Los pájaros de Fibonacci

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa, Zaragoza)

A lo largo de la historia, es posible encontrar problemas cuya presencia es casi constante en la enseñanza las matemáticas. Un interesante ejemplo es el siguiente enunciado que, hasta donde se conoce, apareció por primera vez en el *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (Fibonacci) en 1202:

> In quodam plano sunt duæ turres, quarum una est alta passibus 30, altera 40, et distant in solo passibus 50; infra quas est fons, ad cuius centrum uolitant duæ aues pari uolatu, descendentes pariter ex altitudine ipsarum; quæritur differentia centri ab utraque turri.

Aunque el latín en que está escrito resulta relativamente comprensible, una traducción modernizada podría ser similar a lo siguiente:

> Dos torres, de 30 y 40 pasos de altura, distan 50 pasos una de la otra. Entre ellas hay una fuente ubicada de modo que dos pájaros que vuelan a igual velocidad, saliendo a la vez desde cada una de las torres llegan a la vez a la fuente. Se pretende conocer a qué distancia de la fuente está cada una de las torres.

Este problema se sigue planteando hoy en día. De hecho, revisando nuestro libro de 1.º de BUP hemos podido comprobar que este enunciado aparecía propuesto en el tema titulado «Ecuaciones de segundo grado» y, además, el profesor nos lo mandó resolver.

Nuestro objetivo aquí es presentar (además del original) varios ejemplos de este mismo problema extraídos de textos españoles, italianos y portugueses de los siglos XV y XVI. De hecho, veremos hasta cuatro métodos diferentes para abordar su resolución por lo que, antes de continuar, sería interesante que el lector tratara de resolver el problema anterior por sus propios medios para poder comparar.

El primero de los procedimientos que vamos a analizar es, como no puede ser de otro modo, el que aparece en el texto de 1202. Fibonacci proporciona un largo fragmento en el que describe el procedimiento necesario para encontrar la solución del problema. Adaptado al lenguaje moderno y simplificando el discurso, sería algo como lo siguiente:

Figura 1. Filipo Calandri

> Supongamos, por ejemplo, que la fuente estuviera a 10 pasos de la torre más alta (y, por tanto, a 40 de la otra torre). En tal caso, el cuadrado de la distancia de la fuente a la parte más alta de una torre sería (por el teorema de Pitágoras) 1 700 mientras que el cuadrado de la distancia de la fuente a la parte más alta de la otra torre sería (por idéntico motivo) 2 500. El problema pide que ambos valores sean iguales, por lo que hemos cometido un exceso de 800. Ahora, supongamos que la fuente estuviera a 15 pasos de la torre más alta (y a 35 de la otra). En este caso los cuadrados de las distancias de la fuente a las cimas de ambas torres serían 1 825 y 2 125. Es decir, en este segundo intento hemos cometido un exceso de 300. Pero entonces, hemos visto que al pasar de 10 a 15 (un incremento de 5) el exceso se ha reducido de 800 a 300 (una reducción de 500). Como lo que queremos es que el exceso sea 0 (es decir que las distancias de la fuente a las cimas de ambas torres sean iguales) nos preguntamos qué incremento será necesario para reducir el exceso en 300. Para ello, se plantea una regla de tres: «con un incremento de 5 se produce una reducción de 500, ¿con qué incremento se produce una reducción de 300?». La respuesta es 3 y por tanto la distancia a la que está la fuente de la torre más alta será 18. Consecuentemente, la otra distancia es 32 y hemos terminado.

Vamos ahora con el primer ejemplo desde un punto de vista cronológico. Podemos encontrarlo en la obra *De Arithmetica Opusculum* escrita por el italiano Filippo Calandri y publicada por primera vez en 1491 en Florencia. El problema propuesto es idéntico salvo por los datos ya que, en este caso, las torres miden

80 y 90 brazas y están separadas 100 brazas una de la otra. El enunciado y la resolución van acompañados de una figura explicativa (figura 1). El procedimiento que da Calandri es completamente esquemático y, de hecho, solo indica la sucesión de operaciones que deben realizarse para resolver el problema. En concreto, Calandri indica que la distancia de la fuente a la torre más baja se obtiene mediante:

$$\frac{(90^2-80^2)+100^2}{200}.$$

De tal forma que la fuente está a 58½ brazas de la torre más baja y a 41½ brazas de la más alta.

El siguiente ejemplo, muy cercano en el tiempo, proviene de la *Summa de arithmetica, geometria, Proportioni et proportionalita*, del también italiano Luca Pacioli, publicada por primera vez en Venecia en 1494. Pacioli vuelve a plantear exactamente el mismo problema, pero con datos diferentes de los anteriores. En este caso las torres miden 70 y 100 brazas y distan 150 brazas y el enunciado y la resolución van acompañados de un diagrama geométrico (figura 2). Pacioli describe el procedimiento de resolución de forma retórico del siguiente modo (hemos actualizado el lenguaje y simplificado el discurso):

> Llamemos x a la distancia de la fuente a la torre más alta por lo que, la distancia de la fuente a la otra torre será $150-x$. Así, las distancias de la fuente hasta la parte alta de cada una de las dos torres serán, respectivamente, $\sqrt{10000+x^2}$ y $\sqrt{x^2+27400-300x}$. Si se igualan ambas cantidades, se eleva al cuadrado y se simplifica llegamos a $17\,400=300x$. De ahí se obtiene que las distancias buscadas son 58 y 92.

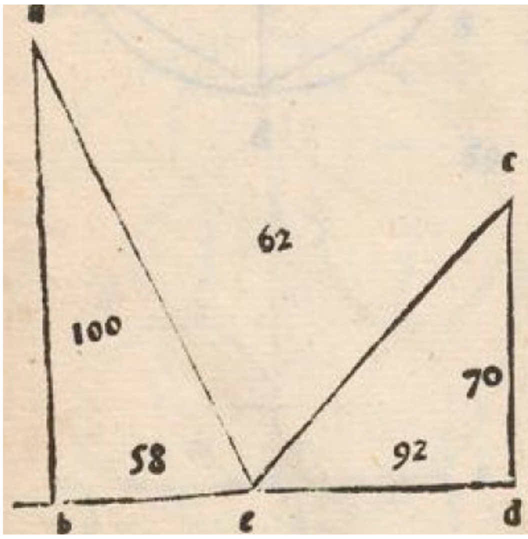

Figura 2. Luca Pacioli

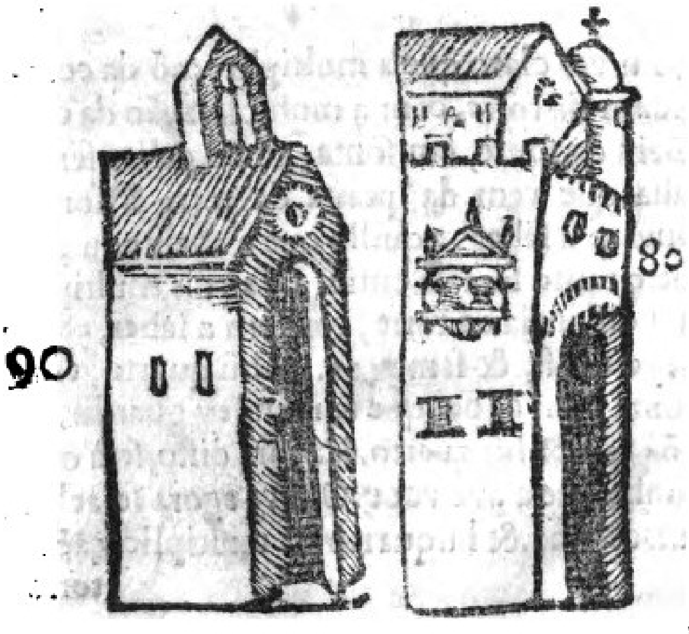

Figura 3. Gaspar Nicolas

En el *Tratado da Pratica de Arismetica*, escrito en portugués por Gaspar Nicolas y publicado por primera vez en Lisboa en 1519 encontramos un nuevo ejemplo de este problema. En este caso las torres miden 80 y 90 brazas y están separadas 100 brazas una de la otra. El problema viene acompañado de una imagen (figura 3) y el método que propone Nicolas es idéntico al de Calandri, salvo que en este caso en vez de presentar de modo esquemático las operaciones que deben realizarse, el autor las describe verbalmente de la siguiente manera:

> Multiplica 100 por sí mismo y serán 10 000. Después, multiplica 90 por sí mismo y son 8 100 y multiplica 80 por sí mismo y son 6 400. Resta éstos de los 8 100 y serán 1 700. Junta éstos con los 10 000 y son 11 700. Divide estos por el doble de la distancia entre las torres, es decir, por 200, y saldrán 58 y media que son las brazas que hay de la fuente a la torre más baja.

Un nuevo ejemplo, muy similar, lo podemos encontrar en la *Pratica Mercatiuol* del mallorquín Joan Ventallol, publicada en catalán en 1521 en Lyon. En este caso las torres miden 8 y 9 cañas y la distancia entre ellas es de 10 cañas. Además, el enunciado ya no menciona a los pájaros y se indica simplemente que las distancias entre la fuente y las partes altas de las torres son iguales. El problema viene acompañado de una figura (figura 4) y el método que propone Ventallol es idéntico al anterior de Nicolas, como podemos ver:

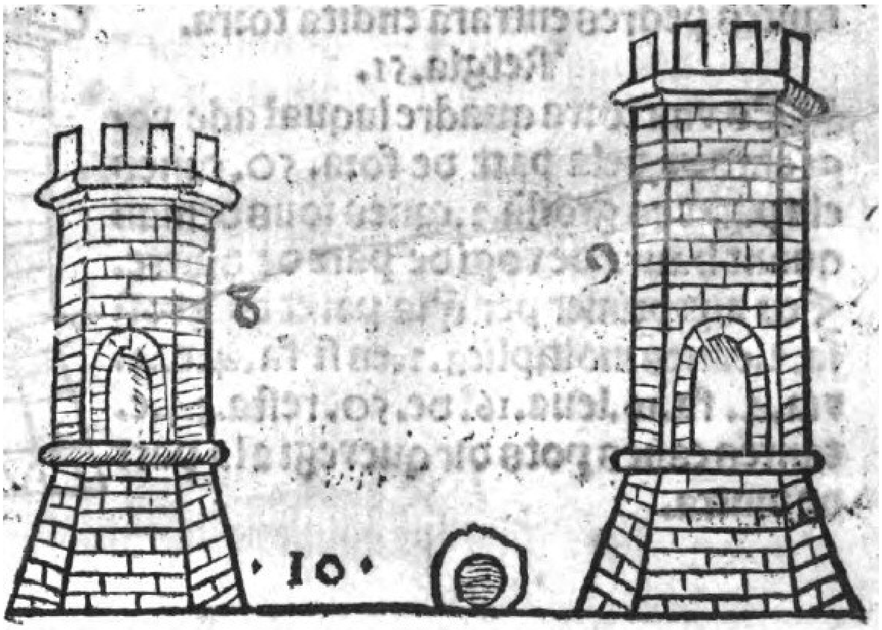

Figura 4. Joan Ventallol

> Cuadra la altura de cada torre y serán 64 la una y 81 la otra, y cuadra la distancia entre las torres y serán 100. Resta 64 de 81, serán 17, súmale 100 y serán 117. Dobla la distancia entre las torres, será 20, y divide 117 entre 20. Obtendrás 5 y 17/20 que es la distancia de la fuente a la torre de altura 8. Si restas esto de 10, que es 4 y 3/20, será la distancia a la torre de altura 9.

Para terminar con nuestra colección de ejemplos presentamos uno extraído de la *Suma de Arithmetica Pratica* que publicó en castellano Gaspar de Texeda en Valladolid en 1546. Los datos en este caso coinciden con los del ejemplo de Pacioli (salvo que en lugar de en brazas las distancias se miden en pasos); es decir, las torres miden 70 y 100 pasos y están a 150 pasos de distancia tal y como indica la figura que acompaña al problema (figura 5). El enunciado, como en el caso anterior, tampoco menciona a los pájaros y presenta la condición de igualdad de distancias directamente. Texeda presenta un proceso de resolución en el que describe verbalmente las operaciones a realizar del siguiente modo:

> Multiplica 100 por sí mismo y 70 por sí mismo. Resta el cuadrado de 70 del cuadrado de 100. Lo que queda divídelo por el doble de la distancia 150, que es 300, y sale 17. Esto súmaselo a la mitad de dicha diferencia, que es 75, y saldrá 92. Esto es lo que habrá de la fuente a la torre menos alta y el resto de los 150, que es 58, a la torre más alta.

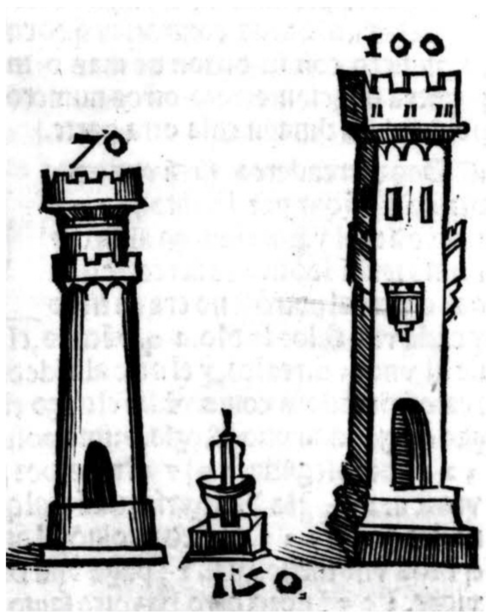

Figura 5. Gaspar de Texeda

Así pues, analizando los seis fragmentos que hemos presentado (Fibonacci, Calandri, Pacioli, Nicolas, Ventallol y Texeda) encontramos esencialmente tres enfoques posibles:

- El de Fibonacci, que utiliza el llamado método de doble falsa posición.
- El de Pacioli, que plantea una ecuación y la resuelve.
- El de los restantes autores, que dan implícitamente una fórmula.

Entre los autores que presentan una fórmula hay dos posibilidades. Por un lado tenemos a Calandri, Nicolas y Ventallol que presentan la misma y por otro a Texeda que opta por otra alternativa. De hecho, si llamamos h y H a las alturas de las torres (la más baja y la más alta, respectivamente), d a la distancia entre ambas torres y x a la distancia entre la fuente y la torre más baja, entonces:

— Texeda propone la fórmula: $x=\dfrac{d}{2}+\dfrac{H^2-h^2}{2d}$.

— Calandri, Nicolas y Ventallol proponen la fórmula: $x=\dfrac{H^2-h^2+d^2}{2d}$.

Es evidente que ambas expresiones son equivalentes, como no podría ser de otro modo. Sin embargo, si las pensamos desde un punto de vista algorítmico, son diferentes pues suponen realizar las diferentes operaciones en un orden distinto.

Pacioli es, posiblemente, el autor que adopta un enfoque más moderno (dejando a un lado el lenguaje y la notación). De hecho, es el único que utiliza explícitamente el lenguaje algebraico. Curiosamente, a diferencia de los cuatro autores anteriores que obtienen inicialmente la distancia de la fuente a la torre más baja, Pacioli toma como incógnita la distancia de la fuente a la torre más alta.

Por último, el método seguido por Fibonacci es, en nuestra opinión, el más interesante. Los métodos de falsa posición (simple y doble) eran muy utilizados en la antigüedad. El que aquí aparece (doble falsa posición) se utilizaba para encontrar la solución de una ecuación afín de la forma $ax+b=0$ con a y b valores positivos. Para ello se daban dos valores arbitrarios (de ahí el nombre) que se utilizaban para poder aplicar técnicas de proporcionalidad (también extensivamente utilizadas en la antigüedad). En nuestro problema, el valor que hay que igualar a 0 es la diferencia entre los cuadrados de las distancias de la fuente a las cimas de las torres, que resulta ser una función afín.

Conclusiones

A la vista de los ejemplos presentados, se pueden hacer algunas otras consideraciones interesantes al margen de los métodos de resolución. Por ejemplo, merece la pena fijarse en los valores elegidos para los datos. En la mitad de los seis ejemplos los datos están ajustados para que las soluciones sean enteras. En los otros tres casos, los datos o son los mismos o difieren solo en un factor 10, lo que invita a pensar en una clara influencia de un autor sobre el otro. Curiosamente, esta división por 10 de los datos que posiblemente Ventallol realizó pensando en simplificar la situación hace que las operaciones sean más engorrosas (recordemos que no se utilizaban expresiones decimales en la época). También es llamativa la modificación del enunciado original, eliminando la aparición de los pájaros y presentando de forma simplificada la condición subyacente. En el original hay que observar que si los pájaros vuelan a la misma velocidad y salen y llegan a la vez se concluye que las distancias de las cimas de las torres a la fuente son iguales. En las versiones más tardías esta condición se proporciona explícitamente.

Por otro lado, pese a su carácter anecdótico, merece la pena fijarse en las figuras que acompañan a los textos (y que hemos traído aquí). En el caso de Pacioli vemos la sobriedad de un simple diagrama geométrico que idealiza la situación; pero en el resto, los diagramas tienen un cierto carácter artístico que quizás trate de dulcificar el discurso. Esta práctica sigue siendo muy usual en los libros de texto hoy en día.

Para terminar, una pequeña reflexión. Al inicio de este artículo se ha recomendado resolver el problema antes de continuar la lectura. Probablemente casi todos los lectores los hayan resuelto utilizando ecuaciones. Habrán llamado x a una de las distancias, con ello habrán llegado a plantear una ecuación y a partir de ella habrán despejado el valor de la incógnita. Al hacerlo de este modo, se ha optado por una toma de posición más o menos explícita respecto a la *naturaleza* de ese problema, exactamente del mismo modo que hizo el autor del libro de 1.º de BUP cuando lo ubicó en el tema «Ecuaciones de segundo grado». Sin embargo, no hay ninguna ecuación de segundo grado en este problema. Más aún, no es imprescindible resolverlo haciendo uso del álgebra.

Cada uno de nosotros podrá tener una postura sobre la superioridad de uno u otro método de resolución, sobre sus ventajas e inconvenientes. Pero no dejará de ser una opinión personal. Pensamos que es interesante, y la lectura de textos antiguos nos puede ayudar a ello, poder tener visiones diferentes sobre un mismo problema. Además, conocer estos distintos métodos de resolución nos puede ayudar a planificar actividades en el aula en las que se trabajen problemas aparentemente algebraicos desde un enfoque aritmético o que, en nuestra opinión, resultaría enriquecedor para nosotros y para nuestros alumnos.