Lacroix e a popularização da geometria analítica*

CIRCE MARY SILVA DA SILVA**

Resumo
O francês Sylvestre Lacroix, professor da Escola Politécnica de Paris, foi autor de numerosos livros-texto abrangendo várias áreas da Matemática. Eles foram adotados oficialmente nos ginásios, colégios e no ensino universitário da França e tiveram também ampla penetração em outros países europeus, como, por exemplo, na Alemanha. No Brasil, pode-se dizer que houve um longo período de dominância dos livros de Lacroix, de tal maneira que o ensino de matemática no País, no século XIX, foi fortemente orientado pela obra de Lacroix. Em 1812, o brasileiro José Victorino Santos de Souza traduziu a terceira edição do livro de Lacroix, que era o livro-texto recomendado para a Academia Militar do Rio de Janeiro. O Tratado Elementar de Aplicação de Álgebra à Geometria não consiste numa simples tradução. Victorino separou a Trigonometria da Geometria Analítica. Ele não abordou as noções trigonométricas, iniciando o texto com a Geometria Analítica propriamente dita. Além disso, o autor contribuiu incluindo alguns temas que ele mesmo elaborou, no apêndice. Essa obra foi indicada como livro-texto para a disciplina de Geometria Analítica nos cursos de matemática, no Brasil, até a década de 70. Outro autor fortemente influenciado por Lacroix, no Brasil, foi José Saturnino da Costa Pereira, que em 1841 publicou o livro intitulado "Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica segundo o systema de Lacroix". Apresenta-se uma análise da referida obra procurando compará-la com aquela de Lacroix.
Palavras-chave: Geometria Analítica, Sylvestre Lacroix, álgebra, História da Matemática, José Victorino Santos e Souza, José Saturnino da Costa Pereira.

Abstract
The French Sylvestre Lacroix, a professor of the Polytechnic School of Paris, was the author of various text-books dealing with many areas of Mathematics. His books were officially adopted at schools and universities in France and also had a broad acceptance in other European countries such as Germany. In Brazil, it is possible to say that there was a long period of dominance of Lacroix's books – the teaching of Mathematics in the country during the 19th century was strongly guided by Lacroix's work. In 1812, the Brazilian José Victorino Santos de Souza translated the third edition of Lacroix's book, the text-book recommended to Rio de Janeiro's Military Academy. The Tratado

* Pesquisa financiada pelo CNPq.

** Circe Mary Silva da Silva é professora do Departamento de Didática e Prática de Ensino da Universidade Federal do Espírito Santo, doutora em Educação Matemática pela Faculdade de Matemática da Universidade de Bielefeld, Alemanha.

Elementar de Aplicação de Álgebra à Geometria (Elementary Treatise on the Application of Algebra to Geometry) is not a mere translation. Victorio separated Trigonometry from Analytical Geometry. He did not approach the trigonometry notions; he began the text with Analytical Geometry. Furthermore, the author contributed including in the appendix some themes that he elaborated himself. This work was indicated as a text-book to the subject of Analytical Geometry in Mathematics courses in Brazil until the 1970's. Another author strongly influenced by Lacroix in Brazil was José Saturnino da Costa Pereira, who published in 1841 a book entitled "Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica segundo o systema de Lacroix" (Application of Algebra to Geometry or Analytical Geometry according to Lacroix's system). This article presents an analysis of the above-mentioned work, comparing it with that of Lacroix.

Key words: *Analytical Geometry; Sylvestre Lacroix; Algebra; History of Mathematics; José Victorino Santos de Souza; José Saturnino da Costa Pereira.*

Aplicação da álgebra à geometria por Lacroix

Sylvestre François Lacroix (1765-1843) nasceu em Paris. Foi catedrático de Matemática da Escola de Guardas da Marinha, em Roquefort, 1782; membro da Comissão de Restauração da Instrução Pública, na França, em 1794; professor da Escola Politécnica de Paris, em 1799; exerceu também a docência na Universidade de Paris, em 1815, e, após, no Colégio de França. O ano de 1831, na Academia de Ciências de Paris, foi marcado pela polêmica que envolveu os trabalhos de Galois. Nessa época, juntamente com Poisson, Cauchy, entre outros, era também membro da referida Academia o matemático Lacroix. Juntamente com os demais matemáticos, leu e emitiu parecer sobre os resultados em teoria das equações alcançados por Galois[1]. Ficou muito conhecido por sua produção científica, escreveu inúmeros livros de Matemática para o ensino, que influenciaram o ensino de Matemática na França, no século XIX. Essas obras foram traduzidas para diversas línguas: alemão, inglês e português, entre outras. A Escola Normal, em

1 A carta de Galois, de 31 de março de 1831, fazia um apelo veemente ao presidente: "Eu lhe peço, senhor presidente, para libertar-me de minha intranquilidade, perguntar aos senhores Poisson e Lacroix, se eles talvez localizaram o meu tratado ou se eles tencionam apresentar a Academia um parecer sobre ele (...)" A resposta da Academia foi enviada em outubro do mesmo ano, ocasião esta em que Galois encontrava-se na prisão, onde afirmava que o trabalho "(...) não era suficientemente claro nem tão pouco suficientemente redigido, a fim de que pudesse ser julgado (...) Espera-se que o autor publique uma versão completa de seu trabalho, antes de dar-lhe um parecer final". (Wussing, p. 393).

Paris, foi fundada no mesmo ano que a Escola Politécnica (1794) e, entre seus professores, encontramos os proeminentes docentes Lagrange, Laplace, Monge, Hachette e Lacroix.

O livro-texto que Lacroix escreveu, intitulado *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie*, foi verdadeiramente o primeiro livro-texto sobre a Geometria Analítica plana. No século XIX, surgiram 27 edições em língua francesa dessa obra, tornando-se assim o livro-texto indicado nos colégios, academias militares, escolas normais, etc. Não há praticamente alterações nessas edições, sendo que a décima primeira, de 1863, é praticamente igual à versão da terceira edição do início do século XIX. Essa obra ficou conhecida não apenas na França, mas em vários países, onde foi traduzida e adotada no ensino, como, por exemplo, na Alemanha e no Brasil.

Lacroix foi, sem dúvida, o autor de livros-texto mais produtivo dos tempos modernos, se considerarmos as múltiplas edições de seus livros. Somente em língua francesa foram escritas por Lacroix e publicadas as seguintes obras por nós identificadas: *Traité élémentaire d'Arithmétique* (vigéssima edição em 1848); *Cours de Mathématiques à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations* (obra adotada pelo governo para os liceus, escolas secundárias e colégios); *Éléments d'Algèbre* (vigéssima primeira edição em 1854); *Éléments d'Géométrie* (décima oitava edição em 1863), introduzida nas escolas públicas e autorizada pelo ministro da Instrução Pública em 1861; *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie* (primeira edição em 1798 e vigéssima quinta edição em 1897); *Complément des Éléments d'Algèbre* (sétima edição em 1863); *Essais de Géométrie sur les Plans et les Surfaces courbes* (Éléments de Géométrie descriptive), sétima edição em 1863; Traité du Calcul différentiel et du calcul intégral; *Traité élémentaire de Calcul différentiel et du Calcul intégral* (sexta edição, revista e aumentada por Hermite e Serres em 1861-62 e nona edição em 1881); *Essai sur l'Enseignement en général et sur celui des Mathématiques en particulier* (1838); *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités* (quarta edição em 1863); *Introduction à las Géographie mathématique et physique; Introduction à la connaissance de la Sphère* (1832).

Lacroix inspirou-se em Lagrange e Monge para escrever seu livro-texto sobre Geometria Analítica. Gaspard Monge (1748-1818) muito conhecido por sua obra de Geometria Descritiva, escreveu também sobre Geometria Analítica. Foi um dos primeiros professores da Escola Politécnica de Paris, fundada em 1794, juntamente com Laplace. A exemplo de Lagrange, Monge não fez uso de diagramas geométricos. Na primeira edição do livro *Feuilles d'analyse appliqué à la géométrie*, de 1795, Monge inicia com a equação da linha reta no plano, estabelece as condições de perpendicularismo entre retas todavia, essas considerações são excluídas das edições posteriores, ficando em sua obra apenas os resultados referentes à Geometria Analítica a três dimensões. A edição de 1801 traz outro título *Applications de l'algèbre à la géométrie*. É o primeiro tratado, após o *Introductio* de Euler (1707-1783), em que as transformações de coordenadas e a pesquisa das superfícies do segundo grau recebem um tratamento original. A abordagem de Monge sobre as transformações de um sistema de coordenadas aproxima-se muito do atual tratamento, que utiliza matrizes. Analisandos-se ambas obras: a *Geometria Descritiva* e a *Aplicações da Álgebra à Geometria*, pode-se perceber que o autor aspirava sempre estabelecer uma conexão entre a Geometria e a Álgebra, ainda que, em cada caso, trate-se da elaboração de métodos independentes um do outro. Há um paralelismo entre os conteúdos tratados em ambos os livros no que se refere ao estudo da reta e do plano.

Lacroix conhecia a fundo o trabalho de Monge, tinha sido seu aluno, e foi posteriormente seu colega. Era necessário escrever um trabalho introdutório para a Geometria Analítica em duas dimensões. Monge e Lacroix deram à Geometria Analítica a sua forma final, mas não o seu nome, este foi dado por Biot em 1802, na obra *Essai de géométrie analytique*. O livro texto de Biot foi muito usado nos Estados Unidos, enquanto que o de Lacroix foi o livro-texto de quase todo o século XIX, na França, e também no Brasil, sendo posteriormente substituído pelo livro de Comte, sobre o mesmo assunto. Monge foi o modelo de que se serviu Lacroix para apresentar um tratamento da Geometria Analítica no plano, mas seu inspirador verdadeiro foi Lagrange. O artigo de Lagrange de 1773, intitulado "Soluções analíticas de quaisquer problemas sobre pirâmides triangulares", foi a obra-mestra do tipo de geometria que Lacroix tinha em mente. Segundo Delambre (1749-1822) a ressureição da aliança da geometria com a álgebra, iniciada por Descartes, foi devida a Monge e sua influência foi estendida aos livros elementares através das obras de Lacroix e Biot (Boyer, 1956, p. 211).

Lacroix concebeu a Geometria Analítica somente a partir de Viète e Descartes. Antes deles, a álgebra era apenas um meio para facilitar a aplicação de certos teoremas de geometria na resolução de determinadas questões. O trabalho de Descartes serviu como ponto de partida, mas foi segundo Lacroix, somente no século XVIII, que os matemáticos começaram a analisar as curvas a partir das equações gerais a duas incógnitas. Esse trabalho, devido principalmente a Euler e Cramer, facilitou o desenvolvimento do Cálculo Diferencial no século XVIII.

A Mecânica, que começou a desenvolver-se graças aos trabalhos de Descartes, Huyghens e Newton, não se beneficiou, no século XVII, das aplicações da álgebra. A razão disso, segundo Lacroix, era a predileção que Newton tinha pela síntese, muito ao gosto dos cientistas da época. A situação alterou-se somente com Euler, que introduziu a análise sem restrições. Ele foi o primeiro que procurou deduzir as leis do movimento dos corpos inteiramente a partir do Cálculo. Com isso a Mecânica tomou um impulso muito grande no século XVIII.

Lacroix questiona: "Qual deve ser o conteúdo de um tratado de aplicação da álgebra à geometria, quando este se destina a alunos que devem se consagrar aos estudos das ciências físico-matemáticas, por exemplo a fortificação, a artilharia, a química e a mineralogia?" Sua resposta: "A obra deve conter tudo o que é necessário para compreender as obras mais modernas" – supõe-se que aqui o autor esteja se referindo ao cálculo diferencial e integral, a mecânica e a física. Além disso, o autor acentua que a obra deve mostrar o duplo ponto de vista sob o qual se pode considerar a Geometria Analítica: primeiramente, da maneira como os inventores a trataram, como um meio de combinar os teoremas da geometria; e, em segundo lugar, como Descartes, Lagrange e Monge, que a tornaram um meio geral de deduzir as propriedades da extensão a partir do menor número de princípios.

O que significa esse duplo ponto de vista? Significa, de um lado, mostrar como a partir de um problema geométrico é possível introduzir-se a notação algébrica para obtermos o equivalente analítico deste ente geométrico, que nada mais é do que seguir a gênese do conceito; de outro lado, tratar o problema enfatizando, priomordialmente, sua abordagem analítica.

O primeiro ponto de vista é exaustivamente abordado por Lacroix, e, nesse sentido, ele se afasta bastante da abordagem de Euler e Lagrange, estando mais próximo de Descartes. As construções geométricas são apresentadas sempre como um recurso mais elegante para resolver o problema.

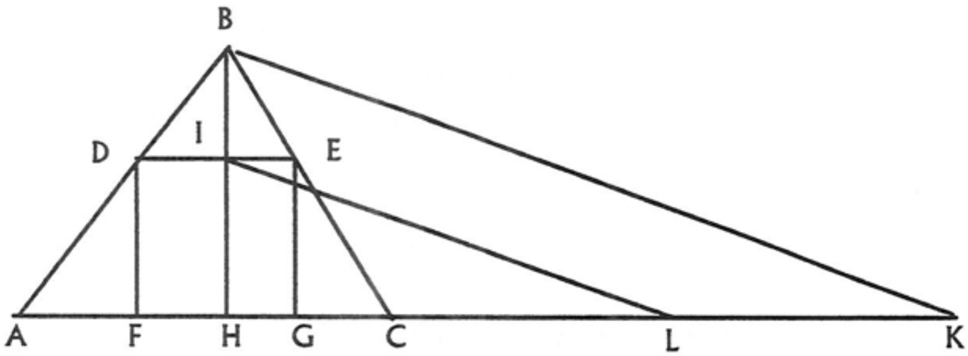
Seus objetivos principais com esse estudo eram: explicitar as linhas segundo as suas equações; transformar as coordenadas; empregar a transformação de coordenadas para a classificação das linhas; partir das propriedades de uma curva para encontrar a sua equação; mostrar que as diversas equações das curvas nada mais são do que enunciados de suas diversas propriedades; deduzir as equações gerais das curvas de segundo grau; deduzir as propriedades dessas curvas e servir-se desses conhecimentos para unir os conhecimentos que os antigos tinham destas curvas com os conhecimentos modernos; determinar as tangentes das curvas do segundo grau segundo um método analítico; determinar os limites das tangentes e assíntotas; determinar as curvas pelo número de pontos que as caracterizam; usar as curvas para construir as raízes das equações e para determinar a sua resolução.

Curiosamente, a obra de Lacroix ainda está muito próxima da de Descartes. Ele não inicia a abordagem da Geometria Analítica pelo sistema de coordenadas; este será introduzido muito tardiamente. A exemplo de Descartes, começa com problemas clássicos da geometria euclidiana, mostrando como eles podem ser resolvidos com auxílio da álgebra, e também como os construir geometricamente.

Entre os inúmeros exemplos que Lacroix apresenta sobre as aplicações da álgebra à geometria encontra-se, no parágrafo 3, o problema que propõe inscrever um quadrado DEFG, em um triângulo ABC.

A resolução de Lacroix segue o método formulado por Descartes:

"Será necessário supor a questão resolvida, e depois disso procurar entre as linhas dadas imediatamente pelo triângulo, e o lado do quadrado, uma relação que se possa exprimir algebricamente. Para o que abaixaremos a perpendicular BH, que consideraremos conhecida. Depois disso, consideraremos os triângulos BAC e BDE; BAH e BDI, que permitem escrever:



(fig.1)

AB: BD:: AC: DE

porque os triângulos BAC e BDE são semelhantes,

AB : BD :: BH : BI

porque os triângulos BAH e BDI são semelhantes.

Destas relações pode-se escrever:

AC : DE :: BH : BI

Ora BI = BH – IH

e pela definição de quadrado, IH = DE. Designando AC por "a" e BH (a altura) por "b" e IH por "x" teremos:

BI = b -x,

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

Quando os segmentos a e b forem expressos em números, a fórmula acima dá o número que exprime o comprimento do segmento IH. Mas, não há necessidade de recorrer aos números para determinar o comprimento de IH, e por conseqüência o ponto I; as operações indicadas na expressão de x podem efetuar-se sobre as linhas.

Com efeito, é claro que esta incógnita é o quarto termo da proporção seguinte:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b}{x}$$

e que por conseguinte tudo se reduz a achar a quarta proporcional às linhas a+b, a e b" (Victorino, p. 5).

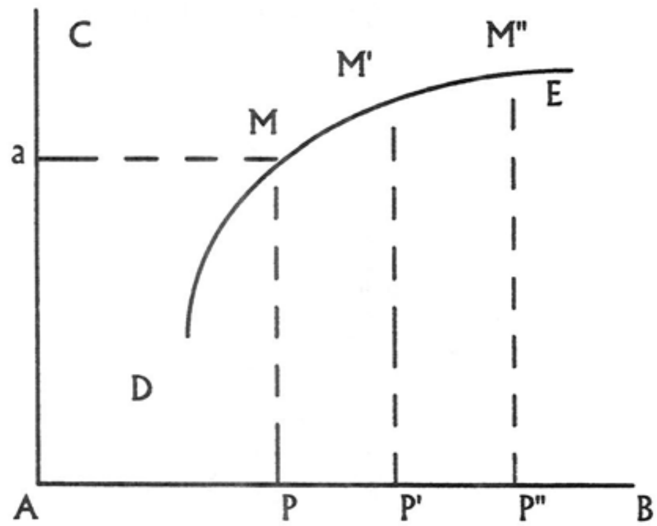
O autor considera mais elegante tratar o problema apenas com a ajuda da geometria. Para determinar o ponto I, ele procede da seguinte maneira: traça a altura do triângulo, que é o segmento BH. A partir de H determina o ponto L, que tem medida igual ao segmento AC, e, a partir de L, determina o ponto K, de tal maneira que o segmento LK é igual a BH. Isto é, HL = a = AC, LK = b = BH. Unindo o ponto K ao ponto B, e depois tirando IL paralelamente a BK, determina-se ponto I.

Há uma grande preocupação em mostrar que os procedimentos analíticos, embora muito eficientes, podem ser substituídos pela construção geométrica, considerada mais elegante. O método analítico não parece ainda possuir muita força ou, talvez, a tradição euclidiana esteja muito presente na concepção de uma matemática que deve se caracterizar pela "elegância".

Lacroix repete as construções para as operações elementares conforme Descartes, em 1637, como, por exemplo, para a raiz quadrada.

A Geometria Analítica, propriamente dita, é introduzida no capítulo 18:

> Se imaginarmos, por exemplo, que todos os pontos de uma linha qualquer DE (fig.2) se abaixarem perpendiculares PM, P'M', P"M", etc sobre uma lina reta AB, dada numa posição, e que a partir de um ponto A, tomado à vontade sobre esta linha, se tenham medido as distâncias AP, AP', AP", etc, cada uma destas distâncias, e a perpendicular que lhe corresponde, estarão ligadas entre si de maneira que uma necessariamente se concluirá da outra. (...) Não há obstáculo em imaginarmos que as linhas AP e PM sejam referidas a uma linha comum tomada por unidade, e que sob este ponto de vista, elas sejam antes representadas por números de que por letras. Se a relação que houver entre AP e PM, entre A'P' e P'M", etc puder ser expressa por uma equação algébrica, esta equação caracterizará a linha DE e poder-se-á fazer conhecer sucessivamente todos os pontos.



(fig.2)

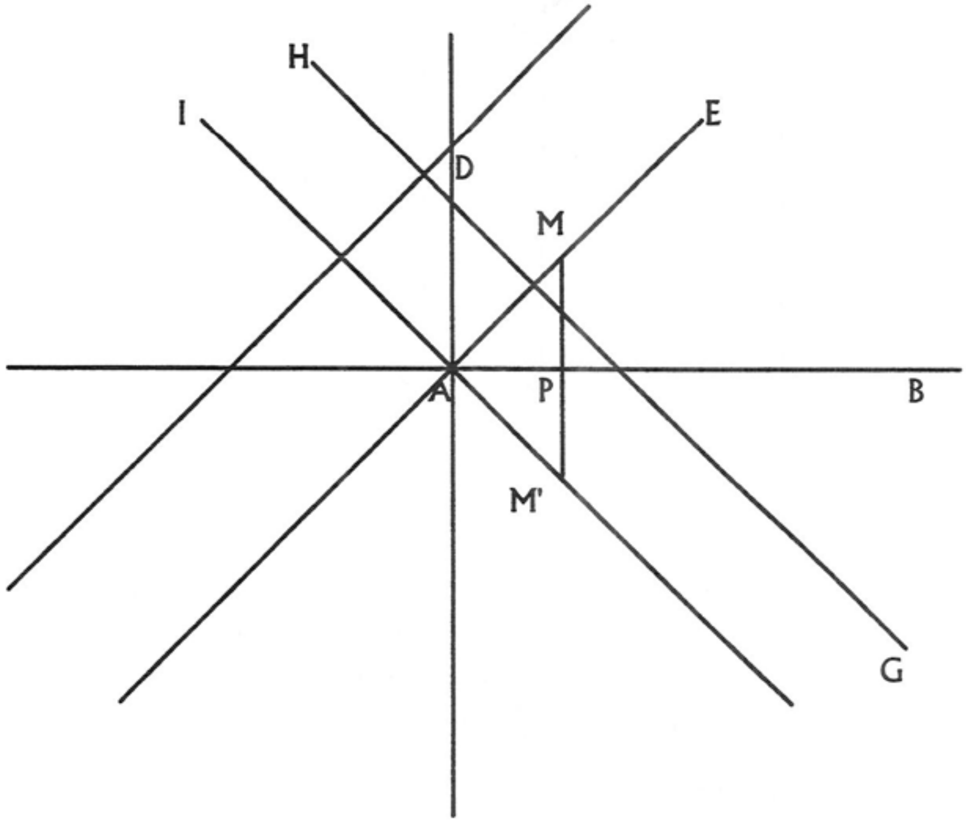
Segundo Lacroix, a mais simples das equações é a equação do primeiro grau e esta representa a reta. "Esta equação pode representar-se por Cy = Ax + B: porém se dividirmos tudo por C, nada perderá de generalidade, e virá a ser $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$ ou y = ax + b, fazendo $\frac{A}{C} = a$ e $\frac{B}{C} = b$" (Victorino, p. 42).

Supondo inicialmente b = 0, a equação fica y = ax e isto quer dizer que em toda a sua extensão a relação de PM e AP será constante. Esta propriedade resulta da semelhança dos triângulos APM, AP'M', etc.

Resulta da semelhança dos triângulos que $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'}$. O coeficiente a depende do ângulo que a reta AE faz com o eixo AB, e no triângulo retângulo APM, a relação $\frac{PM}{AP}$ representa a tangente deste ângulo.

Após ter identificado o coeficiente a com a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo, o autor dá a condição de paralelismo e deduz a condição de perpendicularismo entre duas retas:

considerando as retas AE e AI perpendiculares, como na figura 3, abaixo:



(fig.3)

cujas equações são y = ax e y = a'x, respectivamente, pela semelhança dos triângulos AMP e AM'P conclui-se que a' = -1/a.

A expressão que permite calcular a distância entre dois pontos surgiu tardiamente, dentro da história da geometria analítica. Foi em 1731 que, pela primeira vez, Clairaut, nos seus "Recherches", mostrou essa fórmula, quando deduzia a equação da esfera. Da mesma forma, também no texto de Lacroix, esta fórmula só aparece depois que ele deduziu uma série de outras expressões. Utilizando o triângulo retângulo NRN', da figura 5, chamando as coordenadas dos pontos N e N' de α, β e α' e β', respectivamente, ele chega na equação:

$$d = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}$$

Os clássicos problemas envolvendo retas, como, por exemplo, a distância de um ponto a uma reta, é tratado como o comprimento de uma perpendicular baixada de um ponto a uma reta.

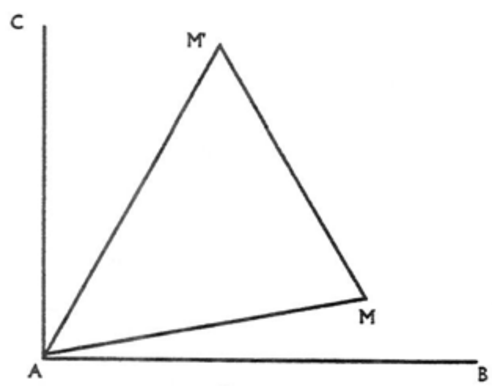
Utilizando o conceito de distância entre dois pontos, deduz a equação geral do círculo

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2py + q^2 = r^2$$

e resolve o problema de determinar a equação do círculo que passa por três pontos dados.

Segue-se uma série de problemas envolvendo retas e círculos, entre eles o de achar a área de um triângulo.

Problema: Achar a área do triângulo MAM', onde A é a origem.



(fig.4)

Se as coordenadas dos pontos M e M' são, respectivamente, $(\alpha, \beta) e (\alpha', \beta)$ então a equação da reta que passa por estes pontos é:

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

ou

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha - \alpha'}$$

comparando esta última fórmula com a equação y = ax + b, teremos:

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \text{ e } b = \frac{\alpha' \beta - \beta' \alpha}{\alpha - \alpha'}$$

a perpendicular procurada terá equação

$$y = -\frac{1}{a}x + b$$

Utilizando a expressão para o cálculo do comprimento da perpendicular, vem:

$$d = \frac{\beta - \mathrm{b} - \mathrm{a}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + 1}}$$

como a = 0 e b = 0, vem:

$$d = \frac{-\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + 1}}$$

substituindo a e b pelos valores acima:

$$d = -\frac{\alpha' \beta - \beta' \alpha}{(\alpha - \alpha')\sqrt{\mathrm{a}^2 + 1}} = -\frac{(\alpha' \beta - \beta' \alpha)}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}$$

daí o comprimento de AD (altura do triângulo) será:

$$AD = \frac{(-\alpha' \beta + \beta' \alpha)}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}$$

e como o comprimento do segmento MM' é

$$\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2},$$

temos que a área do triângulo considerado é:

$$S = \frac{(-\alpha'\beta + \beta'\alpha)}{2}$$

expressão esta que dá a área de todos os triângulos que têm um dos vértices na origem.

Esta é a única explicitação da área em termos de coordenadas dos vértice. Para o caso de três pontos quaisquer, ele apoiou-se no trabalho de Lagrange (vide Silva da Silva, 1991), só que considerou os pontos no plano, em lugar de os considerar no espaço, como Lagrange, não chegando a obter uma fórmula análoga à de Lagrange, para três pontos quaisquer no plano.

Vários problemas propostos pela geometria euclidiana são abordados analiticamente para ilustrar a aplicação da álgebra à geometria: "*tirar uma tangente a um círculo por um ponto fora dele*" (Victorino, p. 45).

Segundo Lacroix, as questões da Geometria poderiam ser tratadas por dois métodos muito distintos:

> ... um consiste em determinar as equações das linhas que contém os pontos, que se procuram, partindo das propriedades destas linhas; e o outro, a deduzir imediatamente da consideração dos triângulos semelhantes, e dos triângulos retângulos, que apresenta a figura resultante do problema suposto resolvido (ajudando-se para isto de alguma construção preparatória) as relações das retas que determinam a posição destes pontos. o primeiro destes métodos, que muitas vezes é mais elegantes, é sempre mais geral, porém o segundo é freqüentemente mais simples (Victorino, p. 81).

Após o estudo detalhado da reta, envolvendo também problemas relacionados à circunferência, o autor apresenta a equação do segundo grau a duas variáveis afirmando que a equação da circunferência nada mais é do que um caso particular das equações do segundo grau e que resta ainda descobrir as curvas que correspondem aos outros casos que essa fórmula envolve:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e$$

$$y = \frac{-(ax + c) \pm \sqrt{4e + c^2 - (4b - a^2)x^2 - 2(2d - ac)x}}{2}$$

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

ou de forma mais abreviada:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx = e$$

Com o objetivo de analisar quais as curvas que tal equação pode representar, ele isola o termo y:

$$y = \frac{-(ax + c) \pm \sqrt{4e + c^2 - (4b - a^2)x^2 - 2(2d - ac)x}}{2}$$

Fazendo para abreviar:

$$4e + c^2 = p$$
$$2d - ac = n$$
$$4b - a^2 = m$$

teremos,

$$y = \frac{-ax + c}{2} \pm \frac{\sqrt{p - 2nx - mx^2}}{2}$$

dependendo da quantidade sob o radical teremos diferentes curvas: se m for positiva, compreende um espaço fechado, e elas são designadas pelo nome elipse. Se m for negativo então elas são formadas de quatro ramos infinitos e formam duas partes separadas, chamam-se hipérboles. Se m for nulo é a equação de uma parábola.

A abordagem sobre a mudança de coordenadas de Lacroix difere daquela apresentada por Euler, em 1748, em que ele emprega as relações trigonométricas. Aqui, o autor trabalha apenas com semelhança de triângulos e exclui qualquer referência a senos ou cossenos de ângulos.

Em nota de rodapé, o tradutor explica que não seria difícil transformar as denominações m, n, p e q em termos de senos e cossenos dos ângulos compreendidos entre os eixos das coordenadas e teríamos então as fórmulas que se acham em muitas obras, porém a "forma aqui adotada abrevia as expressões e conserva melhor elegância analítica", foi por isto que Lagrange e Monge as preferiram, em lugar do uso de funções trigonométricas. Todavia, o tradutor omite as transformações que Lacroix faz utilizando as linhas trigonométricas.

É fácil ver que se se m é o cosseno do ângulo B"A'"B', denominado f, e n é o seno do mesmo ângulo, valerá a relação $m^2 + n^2 = 1$ e teremos, em lugar das expressões $x' = mt - nu$ e $y' = nt + mu$ a seguinte fórmula:

$$x' = t \cos f - u \operatorname{sen} f$$
$$y' = t \operatorname{sen} f + u \cos f$$

O autor mostra ainda como simplificar a equação completa do segundo grau por meio de mudanças de coordenadas. Considera que, para facilitar os cálculos, torna-se mais simples iniciar as operações considerando a mudança de x para $x' + a$ e de y por $y' + b$. Ele não explica o significado geométrico desta mudança de coordenadas, que nada mais é do que uma translação de eixos.

Embora o autor utilize amplamente das representações geométricos (apresenta 76 figuras), não há nenhum exemplo numérico dos problemas enunciados, todos eles são genéricos, nem tão pouco exercícios resolvidos ou problemas propostos.

Como o livro de Lacroix ficou conhecido no Brasil?

Com a vinda da família real para o Brasil, a vida intelectual brasileira, e especialmente a vida na corte (Rio de Janeiro), sofreram mudanças significativas. Em 13 de maio de 1808, fundou-se a Impressão Régia que, até 1821, foi a única tipografia no Rio de janeiro. No primeiro ano de sua fundação foram editadas 37 publicações e, segundo Wilson Martins[2], até 1822 foram catalogadas 1154 publicações. Todavia o surgimento da imprensa no Brasil não significou a liberdade de pensa-

2 Veja em Wilson Martins *História da Inteligência Brasileira*, vol.II, p.29.

mento na Colônia. A Impressão Régia era dirigida por uma junta que tinha amplos poderes de censura. Entre os membros dessa junta vêem-se os nome de José Saturnino da Costa Pereira, docente da Real Academia Militar e político (ministro e senador), Manuel Ferreira de Araujo Guimarães, também docente da mesma Academia e político, bem como o filósofo e publicista Silvestre Pinheiro Ferreira e cônego Januário da Cunha Barbosa, fundador do Instituto Histórico. Contrário à censura exercida pela junta diretora da Impressão Régia, Hipólito José da Costa (1774-1823) iniciaria no jornal *Correio Brasiliense* um movimento de cunho liberal. No quinto número do jornal, de outubro de 1808, Hipólito manifestava-se contra as atividades de censura da junta diretora:

> Aquele freio, de que se não possa publicar obra alguma, em matéria nenhuma, sem que seja aprovada por uns poucos homens (...) Se agora ressuscitasse o grande Newton e quisesse publicar em Portugal os seus Princípios Matemáticos (...) seria essa obra mandada rever (...) e se o frade a quem a obra fosse distribuída para a censura assentasse que as proposições matemáticas que ele não entendia deviam, por isso ser suprimidas, bem que podia o grande Newton tornar a morrer e enterrar-se junto com sua obra, porque Portugal e o Mundo estava sentenciado a ser privado do benefício daquela obra (...) (Martins, p. 33).

No Brasil, Lacroix ficou muito conhecido no meio acadêmico. Os membros da junta militar da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, responsáveis pela orientação acadêmica dos cursos da referida academia, elegeram os livros-texto de Lacroix como os mais adequados para o ensino, e, por muitos anos, eles foram os mais recomendados e utilizados na escola. A primeira tradução da *Geometria Analítica* surgiu em 1812 e foi feita por José Victorino de Santos Souza. Além desta tradução apareceu a de Manoel Ferreira Guimarães (1777-1838), em 1821, e outra obra intitulada *Geometria Analítica* segundo o sistema de Lacroix, de José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852), em 1842. Embora tenha-se localizado as traduções da obra de Lacroix sobre a Geometria Analítica, presume-se que as versões em língua francesa eram muito utilizadas, no Brasil, porque ainda no final da década de 90 desse século, encontram-se nos sebos de grandes cidades como Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre, edições francesas da metade do século XIX.

Mesmo tendo surgido outros autores populares como Lefebure de Fourcy[3] e Biot[4], o ensino da Geometria Analítica no Brasil orientava-se mais fortemente nos livros de Lacroix. A partir da análise que se vem desenvolvendo com os livros-texto de Matemática utilizados no Brasil, no século passado, nota-se que o nosso ensino seguia o mesmo estilo que nos demais países.

Os dados biográficos de José Victorino dos Santos e Souza não são facilmente encontráveis. Sabe-se que faleceu em 1852 no Rio de Janeiro, formou-se em matemática e foi docente da Real Academia Militar do Rio de Janeiro. Traduziu livros franceses que começaram a ser publicados em 1812 para uso dos alunos da Academia. As obras que publicou não são meras traduções, há contribuições do autor: *Elementos de geometria descriptiva com aplicação às artes*, extraídos das obras de Monge para uso da Real Academia Militar, Rio de Janeiro, 1812; *Tratado elementar de aplicação da álgebra à geometria* por Lacroix, traduzido do francês, acrescentado e oferecido ao Conde de Galveas, etc,1812; *Geometria e mecânicas das artes, dos ofícios e das belas-artes* por C. Dupin; traduzidos do francês, 1832; "Memória sobre as causas físicas dos movimentos de rotação da terra e dos planetas"; causas e influências da lua, etc. In: *Sciencia*, 1847, p. 84.

Na dedicatória da obra, o autor afirma que foi encarregado da tradução do compêndio de Lacroix para que o mesmo fosse utilizado na Real Academia Militar. Baseado nos Estatutos e na Carta de Lei de 1810, que criou a Academia Militar do Rio de Janeiro, foi incentivado a fazer acréscimos à obra "... concedem aos Lentes, para adicionarem os métodos e novas decobertas, que se possam fazer nas ciências, me resolvi a dar a extensão necessária ao Apêndice que se segue ao referido Compêndio ..." (José Victorino, dedicatória, sem paginação). A obra que José Victorino traduziu foi a terceira edição do *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre*. Todavia, ele excluiu da tradução os capítulos referentes à trigonometria. Não há no texto qualquer explica-

3 A primeira edição do livro de Lefebure surgiu em 1827 e intitulava-se: *Leçons de Géométrie Analytique, comprenant la trigonométrie rectiligne et sphérique, les lignes et les surfaces de deux premiers ordres*. Uma nona edição desta obra apareceu em 1871.

4 O livro de Biot, *Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du seconde ordre,* surgiu em 1803 e teve nove edições até o ano de 1839, em língua francesa, enquanto que, em língua inglesa, teve sete edições, de 1840 a 1874.

ção sobre esta exclusão. Contudo pode-se conjecturar que o tradutor procedeu desta forma porque já havia sido traduzido o *Tratado de Trigonometria* de Legendre, por Manuel Ferreira de Araujo Guimarães em 1809, e este era recomendado como livro-texto para a Academia.

A introdução que José Victorino apresenta é quase que inteiramente devotada à tradução do prefácio de Lacroix, no qual ele explica sobre o que trata a Geometria Analítica, historiando os desenvolvimentos desde Descartes.

Victorino chama a atenção para o fato de que uma obra que serve como guia para o estudante não deve conter todos os detalhes, os quais não deixam nada para o aluno refletir e trabalhar. Lacroix não abordou a transformação de coordenadas no espaço. O tradutor, que fez vários acréscimos no apêndice, poderia ter incluído este importante tema, mas não o fez e justifica-se dizendo ter analisado todas as possibilidades que teria ampliando os métodos e acrescentando, por exemplo, a transformação de coordenadas no espaço, mas não as incluiu porque "o pouco êxito que têm as idéias novas enquanto os espíritos não estão familiarizados com elas, ou elas não se tem tornado necessárias para as aplicações mais elevadas (...) me obrigaram a suspender a sua publicação até que a sua falta se torne sensível" (Victorino, xiii).

José Victorino conclui dizendo que a aplicação da álgebra à geometria, tratada segundo o método de Lacroix, contém os germes preciosos para desenvolver os talentos e promover as faculdades intelectuais dos indivíduos. Essa concepção da Matemática como um instrumento para o desenvolvimento das faculdades intelectuais permanece até os nossos dias, salientada tanto por matemáticos quanto por educadores da matemática.

A versão de Victorino da obra de Lacroix não se enquadra naquilo que denominamos "tradução" propriamente dita. A razão disso reside no fato de que o tradutor fez alterações significativas na obra. Primeiramente, excluiu toda a parte referente à trigonometria e, em segundo lugar, fez acréscimos no apêndice da obra original, em que abordou com mais detalhes a Geometria Analítica espacial. Relativamente à Geometria Analítica plana, Victorino de Souza manteve-se fiel ao texto. Entretanto, o tradutor omite as transformações que Lacroix faz utilizando as linhas trigonométricas, em nota de rodapé.

O objetivo principal de Lacroix foi apresentar a Geometria Analítica a duas dimensões; por isso, dedicou para a parte espacial apenas algumas páginas no apêndice. Ele parece não querer apresentar a Geometria Analítica espacial em todo a sua profundidade, mas sim dar curtas referências ao assunto (lembremos que Monge já havia apresentado a Geometria Analítica espacial de forma bastante aprofundada e sistematizada na obra a que já fizemos referência). As noções básicas que Lacroix selecionou para fazer parte deste apêndice incluem a equação do plano, da reta, as condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas e planos, e ainda uma curtíssima referência às superfícies do segundo grau a três variáveis, onde apresenta a equação do cone reto e da esfera e, como exemplo de uma curva no espaço, determina a intersecção de um plano com um cilindro.

É no apêndice do livro que Victorino revoluciona o texto de Lacroix. Não há mais tradução, mas sim uma nova abordagem sobre o tema. Inicia com o conceito de um ponto no espaço, a seguir deduz as equações de vários sólidos: esfera, cone reto e os sólidos de revolução, como o elipsóide e o parabolóide. Distintamente de Lacroix, antes de abordar o estudo da reta e do plano, ele apresenta a noção de distância entre dois pontos no espaço. Segue-se o estudo sistemático da reta no espaço. Seguindo o estilo de Monge, apresenta os temas, através da formulação de um problema:

> Achar as equações de uma linha reta que passa por dois pontos dados (§129); Achar as condições necessárias para que duas retas sejam paralelas no espaço (§130); Achar as condições necessárias para que duas retas se intercetem no espaço, ou o que é o mesmo, conhecer quando elas existem em um mesmo plano, e quando estas condições forem satisfeitas, achar seu ponto de intersecção (§131); Achar o ângulo que formam duas retas de que temos as equações de projeção (§132); etc.

Assim como Lacroix, a reta é obtida através da intersecção de dois planos. A diferença entre as duas abordagens é que Victorino sistematiza melhor os temas. Como uma aplicação do estudo da reta, ele utiliza os conceitos de reta fixa e móvel para determinar a equação do cone mais geral; assim como exemplifica a aplicação da equação da reta na dedução da equação do cilindro.

Quando aborda as superfícies cilíndricas, Victorino necessita enunciar um resultado que trata de um polígono fechado ("Em um polígono fechado qualquer, um dos seus lados é igual a soma de tordos os outros lados multiplicados cada um pelo cosseno do ângulo, que ele forma com o primeiro"; apêndice, p. 238), que ele não demonstra, mas afirma estar demonstrada por princípios mais longos na "Geometria de Posição". Sua justificativa para não apresentar a demonstração é a seguinte:

> Não damos aqui esta teoria, porque exige figuras e raciocínios, que nos distrairão agora muito do nosso objeto. Quem quiser pode consultar a referida obra, e a correlação das figuras de Geometria donde transcrevemos algumas das consequências que aqui referimos, e que nos servirão para o que adiante temos de tratar a respeito da superfície de poliedros (Victorino, nota de rodapé, p. 241).

Provavelmente o autor esteja se referindo à conhecida obra de Lazare Carnot (1753-1823), *Géométrie de Position*, publicada em 1803. Sabe-se que a obra de Carnot fazia parte do acervo da biblioteca da Escola Politécnica, em 1876, mas não se tem informações de que a mesma já existisse na biblioteca em 1812. Restam poucas dúvidas de que Victorino conhecia a referida obra. Se isso se confirma, é interessante a atualidade que demonstra o autor brasileiro, uma vez que o ano de publicação da tradução de Lacroix ocorreu em 1812, ou seja, nove anos após o surgimento da obra de Carnot.

Só após o tratamento sistemático do estudo da reta, ele introduz o estudo do plano. Nesse estudo inlui: equação do plano no espaço $Ax+By+Cz+D=0$, deduz a equação do plano que passa por duas retas, intersecção do plano com os eixos, intersecção de dois planos, equação do plano que passa por três pontos, planos paralelos, equação de um plano perpendicular a uma reta dada, distância de um ponto a um plano e ângulo entre dois planos.

Quando introduz as curvas no espaço, Victorino resolve inovar, mesmo que seja brevemente, escrevendo as equações das superfícies na forma

$$z = F(x, y),\ z = f(x, y) \text{ e } x = F(y),\ x = f(z),\ y = F(z).$$

Em nota de rodapé ele esclarece: "As letras F, *f*, F denotam funções das coordenadas que seguem, é útil a familiaridade com esta espécie de abstração" (p.262). Esta é a única vez em que o tradutor fala na palavra **função**. Raros são os livros, dessa época, que utilizam a simbologia de funções nos textos sobre Geometria Analítica. Lacroix, por exemplo, não emprega esta terminologia.

O último tema abordado diz respeito às curvas de dupla curvatura. Ele afirma: "em um grande número de casos a curva resultante da intersecção de duas superfícies não será plana, mas sim de dupla curvatura, por exemplo a intersecção da esfera com o cilindro reto"(p. 266). Apresenta vários exemplos de curvas de dupla curvatura como a resultante da intersecção do parabolóide e do cone reto.

Relativamente às ilustrações do texto original, acrescenta algumas figuras àquelas apresentadas por Lacroix, excluindo as referentes à trigonometria. A tradução contém 275 páginas, errata e tábuas de figuras.

Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica, segundo o systema de Lacroix por José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852)

José Saturnino da Costa Pereira, nascido em Sacramento, atualmente cidade localizada no Uruguai, bacharelou-se em matemática pela Universidade de Coimbra. Retornando ao Brasil, exerceu, além da docência na Academia Militar, inúmeras funções públicas: foi oficial do corpo de engenheiros, pertenceu ao conselho do imperador, foi senador do império pela província de Mato Grosso, trabalhou no Ministério da Guerra, etc. Traduziu o *Tratado Elementar de Mecânica*, de Francouer e, como contribuição pessoal, anexou doutrinas extraídas de diversas obras de autores como Poncy, Bossut, Marie, etc. Publicou 18 livros, entre os quais, uma obra dedicada ao imperador Pedro II, intitulada *Recreação moral e científica ou biblioteca da juventude* (1834-1839). Foi um escritor muito ativo, e suas obras abrangem diversas áreas: lógica, geografia, astronomia, ótica, história e literatura, além da matemática. Em 1841 publicou o livro intitulado *Applicação da Algebra a Geometria ou Geometria Analítica*.

Este título contém um subtítulo: segundo o Systema de Lacroix. Analisando o título e o subtítulo temos duas considerações a fazer: a primeira é que Pereira faz uma pequena inovação – Lacroix não utilizou em nenhuma das várias edições de seu livro-texto sobre Geometria Analítica, a denominação Geometria Analítica, embora o termo já tivesse sido utilizado especificamente por Biot como título da obra que escreveu em 1802 sobre o tema; segundo, no subtítulo, Pereira admite explicitamente que baseou-se no "Systema de Lacroix". O que não fica claro, uma vez que o livro não contém nem introdução nem prefácio, é saber o que o autor entendia por "systema". Podemos fazer algumas suposições, como, por exemplo, entender por sistema o conjunto de todas as obras de Lacroix ou talvez o estilo desse escritor.

Pereira não apresenta em seu livro, de 140 páginas, o índice das matérias que desenvolve, mas apresenta, no final do texto, 5 quadros com um total de 62 figuras. É comum, nesta época, não apresentar as figuras junto com o texto, mas sim agrupá-las no final. Lacroix, Biot, Salmon, Comte, entre outros, procederam desta maneira.

Os conteúdos expostos não estão divididos em capítulos, mas separados por 205 parágrafos. Até o parágrafo 165 são abordados os conteúdos de geometria analítica a duas dimensões, após, sob o título "appendix" seguem-se os assuntos referentes à geometria analítica a três dimensões.

Como Lacroix e muitos autores da época, Pereira inicia o seu texto com vários exemplos da aplicação da Álgebra à Geometria. Além do problema clássico, de inscrever um quadrado num triângulo, que é exposto por Bézout em 1772, ele apresenta, por exemplo, o seguinte: "Procuremos a expressão do volume de um tronco, em que os dois lados homólogos, ou os raios de suas bases sejam representados por a e b; por g a sua altura, e por h o da piramide completa" (p. 3). Cinco parágrafos são empregados para a apresentação deste tipo de aplicações. Outro tema que os autores costumavam incluir, antes de introduzir o sistema de coordenadas, eram os problemas de construções dos valores das incógnitas. Este tema começou a ser abrodado por Descartes, em 1637, e manteve-se presente nos livros-texto até o final do século passado. O autor atribuiu muita ênfase a este tema, uma vez que utilizou 19 parágrafos para o desenvolver.

Assim como Lacroix, Pereira teve dificuldades em entender o significado dos números negativos. A este assunto ele dedica três parágrafos.

> Na aplicação da Algebra a Geometria, o sinal " – " se interpreta em geral como a respeito dos números, invertendo em certo modo o enunciado da questão, e tomando as linhas que dela são afetas em sentido contrário ao que haviam sido tomadas. Devemos desde já lembrar-nos que as quantidades negativas tiveram sua origem das subtrações, que não podem efetuar-se na ordem em que são indicadas, porque a quantidade a subtrair excede a de que deve ser tirada. Por essa circunstancia se reconhece, que houve erro no enunciado da questão.... (Pereira, p. 14)

O que sucede é que o autor está ainda muito preso à idéia de grandeza, não consegue pensar em número negativo simplesmente como um novo **objeto matemático** teórico que não existe como um objeto empírico, mas sim, que é definido através da equação $x + a = 0$, ou seja, que é um objeto realmente existente na matemática, porque se pode operar com ele. Aqui, há claramente um obstáculo epistemológico. Como não é possível ver esse ente, por ele denominado, "quantidade negativa", no mundo real, ele simplesmente o refuta. Se surgir um problema cuja solução seja um número negativo, a saída que o autor encontra é afirmar que houve um erro no enunciado do problema e que o enunciado deve ser reformulado para que a resposta seja positiva.

A refutação dos números negativos não é total. Ele necessita desses objetos para estabelecer um sistema de coordenadas. Então, ele admite a operação de subtração de segmentos num sentido amplo, ou seja, admite a subtração quando a linha a subtrair é maior que a linha dada. Neste caso, o sinal negativo corresponderia à oposição de sentido do segmento.

> A continuidade das linhas e a possibilidade de as prolongar indefinidamente nos dois sentidos, dá a seu respeito o meio de operar (...) a subtração da mesma maneira, seja ou não a linha a diminuir menor do que a de quem se diminue. (Pereira, p. 16)

A diferença significativa entre as abordagens de Pereira e Lacroix é observada no tratamento das cônicas.

Para Lacroix há dois métodos para se considerar as questões de Geometria, que podem ser realizadas pelo emprego da Álgebra. O primeiro método consiste em se determinar as equações das linhas, partindo das propriedades geométricas destas linhas; o outro, é deduzir essas equações imediatamente pela consideração de semelhança de triângulos e dos triângulos retângulos, em que se apresenta a figura resultante do problema suposto resolvido. Este último método é aquele que o autor mostra através de inúmeros problemas nos primeiros capítulos de sua obra, como, por exemplo, o problema de inscrever um quadrado num triângulo. Todavia, segundo o autor, o primeiro método é mais elegante e geral e o segundo mais fácil.

Pereira escolhe o primeiro método para iniciar a exposição das cônicas. Ele faz, na realidade duas abordagens distintas para as cônicas. Na primeira, ele parte da definição geométrica de uma curva que satisfaz uma certa propriedade e deduz a equação das cônicas na forma simplificada (que envolve a excentricidade). Na segunda abordagem, ele parte da equação geral do segundo grau a duas variáveis e mostra que esta representa todas as cônicas.

Pereira simplifica muito o texto de Lacroix e apresenta as cônicas de uma forma muito elegante.

> Se cada um dos pontos M de uma curva CM (figura 1) for de sorte colocado a respeito de um ponto fixo F e de uma reta LH dada de posição, que seja sempre constante, a relação entre a reta MF e o comprimento MH da perpendicular baixada do ponto m da curva sobre a mesma reta LH, resultará $\frac{MF}{MH} = e$.

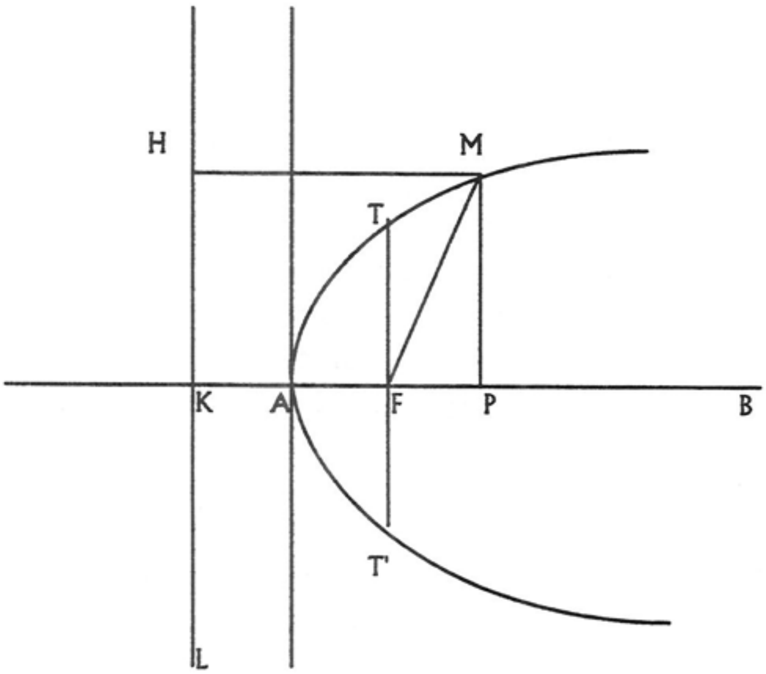


Fig.4

Onde F = foco, FK = eixo das abscissas, A = origem, MP= ordenada, AP= x PM=y, AF=c, AK=h.

Como $\frac{MF}{MH} = e$, deduz-se facilmente que

$$y^2 + x^2 + c^2 - 2\,cx = h^2 e^2 + x^2 e^2 + 2\,hxe^2.$$

Se tomarmos a origem no ponto em que a curva corta o eixo, na equação acima fazendo x=0 e y=0 dará $c^2 = h^2 e^2$ e chega-se a uma equação simplificada:

$$y^2 = 2\,cx(1 + e) - x^2(1 - e^2)$$

A constante e pode ser igual, menor ou maior que a unidade, resultando daí três curvas distintas.

A partir daí deduz as equações da parábola, elipse e hipérbole.

As cônicas são também obtidas por intersecções feitas por um plano em um cone reto. A terceira abordagem feita pelo autor é partir da equação do segundo grau a duas variáveis e mostrar que essa tem por lugar geométrico uma cônica. O último tema abordado sobre a geometria analítica plana diz respeito às equações das cônicas em coordenadas polares. Chega a equação geral $r = \dfrac{d(1+e)}{1+e\cos\varphi}$, que pertence a todas as cônicas.

O "appendix" do livro de Pereira difere significativamente daquele de Victorino. Inicia com o conceito de um ponto no espaço, aborda os eixos coordenados, introduz a equação do plano, e, a seguir, a equação da reta, que é introduzida com sendo a intersecção de dois planos. Seguem-se temas ligados ao plano e à reta: equação de um plano que passa por 3 pontos; equação da reta que passa por dois pontos; duas retas contidas num mesmo plano; condição para que dois planos sejam paralelos; condição para que duas retas sejam paralelas; condição para que um plano seja perpendicular a uma reta; condição para que uma reta seja perpendicular a um plano; distância de um ponto a origem; distância entre dois pontos; ângulo entre retas; retas perpendiculares; cossenos diretores; ângulos entre planos; planos perpendiculares. Após isso, o autor apresenta as superfícies, as secções de superfícies, as superfícies de revolução. O elipsóide é apresentado com a denominação de "sólido elliptico" e também é deduzida a equação para o cone reto. Uma curta referência é feita a curvas com dupla curvatura.

Como devemos classificar o livro-texto de Pereira? Ele seria uma mera tradução ou uma obra independente? Quais os critérios que se dispõe para julgar em tal caso? É difícil um posicionamento radical. Seria um tanto injusto falar em mera tradução. Todavia, o livro-texto está fortemente baseado no estilo de Lacroix, apresentando algumas contribuições do autor, tanto em ordenação dos conteúdos, quanto em exemplos, neste caso talvez seja possível dizer que já se trata em um livro-texto independente daquele de Lacroix. Se julgarmos desta maneira, trata-se efetivamente do primeiro-livro texto de Geometria Analítica escrito por um brasileiro.

Conclusões

Lacroix inspirou-se em Lagrange e Monge para escrever seu livro-texto sobre Geometria Analítica. Lacroix fez um trabalho semelhante ao de Monge, só que em duas dimensões. Este trabalho constitui-se na primeira abordagem sistemática da Geometria Analítica a duas dimensões. O autor acentua que a obra deve mostrar o duplo ponto de vista sob o qual se pode considerar a Geometria Analítica: primeiramente da maneira como os inventores a trataram, como um meio de combinar os teoremas da geometria, e, em segundo lugar, como Descartes, Lagrange e Monge, que a tornaram um meio geral de deduzir as propriedades da extensão a partir do menor número de princípios. O primeiro ponto de vista é exaustivamente abordado por Lacroix, e, nesse sentido, ele se afasta bastante da abordagem de Euler e Lagrange, estando mais próximo de Descartes. As construções geométricas são apresentadas sempre como o recurso mais elegante para resolver o problema. Há uma preocupação muito grande em mostrar que os procedimentos analíticos, embora muito eficientes, podem ser substituídos pela construção geométrica, considerada mais elegante. O método analítico não parece ainda possuir muita força ou, talvez, a tradição euclidiana esteja muito presente na concepção de uma matemática que deve se caracterizar pela "elegância". Lacroix não inicia a abordagem da Geometria Analítica pelo sistema de coordenadas; este será introduzido muito tardiamente. A exemplo de Descartes, começa com problemas clássicos da geometria euclidiana, mostrando como este pode ser resolvido com auxílio da álgebra, e também como os construir geometricamente. A abordagem sobre a mudança de coordenadas de Lacroix difere daquela apresentada por Euler, em 1748, em que ele emprega as relações trigonométricas. Lacroix trabalha apenas com semelhança de triângulos e exclui qualquer referência a senos ou cossenos de ângulos (exceto em nota de rodapé). Suas fórmulas tornam o texto mais trabalhoso de ler. Não há qualquer referência ao significado geométrico da mudança de coordenadas.

A primeira "tradução", em língua portuguesa, da *Geometria Analítica* surgiu em 1812, por obra de José Victorino de Santos Souza. Além desta tradução apareceu uma outra, a de Manoel Ferreira Guimarães, em 1821. A versão de Victorino da obra de Lacroix não se enquadra naquilo que denominamos "tradução" propriamente dita. A razão disso reside no fato de que o tradutor fez alterações significativas na obra. Primeiramente, excluiu toda a parte referente à trigonometria e, em segundo lugar, fez acréscimos no apêndice da obra original, onde abordou com mais detalhes a Geometria Analítica espacial. Relativamente à Geometria Analítica plana, Victorino de Souza manteve-se quase fiel ao texto. Quando introduz as curvas no espaço, Victorino introduz a notação de funções para representar as equações das superfícies, na forma z = F(x, y), z = f(x, y). Esta é a única vez que o tradutor fala na palavra função. O surgimento do livro *Geometria Analítica* de Saturnino Pereira, em 1842, já é um avanço em relação ao texto de Victorino, uma vez que não se trata de uma tradução.

José Victorino de Santos Souza e Saturnirno Pereira seguiram quase fielmente a geometria analítica plana de Lacroix, mas na abordagem da geometria analítica espacial deram a sua contribuição, fugindo daquilo que Lacroix apresentou no apêndice, e que se referia a três dimensões.

Com base nas análises desenvolvidas, pode-se afirmar que o ensino da Geometria Analítica, no Brasil, no século XIX, orientado pelos mesmos autores de livros-texto recomendados nos demais países, não diferia substancialmente do ensino dessa disciplina nos outros países, como, por exemplo, França, Alemanha e Estados Unidos.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, R. T. (1905). *Lições de Geometria Integral*. Rio de Janeiro, Imprensa Nacional.

BÉZOUT, E. (1800). *Mathématiques a al'usage de la Marine et de l'artillerie*. Paris.

______.(1802). *Cours D'Arithmétique*, a L'usage des Gardes du Pavillon, de Marine, du Commerce, et des Élèves de l'Ecole Politechnique. Paris.

______.(1803). *Cours de Mathématiques* a l'usage des Gardes du Pavillon, de la Marine et des Élèves de l'Ecole Politechnique, 3. Partie. Paris.

______.(1809). *Cours de Mathématiques* a l'usage des Gardes du Pavillon, de la Marine et des Élèves de l'Ecole Politechnique, suite de la 4.Partie. Paris.

BIOT, J. B.(1834). *Essai de Géométrie Analytique appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre.* Paris, Bachelier, Imprimeur-Libraire.

BOS, H. J. M. (1990). Der doppelte Auftakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes. In E. Scholz (Editor), *Geschichte der Algebra*. Mannheim; Wien; Zürich, BI– Wiss.-Verlag.

______. (1991). Descartes, Pappus' problem and the Cartesian Parabola: a conjecture. In: *Festschrift for Whiteside* edited by Alan Shapiro and Peter Harman.

BOUTROUX, P. (1968). *Das Wissenschaftsideal der Mathematiker*. Liechtenstein, Saendig Reprint Verlag Hans Wohlwend.

BOYER, C. (1956). *History of Analytic Geometry*. New York, Scripta Mathematica.

BRUNSCHVICG, L. (1972). *Les Etapes de la Philosophie Mathematique*. Paris, Blanchard.

CAJORI, F. (1928). A *History of Mathematical* Notations. London, The Open Court Company.

CARNOT, L. (1921). *Reflexion sur la Metaphysique du Calcul Infinitesimal*. Paris, Gauthier-Villar.

_____. (1803). *Geometrie de Position*. Paris, De L'Imprimiere de Crapelet.

COMTE, A. (1975). *Philosophie prémiere*. Paris, Hermann Editeurs et des Artes.

_____. (1969). *Cours de Philosophie Positive*. Paris, Bachelier Libraire pour les Mathematiques.

_____. (1894). *Traité Élémentaire de Géométrie Analytique a deux et a trois dimensions*. Paris und Rio de Janeiro, Louis Dahl e F. Briguiet.

_____. (1844). *Traité Philosophique D'Astronomie Populaire*. Paris, Carilian-Goeury.

DASTON, L. (1986). The physicalist tradition in early nineteenth century french geometry. In: *Studies in History and Philosophie of Science*, 17, pp. 269-295.

DESCARTES, R. (1962). *Regeln zur Leitung des Geistes*. Hamburg, Verlag von Felix Meiner.

DESCARTES, R. (1894). La Géométrie. In:*Traité Élémentaire de Géométrie Analytique a deux et a trois dimensions*. Paris und Rio de Janeiro, Louis Dahl e F. Briguiet.

DEVRIES, H. (1984). How analytic geometry became a science. In: *Scripta Mathematica*, v.14.

DIEUDONNÉ, J. (1990). *A Formação da Matemática Contemporânea*. Lisboa, Publicações Dom Quixote.

ENCICLOPÉDIA BRASILEIRA MÉRITOVOL, v. 11, p. 713.

EULER, L. (1748). *Introduction à L'Analyse Infinitésimale*. Paris, ACL – éditions.

GRANGER, G. (1974). *Filosofia do estilo*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

LACROIX, S. F. (1863). *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et* *sphérique, et d'application de l'algèbre a la géométrie*. Paris, Mallet-Bachelier.

LAGRANGE, J. L (1880). *Mathematische Elementarvorlesung*. Leipzig: Teubner.

_____. (1824). Lagrange's mathematische Werke: *Über dei Auflösung der numerischen Gleichungen von beliebigen Graden*. Berlin, G. Reimer.

_____. (1806). *Leçons de Calcul de Fonctions*. Paris, Novel Edition.

_____. (1882). *Oeuvres de Lagrange*. Paris, Tome Treizième.Gauthier-Villars.

LAMÉ, G. (1818). *Examen des Différentes Méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*. Paris, Librairie Scientifique J. Hermann.

LAPLACE, P. (1932). *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit*. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

LEIBNIZ, G.W. (1962). *Mathematische Schriften*. Hildsheim, Georg Olms.

_____. (1966). *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*: (editor) Cassirer, Hamburg, Verlag von Felix Meiner.

LÜBSEN, H. B. (1848). *Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höhern Geometrie zum selbsunterricht*. Hamburg, Verlag von G. Bödecker.

LUTZ, E. (1909). *Analytische Geometrie der Ebene* – Elementares Lehrbuch für höhere Lehranstalten. Leipzig und Berlin, Teubner.

MAINZER, K. (1980). *Geschichte der Geometrie*. Mannheim, Wien, Zürich, Bibliographisches Institut.

MÖBIUS, A. (1827). *Der barycentrische Calcul*. : ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte. Leipzig, Verlag von Johann Barth.

MONGE, G. (1850). *Application de L'Analyse a la Géométrie*. Paris, Bachelier.

NEWTON, I. (1976). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. Cambridge, At the University Press 1972 und v.VII.

OHM, M. (1826). *Die analytische und höhere Geometrie in ihren Elementen. Mit vorzüglicher Berücksichtigung der Theorie der Kegelschnitte*. Berlim, Riemann.

PEREIRA, J. S. C. (1842). Applicação da Algebra á Geometria, ou Geometria Analytica segundo o systema de Lacroix. Rio de Janeiro, Typographia Nacional.

SALMON, G. (1873). *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*. Leipzig, Druck und Verlag Teubner.

SOUZA, J. V. (1812). *Tratado Elementar de Applicação de Álgebra à Geometria*. Rio de Janeiro, Impressão Régia.

SILVA DA SILVA, C. (1991). "Positivismus und Mathematikunterricht": Portugiesiesche und französische Einflüsse in Brasilien im 19. Jahrhundert. Diss. IDM. Universität Bielefeld.

_____. O desenvolvimento da Geometria Analítica e a Influência de Descartes e Euler na Obra de Auguste Comte. In: *Boletim da Sociedade Paranense de Matemática*. 14 1/2 (1993-1994).

STRUIK, D. J. (1980). *Abriss der Geschichte der Mathematik*. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

TROPFKE, J. (1903). *Geschichte der Elementar-Mathematik*, segundo volume. Leipzig, Verlag Von Veit.

UMPFENBACH (1843). Durch vier gegebene Puncte eine Parabel zu ziehen. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin.

WEIERSTRASS, K. (1988). *Einleitung in die Theorie der Analytischen Funktionen: Vorlesung Berlin 1878*, Braunschweig/ Wiesbaden, Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

WUßING, H. (1989). Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften.