

Procurando um equilíbrio entre o que se pode “ver” e o que se pode “imaginar”

GILDA DE LA ROCQUE PALIS*
LYNNE IPIÑA**

Resumo

Neste artigo manifestamos nossa preocupação com o equilíbrio entre os aspectos algébrico e gráfico do conteúdo matemático de nosso currículo. Alunos e professores com bom desempenho no que concerne às habilidades algébricas podem ser enganados pelo que “vêm” em um gráfico. Em nossa opinião, uma análise revitalizada de nosso currículo, fundamentada em um re-olhar para objetos e processos familiares provocado pela reflexão do trabalho com esses objetos ou processos empregando ferramentas computacionais pode ser bastante benéfica para alunos e professores.

Palavras-chave: currículo de matemática, computador na educação matemática, funções, visualização.

Abstract

Our concern is with the balance between the algebraic and graphical aspects of the mathematical content of our curriculum. Students and teachers, independently of their command of algebra, are easily fooled by what they “see” on a graph. In our opinion, the time is ripe for an “incorporation” of the lessons already learned from having computers in the classroom in a renewed analysis of our core curriculum.

Key-words: mathematics curriculum, computer in mathematics education, functions, visualisation.

* Departamento de Matemática, PUC-Rio.

** Department of Mathematics, University of Wyoming.

*como ver bem à sua volta, sem admitir, ao lado,
por baixo ou por cima, “coisas invisíveis”?*

Debray (1994)

Introdução

E impossível negar, no momento atual, o potencial dos computadores para mudar o mundo fora da sala de aula. Procedimentos bancários têm se modificado constantemente e mesmo cidadãos de algumas cidades remotas utilizam cartões e senhas para realizar suas transações bancárias. Laboratórios médicos, oficinas mecânicas e supermercados registram dados variados e totalizam despesas eletronicamente. Milhões de pessoas obtêm ou atualizam programas via Internet, jornais de grande circulação têm seus próprios *Web sites*.

Houve um tempo, no passado não muito distante, em que educadores se preocupavam em introduzir os alunos aos próprios computadores antes de lhes apresentar programas especializados. Um professor que pretendesse coordenar atividades empregando computadores já esperava falhas diversas nas máquinas e nos programas. Um professor que pretendesse propor algum estudo apoiado em computadores tinha que pensar em tudo, preparar-se para tudo, carregar pilhas de disquetes porque os programas já instalados eram raros, os disquetes apresentavam defeitos, os computadores disponíveis não liam alguns deles. Era necessário experimentar com antecedência as atividades a propor aos alunos nas próprias máquinas que seriam por eles utilizadas, pois o mesmo programa podia funcionar de maneiras bastante distintas em computadores diferentes. Os professores tinham também que inventar/redigir a maior parte do material de suporte a ser usado pelos alunos.

A boa notícia é que o aspecto relacionado à implementação de ensino-aprendizagem apoiado em computadores está ficando mais fácil para os professores. Os disquetes apresentam menos defeitos e os CDs parecem indestrutíveis. As máquinas freqüentemente têm memória suficiente para rodar nossos programas de matemática. Estudantes estão rapidamente se tornando familiarizados com o trabalho com arquivos, impressoras e a Internet. Existe quase sempre pelo menos um aluno capaz de ajudar com os problemas técnicos que aparecem em um Laboratório de Computação. Materiais instrucionais de qualidade estão disponíveis

em maior volume e muitos podem ser obtidos via Internet. Os pacotes matemáticos são muito mais amigáveis, e como apresentam muitas características comuns a outros programas, os alunos descobrem como lidar com os novos *softwares* com certa rapidez.

Outra boa notícia é que o nível de aceitação do emprego de computadores no ensino tem aumentado. A instrução apoiada em computadores ainda está na sua infância e muitas escolas têm poucas ferramentas computacionais. No entanto, para muitos professores e administradores, a pergunta colocada, agora, com maior frequência é “como” e não “se” deveriam utilizar computadores nas escolas.

Hoyles (1999) comenta que o conhecimento matemático de adultos e crianças parece estar frequentemente em um estado de crise – uma crise de habilidades ou uma crise de criatividade. E que o desenho de um currículo equilibrado e globalmente efetivo com relação a esses aspectos é um desafio para a comunidade internacional de educadores matemáticos.

O foco deste artigo é também “equilíbrio”, apesar de se tratar de um tipo diferente de equilíbrio. Estamos preocupados com o equilíbrio entre os aspectos algébrico e gráfico do conteúdo matemático de nosso currículo. Nossa discussão pressupõe um certo nível de uso de tecnologia, e nada do que dizemos deve ser interpretado como uma defesa do retorno a um currículo de matemática tradicional isento de tecnologia.

Artigos nos anos 80 falaram da ameaça que a tecnologia representava para os educadores matemáticos. Difundia-se que era necessário se adaptar e integrar a tecnologia, e as discussões que se iniciaram como respostas às ameaças proclamadas tomaram direções variadas. A mudança mais aparente até agora recaiu sobre o currículo. Nas salas de aula com ou sem computador, muitos professores usam livros didáticos com conteúdos diferentes. As complicadas manipulações algébricas presentes nos problemas resolvidos, ou necessárias para resolver os problemas propostos, são menos frequentes; e os livros são repletos de figuras e gráficos.

É compreensível que, ao início, o maior desafio parecesse ser a tecnologia em si mesma. Havia também um otimismo exagerado em várias publicações relativo ao potencial de visualização de gráficos, e uma presença freqüente de “Olhemos o gráfico e nossos problemas estarão resolvidos”. Durante algum tempo tem se defendido a utilização de gráficos num esforço para encorajar um outro ponto de vista sobre diversos

conceitos e processos. No entanto, era mais difícil do que parecia à primeira vista obter bons gráficos de funções, em parte devido à própria tecnologia e em parte porque algumas questões novas surgiram, questões que nunca haviam sido tratadas enquanto realizávamos esboços de gráficos à mão e a partir de conhecimentos algébricos. Artigos apareceram chamando a atenção para o fato de que ao desenhar gráficos em escala, uma figura não poderia mostrar ao mesmo tempo comportamentos locais e globais. (ver, por exemplo, Dubinsky, 1995)

Muitos alunos não alcançaram o sucesso prometido com o trabalho com tecnologias variadas. Temos olhado de perto o que ocorre na interação de alunos e professores com o computador e calculadoras ao procurarem resolver problemas envolvendo gráficos de funções. A análise dessa interação tem apontado dificuldades na utilização da tecnologia por alunos e professores, em particular dificuldades relacionadas à *interpretação* de resultados obtidos graficamente (também de resultados numéricos e simbólicos) com as novas ferramentas.

Em experimentos que realizamos (ver Palis, 1991; Abrahão, 1998), foi possível constatar que as potencialidades do computador como suporte ao estudo das associações entre os contextos gráfico e algébrico no estudo de funções não se concretizaram com a maioria dos sujeitos envolvidos. Embora alunos e professores com bom desempenho no que concerne às habilidades algébricas possam ser enganados pelo que “vêem”, os alunos que foram bem-sucedidos ao extrair informações de gráficos também possuíam habilidades algébricas bem desenvolvidas.

A partir das análises efetuadas podemos dizer que é possível que tanto licenciandos como professores em exercício (mais os últimos do que os primeiros) apresentam bastante dificuldade em conciliar o que a máquina parece mostrar e os conhecimentos teóricos, muitas vezes confiando mais na máquina do em seus conhecimentos matemáticos. Isto pode apontar para a necessidade de uma formação específica acerca das diferenças entre os gráficos à mão e os gráficos à máquina, e as limitações das diferentes ferramentas computacionais.

Há diferenças e semelhanças entre os processos empregados e os resultados obtidos ao se utilizar computadores e quando se usa lápis e papel. E a transferência de esquemas de tratamento de gráficos no contexto lápis e papel, com suas convenções muitas vezes implícitas, para novos esquemas, agora em ambientes computacionais, precisa ser trabalhada

para que a utilização do quadro gráfico se realize de forma produtiva. Em nossa opinião, uma análise revitalizada de nosso currículo, fundamentada em um re-olhar para objetos e processos familiares provocado pela reflexão do trabalho com esses objetos ou processos empregando ferramentas computacionais pode ser bastante benéfica para alunos e professores.

Estas observações nos remetem à nossa discussão sobre equilíbrio. Atualmente, a abordagem gráfica ganhou ampla aceitação, e, certamente, é o momento para enfatizar o que se desejou transmitir o tempo todo. Ou seja, é necessário e produtivo empregar uma variedade de ferramentas, dentre as quais ferramentas analíticas e gráficas para resolver problemas. Figuras obtidas em computador podem não fornecer uma visão completa, nem mesmo correta, da situação em estudo. Assim, é preciso buscar um equilíbrio entre o que se pode “ver” nos gráficos gerados em computador e o que se pode “imaginar” a partir de conhecimentos teóricos.

Esperamos que fique claro para o leitor que pretendemos focar aspectos relativamente simples desse re-olhar, tais como a natureza da reta numérica *versus* seu modelo computacional discreto. Também procuramos chamar a atenção para o poder de resultados matemáticos que foram esquecidos ou relegados a cursos mais avançados, e que podem complementar o estudo do comportamento de uma função usando computador. Nesse caso trata-se de um resultado no contexto de teoria de equações.

Antes de prosseguir, é preciso mencionar, mesmo que em linhas muito gerais, qual é o procedimento empregado pelas diversas tecnologias (calculadoras gráficas e *softwares* usados em computadores) para desenhar um gráfico de uma função $f : D \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ dada por uma expressão algébrica.

Inicialmente, são fornecidos pelo usuário a expressão da função e quatro números a, b, c e d satisfazendo $a < b$ e $c < d$. Estes números caracterizam o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ denominado “janela gráfica”. As coordenadas dos quatro vértices da região $[a, b] \times [c, d]$ do plano cartesiano \mathfrak{R}^2 são atribuídas aos vértices da tela gráfica. Isso, por sua vez, determina as unidades das escalas, nos eixos horizontal e vertical.

Um gráfico de f é gerado da seguinte forma: a tecnologia determina os valores da função f em um certo conjunto de números $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

e “marca” na tela os pontos $(x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq n$, ligando-os sucessivamente para i crescente, por segmentos de reta.¹

Vemos então que o que essas tecnologias fazem é desenhar gráficos pelo procedimento de marcar pontos e ligá-los por segmentos de reta. Com vantagens óbvias sobre o procedimento análogo com lápis e papel: não é necessário fazer os cálculos e o desenho, o número de pontos utilizado pode ser “grande”, e o resultado é obtido quase que instantaneamente. Mas, assim como nem sempre se obtém um bom gráfico à mão por esse processo, também nem sempre se obtém um bom gráfico de uma função utilizando recursos computacionais. Para uma discussão mais detalhada ver Palis (1997).

A natureza discreta das telas dos computadores e os limites finitos das janelas gráficas são freqüentemente responsáveis pelos chamados “comportamentos escondidos” e pela impossibilidade de deduzir comportamentos assintóticos a partir de gráficos gerados em computadores como foi e tem sido feito com gráficos desenhados à mão.

Suponhamos, em um ambiente tradicional somente com lápis e papel, que dizemos que o gráfico de uma certa função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ é o que se encontra na Figura 1. De fato, o que vemos é “uma parte” do gráfico de f já que o gráfico dessa função, definida para todo x real, se estenderia para a esquerda e para a direita indefinidamente.

Quando dizemos, nesse ambiente, que o gráfico de uma função f é o que consta da Figura 1 estamos implicitamente afirmando que nenhuma mudança de comportamento ocorre quando $x > 10$ ou $x < -10$. No sentido de que, por exemplo, para $x > 10$ a função é decrescente e sua concavidade para cima. Se houvesse mudanças nesses aspectos de comportamento estas deveriam constar do gráfico apresentado. Freqüentemente, também por convenção, inferimos a partir de um gráfico como este o comportamento assintótico da função, isto é, que seus limites quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$ são $-\infty$ e ∞ respectivamente. De forma análoga, quando pedimos a um aluno, em uma disciplina inicial de Cálculo, que esboce o gráfico de uma função f dada por uma expressão algébrica, o que é que esperamos que ele faça? Que ele determine o

¹ A escolha dos pontos $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e o tipo de curva que liga os pontos marcados na tela varia com a tecnologia empregada. No entanto, as observações que fazemos sobre os gráficos obtidos são válidas para as diversas tecnologias.

comportamento de f utilizando recursos algébricos diversos como cálculo e análise de derivadas, cálculo de limites, etc. e produza um gráfico consistente com as informações obtidas algebricamente. Se o aluno verificar que a função é decrescente, tem concavidade para baixo para $x < 0$ e para cima se $x > 0$, $f(0) = 0$ e os limites de f quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$ são $-\infty$ e ∞ respectivamente, esperamos que esse aluno produza um gráfico semelhante ao que está apresentado na Figura 1.

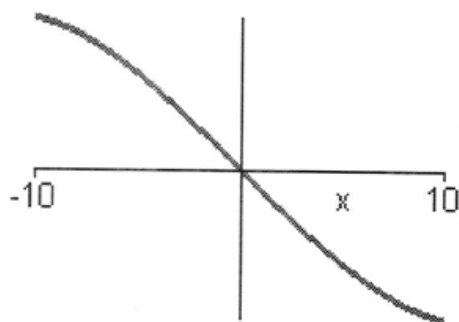


Figura 1

Por outro lado, quando dizemos que a Figura 1 é um gráfico gerado em computador de uma função $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, não podemos inferir, por exemplo, que a função é decrescente para $x > 0$ e que seu limite quando $x \rightarrow \infty$ é $-\infty$, fundamentando-nos somente em representações gráficas.²

A curva da Figura 1 é o gráfico gerado em computador de uma infinidade de funções, dentre elas a restrição do gráfico de

$$f(x) = \frac{x(x-20)(x+20)}{300}$$

e de

$$g(x) = \frac{-260x}{x^2+13^2} \text{ à janela } [-10, 10] \times [-10, 10].$$

Observe que essas funções têm comportamentos bastante distintos. Enquanto f tem três zeros e seus limites quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$ são iguais a ∞ e $-\infty$, a função g tem somente um zero e seus limites quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$ são iguais a zero. Gráficos dessas funções f e g , em outras janelas, podem ser vistos nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

² Todos os gráficos desse texto foram desenhados usando o *software* Maple com seus parâmetros no modo *default* exceto quanto à atribuição de valores aos vértices da janela gráfica.

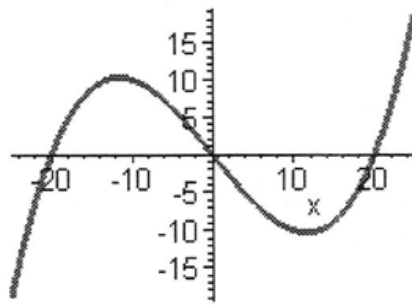


Figura 2

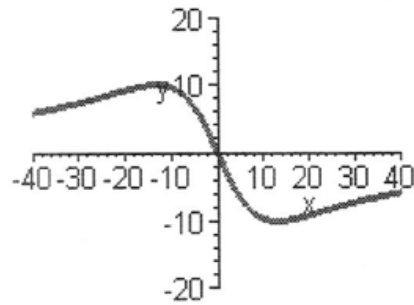


Figura 3

Nem todos os problemas se situam fora da janela gráfica. O gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 63,0001x^2 + 128x - 63,9936}{10x^2 - 20x + 10}$$

gerado na janela $[-10, 10] \times [-10, 10]$, e exibido na Figura 4, poderia ser interpretado por um estudante como “parabólico”. No entanto, f tem uma assíntota vertical $x = 1$ e mais dois zeros, $x = 0,99$ e $x = 1,01$, não visíveis nesse desenho.

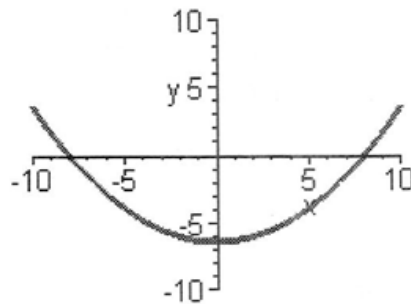


Figura 4

Esse desenho decorre do fato de o programa computacional empregado produzir o gráfico dessa função a partir da marcação dos pontos listados a seguir.

$\{[-10., 3.599997025], [-9.564056917, 2.747116011], [-9.184745171, 2.035952423], [-8.758169442, 1.270551863], [-8.328766092, .5368338446], [-7.901403621, -.1567818839], [-7.505183904,$

-7672203959], [-7.094921337, -1.366207037], [-6.670627204, -1.950269956], [-6.247693787, -2.496627483], [-5.812654783, -3.021297927], [-5.429472191, -3.452074823], [-4.998099350, -3.901889442], [-4.564955250, -4.316104421], [-4.147540650, -4.679772995], [-3.768488204, -4.979827765], [-3.317758183, -5.299219638], [-2.935930733, -5.537995322], [-2.491774637, -5.779058514], [-2.098621233, -5.959516821], [-1.667269637, -6.121935147], [-1.256520912, -6.241992930], [-.827947708, -6.331260774], [-.434383720, -6.380820933], [-.9871791e-2, -6.399362709], [.43107680, -6.379445720], [.81492384, -6.315099399], [1.22948916, -6.236970451], [1.65777570, -6.123762301], [2.07677053, -5.968187625], [2.48216956, -5.783620141], [2.93229608, -5.540015590], [3.33675477, -5.286509946], [3.76860075, -4.979699872], [4.15991740, -4.669461959], [4.58772985, -4.295240111], [4.99026803, -3.909697944], [5.41103641, -3.472050652], [5.82241442, -3.009936090], [6.25308906, -2.489878698], [6.66787993, -1.953931641], [7.09206351, -1.370259825], [7.51273463, -.7558800559], [7.89928770, -.1601250469], [8.34232114, .5594311626], [8.73857553, 1.236268165], [9.16106536, 1.992508861], [9.56544204, 2.749764394], [10., 3.599995555]]

Técnicas como ampliação de escalas ³ (*zoom in*) e redução de escalas (*zoom out*) têm sido freqüentemente ensinadas aos alunos como parte dos procedimentos possíveis para melhor visualizar o comportamento de funções. E algumas vezes é dito aos alunos, sem o cuidado necessário: “olhe os gráficos, é claro que...”. No entanto, não é difícil apresentar exemplos para os quais esses procedimentos de *zoom in* e *zoom out* dão informações visuais conflitantes com resultados obtidos algebricamente.

Por exemplo, se tentarmos ver que $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x - \frac{x^3}{6}$ são diferentes em uma vizinhança de 0, a aplicação de procedimentos de *zoom in* sugere exatamente o oposto (ver Figuras 4 e 5). Observe que as funções f e g têm derivada igual a 1 no ponto 0.

3 Mantendo a proporção entre as escalas adotadas nos dois eixos coordenados.

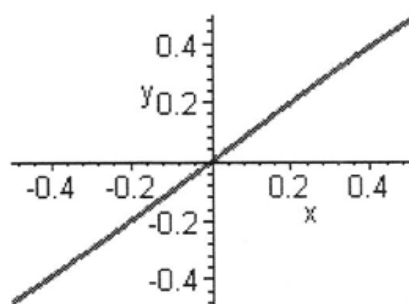


Figura 5: gráficos de f e g

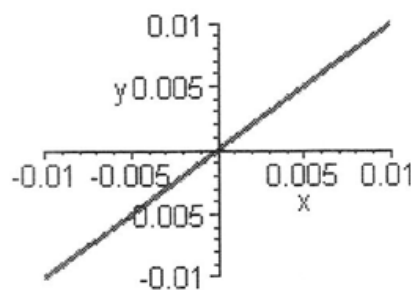


Figura 6: gráficos de f e g

Distinguir entre o comportamento assintótico de $f(x) = x + 0,9 x \text{sen}(x)$ (cujo limite quando x tende a ∞ é ∞) e o de $g(x) = x + 1.1 x \text{sen}(x)$ (que não tem limite quando x tende a ∞) por procedimentos de *zoom out* é uma tarefa interpretativa quase impossível (ver Figuras 7 e 8).

Os limites mencionados acima podem ser determinados da seguinte forma:

Como temos que $0,1 x \leq x + 0,9 x \text{sen}(x)$ para $x > 0$ temos que $0,1 x \leq f(x)$ para $x > 0$, logo o limite de f quando x tende a ∞ é ∞ .

Com relação à função g , podemos verificar que a seqüência (a_n) , onde $a_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, é tal que $(g(a_n))$ tende a $-\infty$ quando n tende a ∞ , pois nesse caso $(g(a_n)) = -0,1 a_n$ e (a_n) tende a ∞ . E a seqüência (b_n) onde $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, é tal que $(g(b_n))$ tende a ∞ quando n tende a ∞ , pois nesse caso $(g(b_n)) = 2,1 b_n$ e (b_n) tende a ∞ . Assim podemos concluir que g não tem limite quando x tende a ∞ .

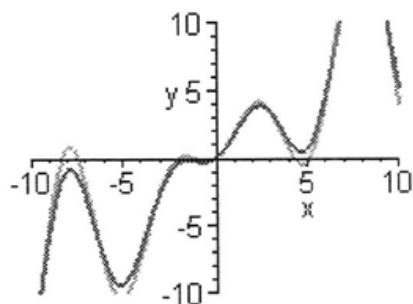


Figura 7 : gráficos de f e g

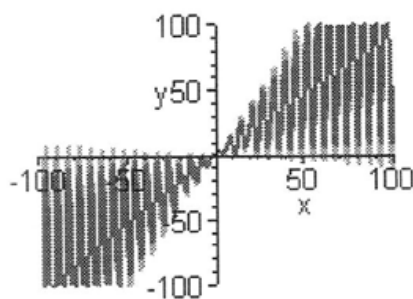


Figura 8: gráficos de f e g

Não podemos culpar as figuras por serem “distorcidas” (em relação às que faríamos à mão; de fato as figuras em computador são desenhadas respeitando as escalas escolhidas) nem por induzirem a respostas errôneas. Por outro lado, também não podemos criticar os alunos por não possuírem “intuições” e conhecimentos matemáticos que nos custaram anos de trabalho para dominar.

Em Harvey, J., Waits, B. e Demana, F. (1995) os autores descrevem uma estratégia para encontrar os zeros de

$f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 48x^2 + 36x - 9$, usando uma calculadora gráfica. Aqui apresentaremos a mesma estratégia usando figuras geradas com o Maple; os resultados são praticamente idênticos.

Inicialmente, no artigo acima mencionado, são apresentados gráficos de f nas janelas $[-3, 4] \times [-50, 50]$, Figura 9, e $[0, 2] \times [-2, 2]$, Figura 10. A partir desse último gráfico os autores dizem que se pode facilmente obter aproximações de dois zeros da função f (p. 85).

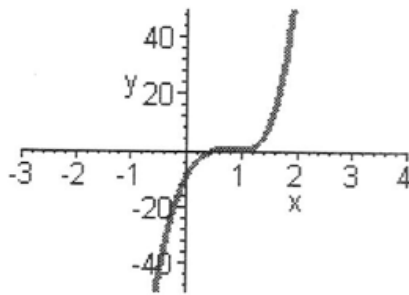


Figura 9

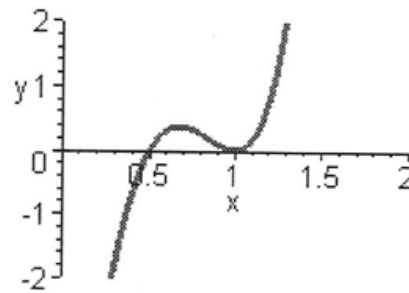


Figura 10

Mais adiante (pp. 101-102) os autores argumentam que é possível obter evidências de que f não tem outro zero real além dos que já foram descobertos: “se pudermos ver graficamente que $g[g(x) = x^3]$ limita f digamos para $x < 0$ e $x > 2$, então nós podemos ficar mais seguros de que todos os zeros de f estão no intervalo $[0, 2]$. Para ver que g limita f em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$..é mostrado na Figura...”. A afirmativa é validada exibindo os gráficos de f e g na janela $[-3, 3] \times [-20, 20]$ (ver Figura 11) e a diferença $g - f$ na janela $[-3, 3] \times [-50, 50]$ (ver Figura 12).

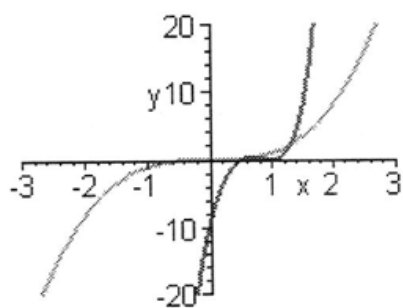


Figura 11 : gráficos de f e g

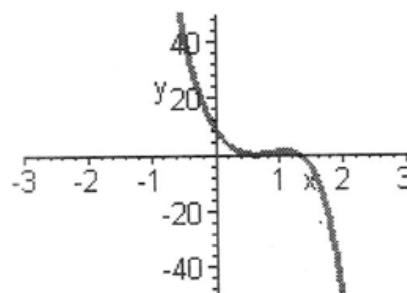


Figura 12: gráfico de g - f

Os autores são cuidadosos ao dizer que a esta altura somente evidências empíricas são disponíveis e que é necessário utilizar argumentos simbólicos e numéricos para provar o resultado.

Gostaríamos de apontar algumas questões relacionadas com a argumentação apresentada no artigo citado acima.

Inicialmente, quando os autores dizem que g limita f em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$, eles estão nos pedindo para “ver” o comportamento assintótico de f e g em uma representação gráfica não apenas finita, como não poderia deixar de ser em se tratando de gráficos em computador, mas também utilizando números com valores absolutos tão pequenos que provavelmente nenhum aluno venha a tomar esse comportamento como evidência do comportamento da função para valores com módulo bem maior.

Por outro lado, a Figura 12 não fornece mais evidência empírica de que $g - f$ não tem zeros fora do intervalo $[-3, 3]$ do que a Figura 9 revela sobre a existência de zeros de f fora do intervalo $[-3, 4]$.

Além disso, se um aluno repetir a mesma estratégia para encontrar os zeros de $F(x) = \frac{(x - 0,5)(x - 1)^2(x - 40)^2}{30}$ ele encontrará o mesmo tipo de evidências empíricas ao examinar as Figuras 13, 14 e 15. Só que nesse caso a mesma conclusão anterior é incorreta. Esta função tem três zeros: 1, $\frac{1}{2}$ e 40.

Procurando um equilíbrio entre o que se pode "ver" e o que se pode "imaginar"

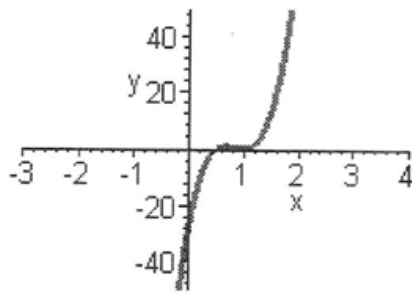


Figura 13: gráfico de F

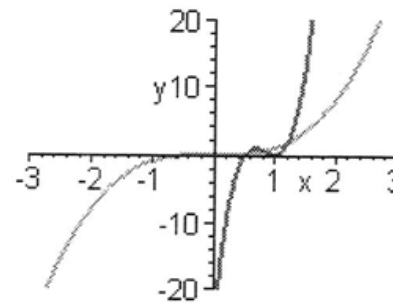


Figura 14: gráficos de F e de $g(x) = x^3$

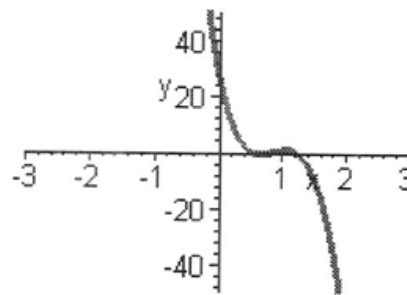


Figura 15: gráfico de $g - F$

Finalmente, existem critérios bastante simples para determinar um intervalo que contém todos os zeros de uma função polinomial. A seguir enunciamos e demonstramos um desses resultados.

Uma ferramenta analítica

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

Então os zeros de f pertencem ao intervalo $[-a - 1, a + 1]$, onde

$$a = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right\}$$

Se aplicarmos esse critério a $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 48x^2 + 36x - 9$ obtemos que todos os zeros de f pertencem ao intervalo $[-9, 9]$.

Demonstração:

Podemos considerar $a_0 \neq 0$ porque nesse caso ou temos $f(x) = a_n x^n$,

cujo único zero é 0, ou podemos reduzir o problema, fatorando, ao estudo de uma função polinomial com termo independente diferente de zero.

Seja

$$a = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{a_i}{a_n} \right\}$$

Temos vários casos a considerar. O primeiro fornece a extremidade direita do intervalo $[-a - 1, a + 1]$. Os casos (iii) a (vi) determinam sua extremidade esquerda.

$$i) f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ e } a_n > 0.$$

Inicialmente mostraremos que se $x > a + 1$, então $f(x) \neq 0$ porque $f(x) > 0$.

Podemos reescrever a expressão da função da seguinte maneira:

$$f(x) = a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right]$$

$$\text{Seja } u = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}. \text{ Assim } f(x) = a_n x^n [1 + u]$$

$$\text{Como } |u| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \left| \frac{1}{x} \right| + \dots + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| \left| \frac{1}{x^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \left| \frac{1}{x^n} \right| \leq a \left| \frac{1}{x} \right| + \dots + a \left| \frac{1}{x^n} \right|, \text{ e se } x > 1 + a, \text{ então } |x| > 1 + a > 1, \text{ temos que } \frac{1}{|x^k|} < \frac{1}{(1+a)^k}, k = 1, \dots, n.$$

Desta forma, uma estimativa de $|u|$ pode ser obtida através da soma de n termos de uma progressão geométrica:

$$|u| < \frac{a}{1+a} + \dots + \frac{a}{(1+a)^n} = \left[1 - \left(\frac{1}{1+a} \right)^n \right]$$

Esta última expressão nos diz que $|u| < 1$ e $1 + u > 0$.

Quando $a_n > 0$ e $x > a + 1$, então $a_n x^n > 0$ e o primeiro caso está provado.

ii) A demonstração de que $f(x) \neq 0$ quando $a_n < 0$ difere da anterior somente no último passo: $f(x) < 0$ porque $a_n x^n < 0$

iii) Se n é par $a_n > 0$ e , então para $x < -1 - a$, $f(x) > 0$.

Procurando um equilíbrio entre o que se pode “ver” e o que se pode “imaginar”

Seja $g(x) = f(-x)$. Então $g(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ e $a_n > 0$

Por i), se $x > 1+a$, então $g(x) > 0$.

Portanto, se $x < -1 - a$, então $-x > 1+a$ e $f(x) = g(-x) > 0$.

iv) Se n é ímpar $a_n > 0$ e, então para $x < -1 - a$ temos que $f(x) < 0$.

Seja $g(x) = f(-x)$. Então $g(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots + a_0$ e $a_n > 0$

Logo, por ii), se $x < -1 - a$, então $-x > 1+a$ e assim $f(x) = g(-x) < 0$.

v) Se n é par $a_n < 0$ e, então para $x < -1 - a$, $f(x) < 0$.

Seja $g(x) = f(x)$. Por iii), se $x < -1 - a$, então $-f(x) > 0$ e assim $f(x) < 0$.

vi) Se n é ímpar $a_n < 0$ e, então para $x < -1 - a$, $f(x) > 0$.

Seja $g(x) = -f(x)$. Por iv), se $x < -1 - a$, então $-f(x) > 0$ e assim $f(x) > 0$.

O resultado do teorema decorre da junção de todos esses casos. Um resultado similar é provado em Hirst e Macey (1997).

Referências bibliográficas

- ABRAHÃO, A. M. C. (1998). *O comportamento de professores frente a alguns gráficos de funções $f : D \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ obtidos com novas tecnologias computacionais*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, PUC-Rio.
- DEBRAY, R. (1994). *Vida e morte da imagem*. Rio de Janeiro, Editora Vozes.
- DUBINSKY, E. (1995). Is Calculus Obsolete?. *The Mathematics Teacher*, 88 (2), pp. 146-148.
- HARVEY, J. G., WAITS, B. K. e DEMANA, F. D. (1995). The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, pp. 75-109.
- HIRST, H. P e Macey, W. T. (1997). Bounding the Roots of Polynomials. *The College Mathematics Journal*, 28 (4), pp. 292-295.
- HOYLES, C. (1999). Steering between skills and creativity: a role for the computer? *Educação Matemática Pesquisa*, 1(1) pp. 109-117.

PALIS, G. L. R. (1991). Experiências com a utilização de um software gráfico na área de Matemática. In: II SEMINÁRIO NACIONAL DE INFORMÁTICA EDUCATIVA. *Anais...* Alagoas, Brasil.

PALIS, G. L. R. (1997). Gráficos de funções em calculadoras e com lápis e papel. *Educação e Matemática*, 45, APM de Portugal, pp. 37-40.