelquefois été vue au collège, le théorème d'orthogonalité droite-plan peut être donné à cette occasion. C'est, dans l'apprentissage proposé, le seul théorème sur l'orthogonalité que nous ayons institutionnalisé. Les détours de l'appréhension séquentielle ont, tout au long de la construction des sections, utilisés la mobilité de l'objet maquette pour *casser* la position privilégiée des faces. L'objectif de la construction, la formulation de la tâche ont, de plus, permis de sélectionner dans l'objet diverses directions de plans et de *filtrer* les informations qu'il fournit.

²² Il n'est pas possible à ce niveau d'introduire ces notions. Pour la seconde section proposée – un parallélogramme – beaucoup d'élèves transférant à la section les propriétés de l'objet tridimensionnel ont dessiné un rectangle.

Les figures ci-dessous montrent les constructions effectives ou imaginées sur la maquette et la représentation de la section en vraie grandeur²³. Les élèves devaient terminer la construction en l'absence de l'objet et l'une des représentations du cube avait pour mission de recueillir les informations utiles pour mener la tâche le plus loin possible. La représentation de gauche montre ce que les élèves relevaient à la fin de l'heure souvent à main levée et complété par des cotes ou informations chiffrées.

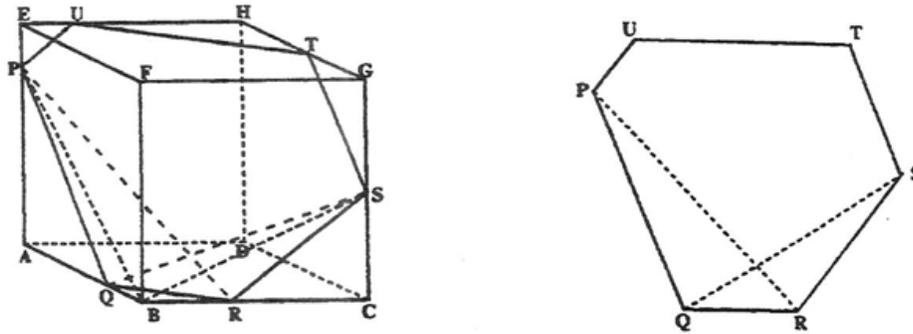


Figure 20

Sur les représentations en perspective parallèle la détermination du point O est beaucoup moins coûteuse, comme le montre la figure ci-dessous. Mais elle nécessite de savoir avec précision dans quel plan se placent les traits que l'on dessine. Les efforts faits pour cet apprentissage sont ainsi récompensés!

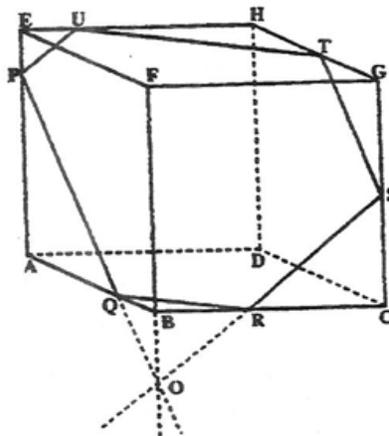


Figure 21

²³ Les dessins sont réduits.

La donnée de deux représentations *muettes* du solide permet aux élèves de travailler sur l'une d'elles et d'utiliser la seconde pour choisir le *meilleur point de vue*, c'est-à-dire celui qui permet de "voir" avec le moins de déformation possible les sous-figures planes utiles. Ils ont ainsi appris à changer de point de vue en modifiant la désignation des sommets, ce qui leur donnera ensuite quelque liberté lorsqu'eux-mêmes construiront les représentations.

Cette troisième tâche est essentielle: les variations concomitantes sur l'objet matériel et sur les représentations en perspective, développent leur fonction heuristique en transformant les actions sensibles en tracés et mettant en œuvre l'appréhension opératoire de cette représentation.

Phase d'institutionnalisation

Nous avons noté dans les phases précédentes que des *moments d'institutionnalisation* étaient intégrés au déroulement de l'apprentissage. Chacune des règles d'incidence dont la nécessité a été mise en évidence sur l'objet maquette a été donnée explicitement et les variables, "positions des points" sur les arêtes sont choisies de façon à obliger les élèves à les réutiliser pour mener à bien la première tâche pour la section suivante.

Cette dernière partie de l'apprentissage a essentiellement consisté en exercices dans lesquels étaient donnés des solides de référence autres que des cubes. Les règles de la perspective parallèle ont été données mais, nous estimons qu'il est encore trop tôt pour que les élèves en aient la totale maîtrise. Les textes étaient toujours accompagnés d'une représentation pour laquelle le plan de projection est indiqué ce qui, dans les exercices non métriques, suffit à repérer dans la représentation les figures déformées ou non déformées par la projection.

Cette période de transfert a été un peu difficile pour certains élèves: pour ceux-ci, la période de travail sur l'objet aurait du se prolonger et ne pas se dérouler seulement sur le cube (Rommevaux, 1997, p. 344 note). Ces mêmes élèves ont éprouvé une certaine satisfaction à faire – enfin! – une déduction correcte. Comment être sûrs que les plans discernés sur la représentation sont bien des plans dans l'espace tridimensionnel, sinon par l'application explicite de certaines règles d'incidence?

Évaluation

Cette séquence d'apprentissage a été expérimentée dans une situation normale de classe dans deux classes de seconde d'un lycée de Montbéliard (Doubs). Celle dont j'avais la charge avait, de par les options choisies par les élèves, un profil plutôt littéraire – la plupart des élèves ont choisi une section L en première –, l'autre seconde avait, elle, un profil plutôt scientifique – confirmé par les orientations en première S. Dans cette dernière classe, le professeur a pris la responsabilité de l'expérimentation. Nous faisons le point de la progression après chaque séance. Deux classes témoins, de deux lycées de Strasbourg, ont été associées à l'expérimentation.

Certaines remarques doivent être faites: j'étais à la fois professeur, chercheur et expérimentateur, je n'ai visité aucune des autres classes et toutes les classes étaient des classes courantes de lycées – certaines homogènes d'autres hétérogènes. Les expérimentations dans ces conditions ne permettent pas une exploitation exhaustive des situations, beaucoup de faits échappent. Seules les traces écrites peuvent vraiment être étudiées.

Avant tout apprentissage les élèves de trois des classes ont été soumis à un prétest: "les triangles dans le cube" plusieurs fois étalonné, depuis qu'en 1984 l'équipe de G.Audibert l'a proposé à de nombreux élèves (Rommevaux, 1997, p. 201). Il s'agit de savoir si les élèves *lisent* sur une représentation en perspective parallèle une figure de géométrie bidimensionnelle ou tridimensionnelle. Toutes les classes de seconde étant soumise à une évaluation nationale au début de l'année scolaire nous avons également une épreuve indépendante de tout enseignement nous permettant de classer les performances globales des élèves.

Après apprentissage expérimental ou "classique" les élèves ont été soumis à une évaluation finale dont quelques questions ont été étudiées dans le paragraphe III. Les questions proposées comportaient deux volets: les élèves devaient répondre par OUI ou NON à des questions du type: *deux droites sont-elles dans un même plan ?* et les variantes sur le parallélisme ou l'intersection qui s'en déduisent, ou plus généralement: *quatre points donnés sont-ils coplanaires?* Une justification était demandée dans laquelle nous souhaitions trouver mention des plans permettant de mettre en évidence les différents pas de la déduction nécessaire à la justification. Cette épreuve comportait quatre exercices. Nous laisserons de côté le

dernier dans lequel nous voulions voir si les élèves concevaient qu'un même trapèze pouvait être section d'un cube et d'une pyramide à base carrée. Les non-réponses ont été nombreuses à cet exercice difficile. Les trois autres exercices comportaient en tout douze questions indépendantes, de difficulté croissante, dont les solides de référence étaient un cube et une pyramide à base carrée. Les taux de non-réponses sont peu élevés pour ces trois exercices. Pour les questions pour lesquelles un doute se fait sentir sur l'interprétation de la figure "2D pour 3D" les non-réponse peuvent traduire une prise de conscience de l'ambiguïté de ces représentations.

La prise en compte dans les tableaux croisés du double indice (M_i, H_j)²⁴ se trouve justifiée par les variations des pourcentages conjoints des réponses exactes et des réponses justifiées: réponses exactes se traduisant par OUI ou NON et justifications réussies mettant en avant les plans pertinents pour la démonstration²⁵. Les variations observées dans les tableaux sont identiques dans chacune des classes: ce tableau mesure donc bien la difficulté des exercices. Il permet de déceler les questions dont la justification est nécessaire pour répondre correctement: on trouve alors pour un faible taux de réponses exactes un taux élevé de justification réussie.

Une dernière remarque avant la comparaison entre les classes témoins et les classes expérimentales. Les questionnaires ont été conçus sous deux modalités: deux points de vue différents ont été choisis pour les représentations des solides. Les tests ont montré que les taux de réussite sont indépendants de la représentation proposée.

Compte tenu de l'hétérogénéité des niveaux des classes, nous avons choisi d'apparier des élèves de l'une des classes témoins – celle ayant subi les deux tests – et ceux des classes expérimentales ayant les mêmes résultats aux deux prétests et de mesurer l'évolution des couples ainsi formés. Neuf élèves de chacune des classes expérimentales ont été appariés à dix huit élèves de la classe témoin. Nous avons pour chacun de ces couples calculé les différences algébriques – pour les deux élèves appariés –, entre les nombres de bonnes réponses et les nombres de ces réponses correctement

24 Tableau présenté à la fin du § III.

25 Les élèves avaient à leur disposition au début du questionnaire toutes les règles d'incidence utiles pour la justification des réponses.

justifiées. Il apparaît que la différence du nombre total de réponses exactes est seulement de quatre (Δ_j) en faveur des élèves des classes expérimentales et de trente neuf (Δ_e) toujours en leur faveur, pour les réponses justifiées. L'exemple ci-dessous permettra d'éclairer notre méthode de comparaison:

Elè.	Eva2	T1	11	12	13	14	15	21	22	31	32	33	34	35	E4	>5	Δ_e	≥ 8	Δ_j
EA	82%	9	9	9	9	9	7	7	9	8	6	3	7	6	5'	11		6	
ET	82%	9	7	9	8	8	6	1	6	1	0	3	3	8	0	7	4	4	2
IA	69%	8	9	9	9	3	7	7	0	6	0	3	3	9	0	7		4	
IT	71%	8	7	6	6	1	1	2	6	6	2	2	6	6	4	7	0	0	4
LB	73%	6	7	7	9	9	8	9	0	6	6	2	0	0	0	8		4	
LT	73%	6	7	7	8	6	7	7	9	7	6	6	6	3	4	11	-3	2	2

EA et ET codent respectivement des élèves d'une classe expérimentale et de la classe témoin. La colonne Eva2 donne les résultats à l'évaluation nationale à l'entrée en seconde et la colonne T1 les nombres de triangles reconnus au prétest. Les élèves ayant les mêmes résultats à ces épreuves préalables sont appariés, on note dans les colonnes 11 à 35 les codes de leurs réponses aux douze questions des trois premiers exercices de l'évaluation finale, dans E4 on trouve les codes des réponses à l'exercice 4. Les codes supérieurs à 5 codent les réponses exactes, les codes 8 et 9 des réponses exactes et justifiées de façon "satisfaisante": les plans utiles sont mentionnés dans la justification donnée. Les totaux pour chaque élève sont donnés dans les colonnes nommées : > 5 et ≥ 8 et les différences positives ou négatives dans les colonnes codées Δ_e et Δ_j .

Les différences se font donc sentir sur l'*appréhension discursive des figures et non sur l'appréhension perceptive* ce qui confirme en quelque sorte que voir dans l'espace est: **discerner les plans en présence.**

Conclusion

La géométrie tridimensionnelle met, en général, en œuvre deux registres de représentations sémiotiques: le registre figural et le langage naturel indispensable à l'identification des représentations et aux traitements géométriques. La coordination de ces registres, difficile en géométrie plane est rendue encore plus problématique lorsqu'il faut, dans les représentations planes d'objets tridimensionnels, identifier certaines

sous-figures déformées par les projections ou discerner des plans à partir de quelques uns de leurs éléments représentés.

Les recherches dont nous avons rendu compte montrent que les élèves de collège peuvent apprendre à représenter les solides simples et à les identifier, sans connaître les règles de la projection parallèle sur un plan. Mais, ces mêmes élèves (Bonafe, 1991) ont des difficultés à reconstruire un solide à partir de sa perspective parallèle, à représenter un solide sous un autre point de vue que celui donné. À ce niveau, les deux espaces bi et tri-dimensionnels paraissent presque indépendants. Ces collégiens ne discernent pas sur une représentation en perspective parallèle les faces utiles pour la construction d'une section et la présence de l'objet réel n'améliore pas en général les performances (Chevalier, 1989).

Le discernement des plans est, en effet, un seuil difficile mais essentiel pour l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle. Difficile, aussi bien sur un objet matériel que sur une représentation en perspective parallèle et essentiel, car sur les plans reposent toutes les étapes des démonstrations. "Voir dans l'espace" implique, pour l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle, le discernement des plans:

Nous ne "voyons" des objets, sur de telles projections, que quand nous les connaissons déjà: un dessin dans le plan avec sa perspective, ses différents plans n'est assimilé par l'observateur que s'il a intégré préalablement cette structure dans son cerveau. (Hubbard, 1990 p. 7)

Peut-on apprendre à discerner les plans sur une représentation en perspective parallèle? Si oui, comment? Nous avons fait l'hypothèse, comme d'autres chercheurs, que la nécessité de structurer l'objet pour que son image résiste aux rotations²³, de discerner les plans pour analyser et coordonner les différents éléments bi ou uni-dimensionnel imposait, pour un temps déterminé, l'introduction d'un objet matériel.

23 Nous empruntons cette expression à R. Baldy (Baldy, 1989, p. 425) qui lui aussi constate que l'introduction de l'objet matériel doit se faire à un moment précis même pour les adultes en préformation.

Nous avons pu constater que cette introduction facilitait, pour les élèves des classes expérimentales, l'utilisation des représentations en perspective parallèle à des fins de traitement. Cet objet n'a pas été choisi comme modèle mathématique d'un objet précis mais comme outil permettant d'apprendre à discerner des plans, en articulation avec le fonctionnement des représentations en perspective parallèle.

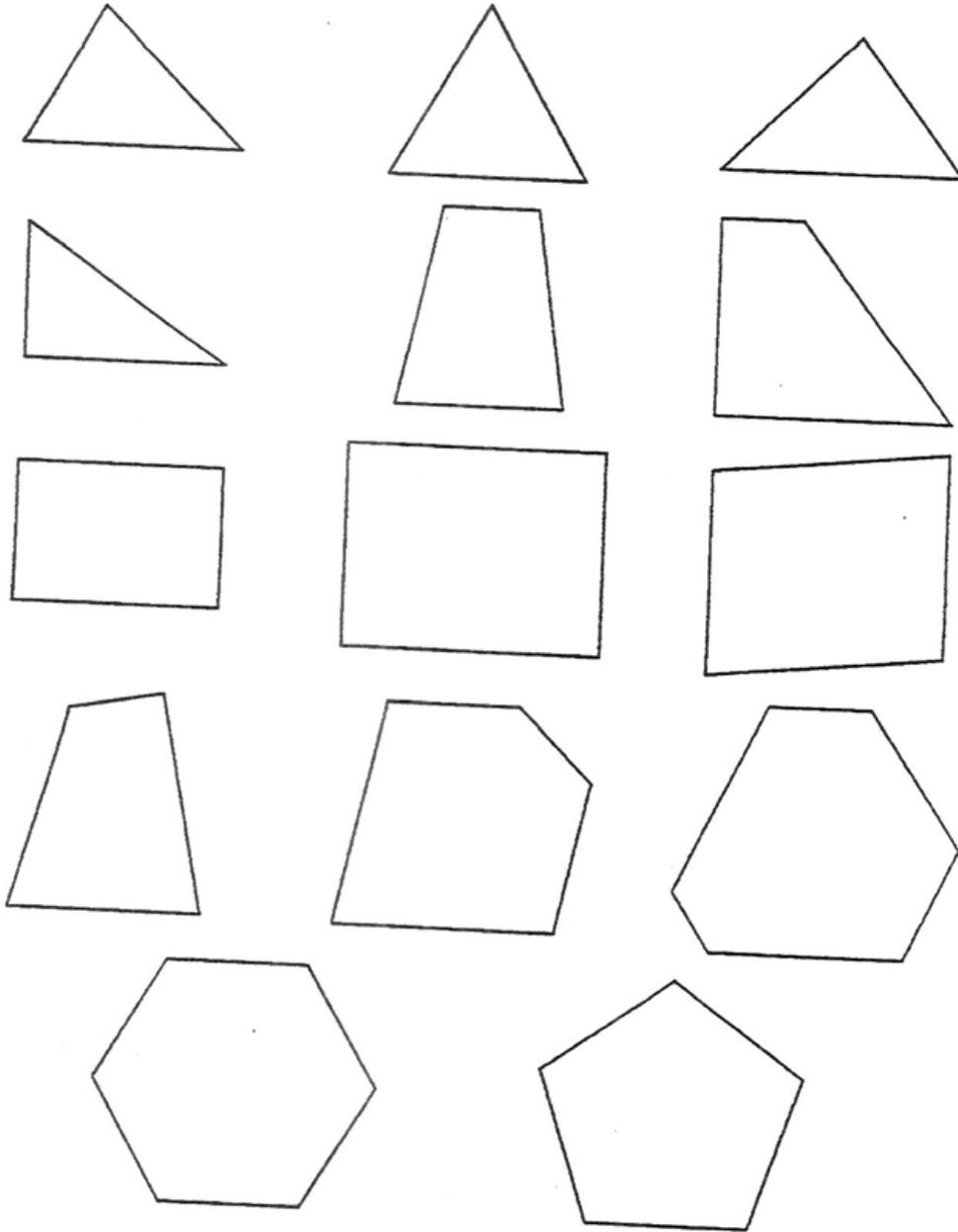
Les résultats montrent que cet apprentissage donne aux élèves la capacité de déceler, sur des représentations bidimensionnelles, des sections planes et de les utiliser dans leur déduction, d'utiliser l'appréhension perceptive support d'une appréhension opératoire. Si tous n'ont pas franchi ce seuil, le plus grand nombre a compris qu'il était essentiel de commencer par bien identifier les plans. Ce seuil franchi, les élèves peuvent être alors en mesure de créer eux-mêmes les représentations en perspective parallèle utiles à la résolution des problèmes tridimensionnels.

Ce travail éclaire certaines questions non complètement résolues. Le problème du temps très long d'appropriation de l'appréhension perceptivo-opératoire d'une représentation "2D pour 3D" ainsi que la non conception de la diversité des sections d'un solide, permet de penser que la fréquentation des maquettes devrait être plus précoce. Mais, comme nous l'avons vu, les moments d'introduction et les tâches demandées déterminent la réussite de cet apprentissage: ces moments et ces tâches sont à déterminer. Le rôle du langage naturel dans la réussite du discernement des plans: *la formulation de la question*, dont à plusieurs reprises nous avons signalé l'importance, devrait être étudié de façon spécifique. Il nous était difficile en tant qu'acteur et observateur de discriminer son influence.

Nous ne pouvons pas ne pas nous poser la question de la place de l'outil informatique dans cet apprentissage. Cet outil peut-il aider au développement de l'"intuition" de l'espace qui sollicite la vue, le toucher, le mouvement? Voir bouger une représentation en perspective parallèle n'est pas perceptivement de même nature que voir – et faire – tourner un objet. Seul le regard participe à la première opération alors que le corps ajoute sa participation dans le second cas. Les travaux existants ne permettent pas encore de savoir quelles activités spécifiques à l'utilisation des ordinateurs pourront aider au franchissement de ce seuil du discernement des plans.

Cet apprentissage a été ressenti comme *difficile* par les “futurs scientifiques” qui situaient cette difficulté dans la *démonstration*. Par contre, les “futurs littéraires” peut être parce qu’ils savaient que cet apprentissage ne serait pas repris l’année suivante y ont trouvé un grand intérêt. Il nous semble que la *découverte* qu’une représentation peut s’analyser, qu’une démonstration peut être utile à la compréhension d’une figure leur sera profitable dans d’autres domaines que les mathématiques. Il suffit de lire certains textes de critiques ou d’historiens d’arts pour s’en convaincre. H. Damisch parle du feuilletage du plan pictural à propos de l’Autoportrait du Louvre de Nicolas Poussin (1650). E. Jollet, toujours à propos de Poussin, évoque la distinction que celui-ci faisait entre l’“aspect” et le “prospect”, le premier regard sur l’œuvre et son analyse plus profonde. Dans ces deux volets nous pouvons reconnaître l’appréhension perceptive et l’appréhension opératoire. La géométrie tridimensionnelle, par l’aspect **compréhension** des représentations planes et exécution de celle-ci, nous paraît devoir trouver une place dans l’enseignement des mathématiques pour tous les élèves.

Annexe 1



Formes contenues dans les enveloppes: échelle 60%

Annexe 2

Feuille 7

Noms, Prénoms:

date:

Classe:

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5 cm. $ABCD$ est une face, les arêtes (AE) , (BF) , (CG) et (DH) sont parallèles.

P est le point de l'arête (AE) tel que $AP = 4\text{cm}$,

Q est le point de l'arête (AB) tel que $AQ = 3,5\text{cm}$,

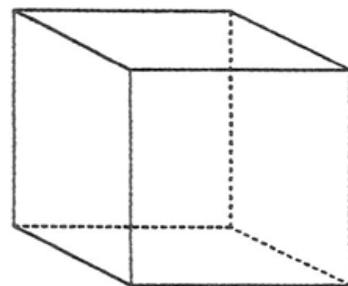
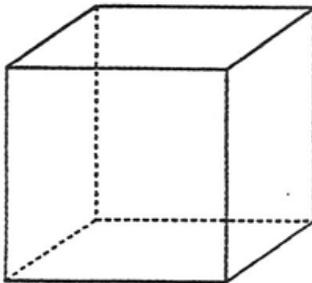
R est le point de l'arête (BC) tel que $BR = 2\text{cm}$.

On "coupe" le cube suivant le plan (PQR) , dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la section plan du cube.

Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.

Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue.

Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.



Exemple d'une feuille d'apprentissage.⁴

⁴ La figure de droite est une projection parallèle sur un plan parallèle à une face, l'angle des fuyantes est de 153° et le coefficient de réduction est de $3/5$. La figure de gauche est une projection parallèle sur un plan parallèle à une face, l'angle des fuyantes est de 35° et le coefficient de réduction est de $1/2$. Les figures sont réduites à l'échelle 70%.

Bibliographie

- BALDY, R. (1989). Comparaison de dessins d'objets en perspective cavalière avec un dessin modèle ou avec un objet réel. *European journal of psychology of education* v.IV n.3, pp. 419-428.
- BECHMANN, R. (1991). *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIII^e siècle et sa communication*. Picard éditeur, Paris.
- BELHOSTE, B. (1989). Gaspard Monge. *Pour la Science* n.146, pp. 66-73.
- _____. (1997). L'école du génie de Mézières, l'alliance entre théorie et pratique. *La Recherche* n.300, pp. 40-45 .
- BESSOT, A., EBERHARD M. (1987a). Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations. *Le dessin technique*, (P. Rabardel, A. Weill-Fassina éditeurs) Hermès, Paris, pp.61-71.
- _____. (1987b). Représentations graphiques et théorisation de l'espace des polycubes. Un processus didactique. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (G. Vergnaud, G. Brousseau, M. Hulin éditeurs). Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 87-108.
- BONAFE, F. (1985). *La genèse du problème SEC*. Edition Irem-USTL, Montpellier.
- _____. (1991). *La séquence PC, suite pas à pas des travaux des élèves*. Edition Irem-USTL, Montpellier.
- CARON-PARGUE, J. (1981). Quelques aspects de la manipulation. Manipulation matérielle et manipulation symbolique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. V.2.1, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 5-35.
- _____. (1985). *Le dessin du cube chez l'enfant: organisations et réorganisations de codes graphiques*. Editions Peter Lang, Berne.
- _____. (1987). Une approche de la genèse de la production graphique. Le dessin du parallélépipède. *Le dessin technique*, (P. Rabardel, A. Weill-Fassina eds) Hermès, Paris, pp. 35-42 .
- CHEVALIER, A. (1989). *Analyse du problème SEC. Dessin en perspective cavalière et vision de l'espace*. Edition Irem-USTL Montpellier.
- COMAR, P. (1994). *La perspective en jeu. Les dessous de l'image*. Ed. Découvertes Gallimard, Paris.
- DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères*, n.7. Topiques éditions, Pont-à-Mousson, pp. 121-138.

- _____.(1995a). *Signe et objet*. À paraître.
- _____.(1995b). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne.
- GAMBA, E., MONTEBELLI, V. (1996). Piero della Francesca peintre mathématicien. *Pour la Science*, n.224, pp. 68-75.
- MARTZLOFF, J. C. (1988). *Histoire des mathématiques chinoises*. Editions Masson, Paris.
- NORDON, D. (1992). Bloc-notes. *Pour la Science*, n.71, p. 7.
- OLÉRON, P. (1963). Les activités intellectuelles. *Traité de psychologie expérimentale VII. L'intelligence*. (J. Piaget, P. Fraisse éditeurs). P.U.F. Paris (1980), pp. 1-62.
- PAIS, L. C. (1991). *Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au collège: pratiques d'élèves, analyse de livres*. Thèse de doctorat, Montpellier II.
- PALMER, S., ROCK, I. (1991). L'héritage du gestaltisme. *Pour la Science*, n.60, pp. 64-70.
- PARZYSZ, B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir-savoir*. Thèse de doctorat de l'Université de Paris VII.
- _____.(1991). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. V.11, pp. 2-3, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 211-240.
- PANOFSKY, E. (1987). *La vie et l'Art d'Albrecht Dürer* (Première édition 1943) Edition Hazan, Paris.
- PEIFFER, J. (1993). Dürer, le peintre géomètre. *Pour la Science*, n.184, pp. 10-12.
- POTIÉ, P. (1996). *Philibert de l'Orme. Figures de la pensée constructive*. Editions Parenthèses, Marseille.
- ROMMEVAUX, M-P. (1991). Le premier pas dans l'espace. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v.4. Irem-ULP, Strasbourg, pp. 85-123.
- _____.(1997). *Le discernement des plans: un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.

- SAKAROVITCH, J. (1995). Stéréotomie et géométrie. *Mathématiques et Arts*. (M.Loi éditeur) Hermann éditeurs, Paris, pp. 79-91.
- TATON, R. (1951). *L'œuvre mathématique de G. Desargues*. Presses Universitaires de France, Paris.

