A apropriação da ferramenta logaritmo a partir de situações com exponenciais aliada ao uso da calculadora

MONICA KARRER*
SANDRA MAGINA**

Resumo

Este artigo descreve um estudo sobre o processo ensino-aprendizagem dos logaritmos com alunos da 1ª série do ensino médio. Primeiramente, será apresentado uma seqüência de ensino de tal conteúdo, baseada em situações-problema envolvendo equações exponenciais integradas ao uso da calculadora, nas quais o logaritmo assume o papel de ferramenta de resolução. Depois, serão relatados os principais resultados obtidos pelos alunos, a partir da análise de dois testes aplicados antes e depois do desenvolvimento da seqüência (pré e pós-testes). A análise levou em consideração quatro pontos de vista: o desempenho geral nos testes, o acerto por itens, por sujeito e o tipo de erro apresentado. O estudo conclui que a abordagem desenvolvida por nossa seqüência favoreceu a formação do conceito de logaritmo para esse grupo.

Palavras-chave: ensino-aprendizagem, matemática, formação de conceito, ensino médio.

Abstract

This paper describes a project concerning the process of learning logarithms carried out with 15-year-old students from the first year of High School. First we present a didactic sequence which was based on exponential problem-solving from the everyday life integrated with the use of calculators and in which logarithms appeared as a problem-solving tool. We go on to report the main results these students obtained in two diagnostic tests administered before and after the sequence (pre and post-tests). The analysis took into account four viewpoints: general performance in the tests, general performance on each item of the test, individual performance, and finally the nature of mistakes made by the students. The study concludes that the approach we chose (introducing this concept through the didactic sequence) favoured the formation of the concept of logarithm in this group of students.

Key-words: *teaching-learning, mathematics, concept formation, high school.*

* Mestra em Educação Matemática pela PUC-SP.

** PhD. em Educação Matemática, professora do Departamento de Matemática e do Mestrado em Educação Matemática e membro pesquisadora do Proem – Programas de Estudos e Pesquisas no Ensino da Matemática – PUC-SP.

Introdução

O objetivo desta pesquisa foi o de criar e testar uma nova abordagem para a formação do conceito de logaritmo. Nesse sentido, elaboramos uma seqüência de ensino que, aliada ao uso da calculadora, pudesse facilitar o processo ensino-aprendizagem desse conceito.

Historicamente, os logaritmos surgiram no início do século XVII para facilitar os enfadonhos cálculos numéricos exigidos pela astronomia e navegação. Atualmente, não faz sentido estudar tal conteúdo para este fim, porém, no ensino médio, podemos utilizar os logaritmos na resolução de problemas que envolvem aplicações financeiras, valorização e desvalorização de bens, crescimento populacional e várias outras situações que fazem parte da vida moderna e que podem ser conhecidas do aluno. Com isso, a seqüência de ensino elaborada – aliada ao uso da calculadora – procurou introduzir os logaritmos como uma necessidade de estudo para a resolução de problemas, partindo de questões reais e atuais.

Nosso ponto de partida teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1983, 1987 e 1994), a qual afirma que a aquisição do conhecimento se dá por meio de situações e problemas já conhecidos, e que o conhecimento, portanto, tem características locais. Conseqüentemente, todos os conceitos têm um domínio de validade restrito, o qual varia de acordo com a experiência e com o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Tal tese é confirmada no trabalho de Lester e Mau (1993). Este mostrou que trabalhar com situações-problema, além de favorecer o desenvolvimento cognitivo do estudante, favorece sua autoconfiança e autonomia para lidar com a matemática A Teoria dos Campos Conceituais defende ainda que, na perspectiva da resolução de problema, um conceito nunca vem sozinho, estando sempre relacionado a outros e é esta inter-relação entre os conceitos que forma o campo conceitual.

Outro pressuposto teórico que esteve presente durante todo o planejamento metodológico e na execução da pesquisa veio da Teoria Socioconstrutivista, de Lev Vygotsky. Tomamos emprestado de Vygotsky duas idéias: a noção de ferramenta – instrumento produzido culturalmente que se torna internalizado à medida que é apropriado pelo sujeito através de sua própria ação e que o torna mais poderoso intelectualmente (Vygotsky, 1991, 1993, 1997) – e a noção de conceito que, para ele, é muito mais do que a soma de conexões associativas formadas pela memória, é mais do que um hábito mental e não pode ser ensinado por treinamento. Para Vygotsky (1993), um conceito só aparece quando o sujeito, após abstrair as propriedades do objeto, for capaz de sintetizá-las novamente "e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento" (p. 68). Este autor é categórico em afirmar que "o adolescente formará e utilizará um conceito com muito mais propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras..." (p. 69). E quando ele consegue definir verbalmente o conceito, este, normalmente, é bem mais limitado do que poderíamos esperar considerando o modo como o adolescente usou o conceito em questão. Neste sentido, a palavra (linguagem) que exerce a função de ferramenta na formação de um conceito, ainda terá um longo caminho a percorrer na apropriação deste conceito. Para Vygotsky, o pensamento é organizado a partir da linguagem, portanto, de fora para dentro.

Das pesquisas atuais em Educação Matemática relacionadas diretamente com nosso tema, tivemos as contribuições de Confrey (1991; Confrey e Smith, 1995), que apresentou uma abordagem co-variacional para a construção das funções exponencial e logarítmica, baseada no isomorfismo entre os mundos da contagem e do seccionamento. Fazendo um paralelo com a história, podemos relacionar estes dois mundos com as progressões aritmética e geométrica, respectivamente. A abordagem co-variacional permite explorar a comparação entre os crescimentos desses dois mundos e obter padrões de comportamento entre os seus elementos, tais como "somar elementos de uma progressão aritmética corresponde a multiplicar elementos de uma progressão geométrica". A partir disso, o aluno constrói, através de interpolações, os conceitos de função exponencial e função logarítmica. Já o tratamento usual de funções, baseado na correspondência entre elementos de dois conjuntos, "oculta" a análise variacional conjunta, ou seja, o impacto que a variação dos elementos de um conjunto provoca nos elementos do outro.

Ainda, como adotamos o uso da calculadora durante todo o processo, pesquisamos os resultados dos estudos de Gracias e Borba (1998), que defendem o uso da tecnologia como ferramenta do processo de ensino-aprendizagem, desde que a abordagem adotada não privilegie apenas as técnicas de cálculo.

O estudo

A seqüência de ensino foi inicialmente desenvolvida com 16 alunos da primeira série do ensino médio de um colégio da rede particular do ABC paulista, organizados em duplas. Como um dos requisitos para considerar o aluno como sujeito de nossa pesquisa era que o mesmo estivesse presente em todos os encontros planejados, esse número ficou reduzido a 13 no final do estudo. Vale salientar que nenhum teve contato anterior com os logaritmos, porém todos tinham estudado o conteúdo de função exponencial dado no ensino médio. Foram cinco encontros em horário escolar, com a duração aproximada de 60 minutos cada. A seqüência era composta de quatro fichas, as quais continham situações-problema, atividades de cálculo e questões conceituais. Resumidamente, a primeira ficha teve por objetivo revisar o conteúdo de função exponencial, preparando o aluno para a introdução do logaritmo como uma ferramenta de resolução de problemas envolvendo equações exponenciais. A segunda ficha introduziu os logaritmos decimais, explorando os aspectos históricos inerentes a tal conceito. A terceira explorou a existência de logaritmos em outras bases (no caso, na base 2) e, por fim, a quarta ficha desenvolveu atividades sobre os logaritmos de base ½, a exploração das condições de existência da base e a definição matemática formal. Tal definição representou a última etapa do estudo, apresentada somente após a construção do conceito.

A seguir, para que o leitor tenha uma idéia desta seqüência, apresentaremos parte da mesma, selecionando o problema que introduziu os logaritmos e as atividades de exploração do logaritmo decimal (equivalente a parte das fichas 2 e 3).

Etapas

Situação-problema para introduzir os logaritmos:

O valor de um certo automóvel (em reais) sofre uma depreciação de 10% ao ano. Se o valor atual é de 10000 reais, determine a função que representa o valor deste automóvel após "t" anos.

Obs: neste caso, o aluno deveria construir a função $f(t) = 10000.\ 0{,}9^t$

1) Sabendo que a vida útil deste carro é de 20 anos, determine o valor do carro (utilize a calculadora, e quando necessário, use aproximação de duas casas decimais)

A) NO ATO DA COMPRA
B) APÓS UM ANO
C) APÓS DOIS ANOS E MEIO
D) APÓS SEIS ANOS
E) APÓS NOVE ANOS
F) APÓS DEZ ANOS
G) APÓS TREZE ANOS
H) APÓS DEZESSEIS ANOS
I) APÓS VINTE ANOS

2) Com os dados obtidos, construa uma tabela relacionando o tempo e o respectivo valor do carro.

Obs: O aluno construiria a seguinte tabela:

Tempo (em anos)	Valor do carro (em reais)
0	10000
1	9000
2,5	7684,43
6	5314,41
9	3874,20
10	3486,78
13	2541,86
16	1853,02
20	1215,77

3) Represente tais dados graficamente, no papel milimetrado:

Obs: utilizando os valores tabelados, o aluno deveria construir o gráfico da função $f(t) = 10000.\ (0{,}9)^t$

4) Analisando o gráfico, existe um tempo "t" em que o valor do carro seja de 5000 reais? Este valor pertence a que intervalo?

Obs: o aluno poderia notar, através da análise gráfica, que este valor está entre 6 e 7 anos.

5) Utilizando a função obtida, tente calcular o valor de "t", ou seja, o tempo necessário para que o valor do carro atinja 5000 reais.

Obs: através da função obtida, $f(t) = 10000.0{,}9^t$, podemos substituir 5000 em f(t), obtendo: $5000 = 10000.(0{,}9)^t \Rightarrow 0{,}5 = 0{,}9^t$

Os conhecimentos disponíveis dos alunos não são suficientes para resolver tal equação, visto que a mesma exige a aplicação de logaritmos.

Comentário: o problema explora os quadros numéricos, gráfico e a construção algébrica da função, fornecendo ao aluno várias formas de contato com o objeto de estudo (jogo de quadros). O aluno trabalha com os seus conhecimentos de função exponencial até se deparar com a questão 5. Pela análise gráfica realizada nos exercícios 3 e 4, o aluno já sabe que este tempo está entre 6 e 7 anos, porém, para obter uma melhor aproximação, há necessidade da aplicação de logaritmos (para determinar o expoente da equação $0{,}9^t = 0{,}5$). Com isso, a introdução deste conteúdo se dá através de uma necessidade, fato que acreditamos representar uma motivação para o estudo de um novo assunto. Neste momento, o professor pode intervir no processo relatando os aspectos históricos inerentes ao conteúdo de logaritmos.

Exploração do logaritmo de base 10

Após a resolução da equação do exercício 5, pede-se ao aluno que preencha a tabela e que responda às questões a seguir:

Valor	Número	Representar o número como potência de base 10	Apresentar o cálculo do logaritmo	Representar na notação de logaritmo
0	1			
	6			
	8,2			
1	10			
	29			
2	100			
	850			
3	1000			
3,0792				
4				
4,30103				
	100000			

Em seguida, pede-se ainda para que ele responda às seguintes questões:

a) o que representam os valores da primeira coluna?

Obs: esperávamos que, após preencher a tabela, o aluno pudesse perceber que os valores da primeira coluna coincidiam com os expoentes do 10, ou seja, são os logaritmos decimais dos números.

b) o que você notou em relação aos resultados obtidos pelo cálculo dos logaritmos de 1 a 10?

c) e dos logaritmos entre 10 e 100?

d) o que aconteceria com os logaritmos entre 10000000 e 100000000?

e) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 238?

f) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 3495?

g) entre que inteiros consecutivos está o logaritmo de 12375?

h) marque as linhas onde os números (da 2ª coluna) são 1, 10, 100, 10000, 10000 e 100000. Estes números aumentam multiplicando-se por dez. O que ocorre com os seus logaritmos?

i) Tente representar o número 0,2 como potência de base 10. Em seguida tente representar 0,84 como potência de base 10. Existem logaritmos de números entre 0 e 1 nesta base? O que ocorre com eles?

j) Tente representar o número 0 como potência de base 10. O que acontece? Existe o logaritmo de 0 na base 10? Tente justificar a sua resposta.

l) Tente representar o número -10 como potência de base 10. O que acontece? Tente calcular o logaritmo de -250 na base 10. Existem os logaritmos de números negativos nesta base? Justifique.

m) procure, baseado neste estudo, escrever com suas palavras o que é logaritmo de um número na base 10 e quando ele existe.

Comentário: podemos observar que há uma grande preocupação em explorar a relação logaritmo-expoente. Além disso, há questões de estimativas (itens "e, "f" e "g"), as quais têm por objetivo observar como o aluno está construindo o conceito. O item de análise de crescimento ("h") permite a comparação da variação exponencial e logarítmica. O item "i" explora a questão do sinal e os itens "j" e "l", a análise da existência do logaritmo. Finalmente, a última questão pede para que o aluno conceitue logaritmo decimal.

Exploração do logaritmo de base 2 e ½

Após o estudo dos logaritmos de base 10, o aluno passa a ter contato com logaritmos em outras bases (no caso, nas bases 2 e ½). Tal conteúdo segue abordagem semelhante à utilizada para a base 10, através do preenchimento de tabelas e exploração de questões de crescimento, de sinal e de existência. Ainda, o aluno realiza o levantamento das semelhanças e diferenças entre os logaritmos estudados.

Exploração das condições de existência e apresentação da definição formal

A última etapa de nosso estudo procurou explorar questões de existência do logaritmando e da base, além de solicitar a interpretação da definição matemática:

"Se $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$"

Comentários gerais sobre a aplicação

Discutiremos, neste momento, o comportamento apresentado pelos alunos ante os exercícios discutidos neste artigo.

Em relação ao problema do automóvel, construímos juntos a função que representava o valor do carro após "t" anos. Os alunos conseguiram efetuar todos os cálculos numéricos sem dificuldade, bem como a construção da tabela. No item que solicitava a construção do gráfico, seis duplas localizaram incorretamente o ponto (0,10000), colocando-o no lugar de (0,0) ou de (1,10000), o que denotou dificuldade de trabalhar com o eixo cartesiano. Chamamos a atenção para essa questão, pois os sujeitos da pesquisa trabalham com a representação gráfica de função há mais de um ano (desde a última série do ensino fundamental) e, no entanto, ainda apresentam dificuldade em determinar um ponto no plano. Como esse comportamento ocorreu com a maioria das duplas, questionamos sobre a ênfase dada na escola à memorização, em detrimento da construção do conhecimento.

Outro fato notado em vários momentos da aplicação foi a "tendência à linearidade". Exemplificando: houve um momento em que os alunos queriam utilizar a régua para unir os pontos, alegando que a representação não sairia "perfeita" à mão livre.

Em relação ao item que questionava a existência de um tempo "t" (que faria com que o valor do carro assumisse 5000 reais), inicialmente as duplas não tinham idéia de como obtê-lo. Sugerimos que prosseguissem para a próxima questão (questão 5), que solicitava o uso da função dada na forma algébrica para obter esse resultado. Através dessa função, todos conseguiram obter a equação $0{,}9^t = 0{,}5$, justificando que não daria para trazer para a mesma base.

A experimentadora resolveu inicialmente a equação $0{,}9^t = 0{,}5$ usando logaritmos e fez a relação do valor encontrado e o intervalo por eles determinado no gráfico. Aproveitou ainda o encontro para relatar os fatos históricos inerentes a este conteúdo. Assim sendo, foi discutido o contexto da época, a criação dos logaritmos por Napier e as tabelas de Henry Briggs. Por fim, foi apresentada a utilidade dos logaritmos usada na época, exemplificada pela resolução do cálculo de $0{,}71^5 \times 0{,}34$. A experimentadora comentou que atualmente não há mais a necessidade de usar os logaritmos para esse fim, mas que se pode utilizá-los na resolução de equações exponenciais "não diretas".

Em seguida, os alunos preencheram a tabela sem dificuldades, pois perceberam que a primeira coluna coincidia com os expoentes do dez, ou seja, representava o logaritmo de cada número. A tabela foi preenchida na ordem dada e todos conseguiram estabelecer a relação inversa quando era dado somente o valor da primeira coluna e se pedia para determinar o número. Conseguiram estimar, perceber o crescimento e verificar que os números a, tal que $0 < a < 1$ têm logaritmo "decimal negativo".

No caso do logaritmo de zero, obtiveram a mensagem de erro na calculadora e, assim, concluíram a não existência do logaritmo de zero. Nenhuma dupla conseguiu justificar esta ocorrência estabelecendo a relação com a função exponencial, fato que nos surpreendeu, visto que os alunos já tinham estudado este conteúdo, o que, novamente, nos leva a questionar sobre as escolhas psicopedagógicas da escola, a qual parece priorizar o método de memorização do aluno em detrimento da sua ação sobre o objeto, em variadas situações-problema. Com isso, retomamos o estudo da exponencial, lembrando que o conjunto imagem era formado por números reais estritamente positivos. Para isso, tomamos como exemplo $f(x) = 2^x$ e os alunos observaram, atribuindo valores, que para qualquer valor de "x", as respostas obtidas eram estritamente positivas. Assim, todos conseguiram justificar a não existência do logaritmo decimal de número negativo, escrevendo respostas tais como "o número 10 elevado a qualquer expoente dá um resultado estritamente positivo".

Notamos ainda a fragilidade na concepção de potência. Ao serem questionados sobre o que representava o logaritmo, todos forneciam verbalmente a resposta de que era um expoente. Porém, quatro duplas forneciam como resposta escrita a base elevada ao expoente. Exemplificando, o logaritmo de 100 na base 10 era representado como 10^2 por estas duplas. Voltamos então a discutir o que representava base e expoente de uma potência.

Uma evidência neste encontro foi o fato de que havia uma grande dificuldade em questões que exigiam a construção de textos. Essa constatação foi notada na questão em que pedíamos o conceito de logaritmo. Ao serem indagados verbalmente, todos sabiam explicar corretamente o que era logaritmo. Na escrita, o resultado era sempre inferior ao fornecido verbalmente. Apesar de todos concluírem que "logaritmo decimal era o expoente do 10 para obter um outro número", sete duplas relataram este fato de maneira muito confusa. Exemplificando, apresentaremos o conceito escrito de uma das duplas: "Logaritmo é o expoente da base 10 quando elevado a qualquer número é positiva a resposta" (Dupla Milena e Juliana).

As mesmas dificuldades foram notadas na exploração dos logaritmos de bases 2 e ½. Quanto à interpretação da definição formal, notamos que a simbologia matemática representou um fator complicador do estudo, tendo em vista que nenhuma dupla conseguiu interpretar corretamente tal definição sem o auxílio do orientador.

Instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes)

Como comportamento geral, podemos dizer que os alunos apresentaram dificuldades em conteúdos pré-requisitos para a formação do conceito de logaritmo, tais como potência e função. Também foi fato que a abordagem através de situações-problema constituiu um fator motivador do processo, apesar de questões de interpretação e modelização não representarem tarefas simples para o grupo.

O grupo que realizou a aprendizagem dos logaritmos através de nossa seqüência foi submetido a dois testes: o pré-teste – aplicado antes do estudo e composto de seis questões – e o pós-teste – aplicado após o estudo dos logaritmos através da seqüência de ensino.

Apresentaremos, a seguir, os dois instrumentos diagnósticos para, a seguir, proceder à análise dos principais resultados obtidos pelos alunos.

Pré-teste	**Pós-teste**
1) Calcular: a) $\log_6 36$ b)$\log 1012$ 2) Resolver em R: $9^x = 729$ 3) Resolver em R: $9^x = 20$ 4) Uma pessoa aplicou 300 reais em um certo investimento que fornece 5% de juros compostos mensalmente. Determine: a) a quantia após 3 meses b) tempo necessário para que a quantia atinja 1200 reais 5) se $\log_2 x = 2{,}8074$, então: a) $1/2 < x < 1$ b) $1 < x < 2$ c) $2 < x < 4$ d) $4 < x < 8$ e) $8 < x < 10$ Justifique a sua resposta 6) O que é logaritmo?	1) Calcular: a) $\log_3 81$ b)$\log_{10} 75$ 2) Resolver em R: $4^x = 64$ 3) Resolver em R: $5^x = 10$ 4) Uma aplicação financeira fornece 4% de juros compostos mensalmente. Supondo que hoje você deposite 80 reais e que não faça mais nenhum depósito ou retirada, determine: a) a quantia acumulada após 3 meses b) o tempo necessário para que a quantia atinja 400 reais 5) se $\log_2 x = 3{,}78$, então: a) $1 < x < 2$ b) $2 < x < 4$ c) $4 < x < 8$ d) $8 < x < 16$ e) $16 < x < 32$ Justifique a sua resposta 6) O que é logaritmo?

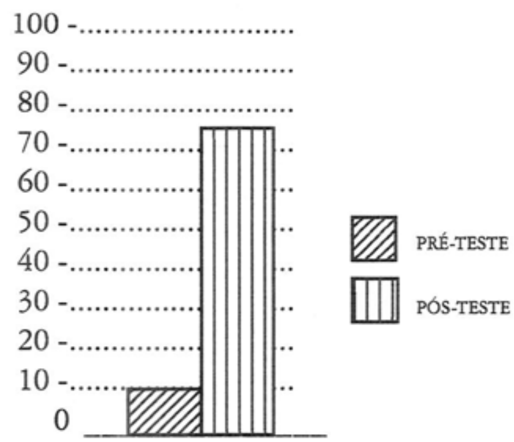
Análise dos resultados

No estudo global, foram realizados cinco tipos de análise, dos quais apresentaremos e comentaremos a análise percentual de acertos geral, por questão, por desempenho individual dos alunos e a análise do tipo de erro que os alunos cometeram nos testes.

Para computar os resultados, consideramos apenas os alunos que participaram de todo o processo, ou seja, do pré-teste, dos cinco encontros da seqüência e do pós-teste, totalizando, neste caso, 13 alunos.

Tabela 1 – Análise do desempenho geral nos testes diagnósticos

Pré-teste	Pós-teste
9,61%	75,96%



O gráfico acima, acompanhado da tabela, mostra-nos que houve um crescimento satisfatório no desempenho dos alunos entre o teste inicial e o final. É importante notar que o desempenho inicial dos alunos foi muito baixo (menos de 10% do total do teste), embora o teste tenha sido elaborado de tal forma a permitir que um aluno que não tenha ainda estudado logaritmo, mas que já tenha visto função exponencial, pudesse acertar até 25% dele. Tal resultado nos faz pensar sobre a formação escolar, até onde os alunos realmente adquirem um conceito a partir das aulas. Por outro lado, o resultado final alcançou um patamar suficiente (ainda usando o parâmetro da escola). Contudo, essa primeira apresentação dos resultados é muito geral e não nos fornece "pistas" suficientes para que possamos entender o comportamento do grupo. Passaremos, a seguir a fazer uma análise mais detalhada dos dados.

Percentual de acerto por questão

A Tabela 2, a seguir, apresenta resultados bastante satisfatórios no desempenho dos alunos no teste final, quando comparado com o teste inicial. De fato, se tomarmos como patamar o percentual de 60% de acerto, podemos notar que, dos oito itens do pós-teste, apenas um não superou tal índice, representado pela questão 4b. Outra informação que podemos extrair dos dados apresentados na tabela, baseadas no percentual de acerto do pré-teste, é que esses alunos não tinham conhecimento anterior sobre logaritmos.

Portanto, do ponto de vista de percentagem de acerto do grupo às seis questões, pelas quais avaliamos a aquisição do conceito de logaritmo desse grupo de alunos, podemos afirmar que houve avanços significativos para todas as questões. Como, entre o pré e o pós-teste, o único contato que esse grupo teve com o conteúdo foi através da seqüência de ensino, é razoável supor que o fator responsável pela formação do conceito foi a seqüência.

Tabela 2 – Análise percentual de acertos do grupo por questão

Questão	Pré-teste	Pós-teste
1A	0%	76,92%
1B	0%	100%
2	69,23%	92,31%
3	0%	61,54%
4A	7,69%	84,61%
4B	0%	38,46%
5	0%	69,23%
6	0%	84,61%

Analisando o percentual de acerto nas questões da tabela 2, notamos que, na primeira, os alunos apresentaram resultados bastante satisfatórios no pós-teste. Os dois itens dessa questão foram apresentados de forma muito parecida com a do livro didático, isto é, descontextualizado e valorizando a técnica de cálculo. A diferença era que no "A" eles não tinham como usar calculadora e no "B" podiam lançar mão dessa ferramenta tecnológica. O resultado mostra claramente o favorecimento da calculadora (100% de acerto), indicando que esta ferramenta, de fato, tem grande poder, como concluem Gracias e Borba (1998), e que, pedagogicamente, alcança melhores resultados do que as tradicionais tabelas de logaritmos. Contudo, para procedermos com uma análise mais fina desses resultados, resta-nos saber que tipo de erro os alunos do grupo experimental cometeram no item "A" desta questão, o que será feito mais adiante.

A questão 2, que envolvia uma equação exponencial de transformação direta, já apresentou bons índices de acerto ainda no pré-teste e esse índice só melhorou no teste final. As questões 4A e 6 também não foram problema para esse grupo. Gostaríamos de salientar, principalmente, o resultado da questão 6 (11 dos 13 alunos explicaram corretamente o que era logaritmo) porque ao ter sucesso nessa questão os alunos estavam demonstrando que tinham o conceito de logaritmo.

Sentimos ainda lacunas na análise tal como temos até aqui procedido. Precisamos entender, por exemplo, o que houve na questão 3, cujo índice de sucesso atingiu um pouco mais que 60% da amostra e, principalmente, na questão 4B, a qual apenas quatro alunos acertaram. A seguir analisaremos os resultados individuais de cada aluno para poder iniciar uma discussão mais rica sobre a aquisição do conceito e o papel de nossa seqüência no seu desenvolvimento.

Desempenho individual dos alunos

A Tabela 3 nos permite observar que todos os alunos tiveram um crescimento significativo com relação ao seu desempenho nos testes. Devemos levar em consideração, porém, que o ponto de partida desses alunos foi muito baixo, o que pode ser observado no resultado obtido no instrumento inicial, quando o aluno que obteve o maior sucesso acertou apenas duas das oito questões, e quatro alunos não acertaram nenhuma. E mais, a questão na qual houve um maior número de acertos foi a segunda, cujo conhecimento requerido era o de função exponencial.

Este dado poderia levar a uma interpretação precipitada de que o bom desempenho desses alunos no teste final deveu-se, principalmente, ao fato de que eles não sabiam praticamente nada e que, portanto, era praticamente impossível que eles não melhorassem no teste final. Discordamos dessa interpretação porque, tomando como patamar o adotado pela maioria das escolas, notamos que doze dos treze alunos acertaram pelo menos 50% da avaliação, sendo que, destes, nove tiveram um índice de acerto igual ou superior a 75%. Isto implica em dizer que doze dos treze alunos seriam aprovados na escola e, ainda, a maioria obteria uma marca considerada acima da média.

Portanto, do ponto de vista do desempenho individual dos alunos, podemos afirmar que houve avanços significativos quanto ao sucesso desses alunos. Este fato reforça nossa crença de que a seqüência foi um fator importante na formação do conceito de logaritmo.

Tabela 3 – Desempenho dos alunos nos pré e pós-testes

Alunos	Pré-teste	Pós-teste	% de acertos
1	1 em 8 itens	6 em 8 itens	75
2	1 em 8 itens	8 em 8 itens	100
3	1 em 8 itens	8 em 8 itens	100
4	2 em 8 itens	6 em 8 itens	75
5	1 em 8 itens	7 em 8 itens	87,5
6	1 em 8 itens	8 em 8 itens	100
7	0 em 8 itens	5 em 8 itens	62,5
8	0 em 8 itens	6 em 8 itens	87,5
9	0 em 8 itens	3 em 8 itens	37,5
10	1 em 8 itens	6 em 8 itens	75
11	0 em 8 itens	5 em 8 itens	62,5
12	1 em 8 itens	6 em 8 itens	75
13	1 em 8 itens	4 em 8 itens	50

Ainda segundo dados da Tabela 3, notamos que apenas três alunos acertaram o pós-teste inteiramente. Então, alguns questionamentos nos vêm a mente: "se esses alunos adquiriram o conceito de logaritmo, por que ainda aparecem erros após a aplicação da seqüência?", "quais os erros mais freqüentes?", e mais: "que tipo de erro os alunos cometeram antes e depois da seqüência de ensino? Isto é, houve mudança qualitativa no desempenho desse grupo?" Para responder a estas questões precisamos analisar o comportamento desses alunos do ponto de vista da formação e desenvolvimento do conceito de logaritmo, isto é, precisamos analisar o tipo de erro que os alunos apresentaram, tanto na fase do pré-teste quanto no momento em que estavam respondendo às questões do pós-teste.

Análise dos tipos de erros por aluno

Ao investigar sobre os tipos de erros cometidos pelos alunos, mostrados na Tabela 4, notamos primeiramente que no pré-teste o que ocorreu basicamente foram questões deixadas em branco. Uma questão em branco nos permite inferir que o aluno não sabe resolvê-la, mas não nos deixa saber o porquê, nem o que e nem o quanto ele não sabe e/ou entende sobre o conteúdo. Assim, das 104 respostas que poderíamos obter no pré-teste, 82 foram em branco, ou seja, em torno de 81% das questões do teste foram entregues sem nenhuma resolução. Já no pós-teste o número de respostas em branco cai drasticamente para quatro e o número de respostas erradas, para 21 (ou seja, em torno de 20%), o que significa que os alunos, na grande maioria das questões, fizeram algum tipo de tentativa para resolvê-las, mesmo que incorretamente. Serão essas as respostas que estamos interessadas em examinar a seguir.

Tabela 4 – Tipos de erros cometidos nos pré e pós-testes

Alunos	Tipos de erros no pré-teste					Tipos de erros no pós-teste							
	Q1a, 1b, 3 e 6	Q2	Q4a	Q4b	Q5	Q1a	Q1b	Q2	Q3	Q4a	Q4b	Q5	Q6
1	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	E_1	E_6	C
2	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	C	C	C
3	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	C	C	C
4	E_b	C	C	E_b	E_b	E_5	C	C	C	C	C	C	E_5
5	E_b	C	E_4	E_4	E_6	C	C	C	C	C	E_1	C	C
6	E_b	C	E_4	E_4	E_6	C	C	C	C	C	C	C	C
7	E_b	E_2	E_b	E_b	E_b	C	C	C	E_2	C	E_3	C	E_5
8	E_b	E_3	E_4	E_4	E_b	C	C	C	C	C	E_3	C	C
9	E_b	E_b	E_b	E_b	E_b	E_8	C	E_5	E_2	C	E_b	E_5	C
10	E_b	C	E_b	E_b	E_b	E_8	C	C	E_2	C	C	C	C
11	E_b	E_3	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	E_1	E_6	E6	C
12	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	E_2	C	E_7	C	C
13	E_b	C	E_b	E_b	E_b	C	C	C	C	C	E_b	E_b	C

Legenda: C = Resposta certa; E_b = Resposta em branco; E_1 =Erro na manipulação algébrica – apesar de usar o procedimento correto, errou nas contas ou na hierarquia das operações; E_2 =Problema na concepção de potência; E_3 =Problema na concepção de função exponencial. Ex: $9x = 729$ ... $9^x = 3^6 \therefore x = 6$; E_4 = Uso do pensamento linear em situações não lineares; E_5 = Erro de expressão na forma escrita. Apesar de resolverem a questão parcialmente e justificarem verbalmente, não conseguem dar uma resposta escrita satisfatória (ver ex. página seguinte); E_6 = Erro na interpretação da questão; E_7 = Erro no não estabelecimento do LOG como ferramenta na resolução de equações exponenciais; E_8 = Erro na técnica de cálculo do logaritmo.

Os erros mais freqüentes encontrados na Tabela 4 foram aqueles relacionados à dificuldade de expressão na forma escrita (cinco respostas do tipo E_5). Esse erro aconteceu em praticamente 25% das respostas erradas e ele é um indicador de dificuldade que não pertence ao conteúdo específico do logaritmo. Se somarmos a isso os erros nas manipulações algébricas (três respostas apresentaram esse tipo de erro no pós-teste), teríamos que mais de um terço das respostas erradas foram em conteúdos outros que não o logaritmo.

Porém, sob a ótica da teoria dos campos conceituais, tudo indica que esses conteúdos estão relacionados, pertencendo ao mesmo campo conceitual. Isto é, são conceitos/invariantes/propriedades que estão presentes nas situações logarítmicas.

Um exemplo do que consideramos como um erro do tipo 5 (E_5):

> Na questão 5 pedia-se para o aluno escolher uma das alternativas que estimava corretamente o valor de x em $\log_2 x = 3{,}78$.
> O aluno 9 respondeu alternativa "d" ($8 < x < 16$), o que estava certo, mas justificou dizendo que "**...pois se nós elevarmos a base a resposta tem que dar o expoente**".

Aqui vê-se claro a dificuldade do aluno em se expressar em linguagem natural e essa dificuldade o leva ao insucesso na resposta, embora tenha, a princípio, respondido corretamente.

Não obstante os erros relacionados acima, chama-nos a atenção os problemas relacionados à concepção de potência (quatro respostas do tipo E_2) e à concepção de função exponencial (duas respostas do tipo E_3 no pré-teste e mais duas no pós-teste). Tal observação vem, novamente, ao encontro à teoria de Campo Conceitual de Vergnaud, já que parece que a potência e a equação exponencial formam, junto com o logaritmo, conceitos de um mesmo campo conceitual. Portanto, problemas na formação desses dois primeiros levaria à dificuldade na construção do terceiro conceito.

Devemos refletir que apesar de atentos às idéias propostas por Vergnaud sobre os campos conceituais, provavelmente não tenhamos dedicado tempo e/ou atividades suficientes para trabalhar esses conceitos conjuntamente com o logaritmo. Tal reflexão nos leva à constatação de que se, por um lado, houve uma lacuna em nossa seqüência, por outro parece claro que aqui há um campo conceitual, o qual merece maior atenção e estudo dos educadores matemáticos.

Por fim, a Tabela 4 nos informa ainda que os alunos superaram sua tendência em limitar seu pensamento para situações lineares. De fato, esse tipo de erro que apareceu em seis respostas no pré-teste desapareceu completamente no pós-teste.

Conclusão

Nossos resultados nos permitem concluir que nossa seqüência didática cumpriu o seu papel de facilitar a formação do conceito de logaritmo. Vale ressaltar que, na maioria dos casos, o sucesso nas questões só não foi maior devido a erros cometidos em outros conteúdos matemáticos, o que evidencia a grande conexão existente entre os assuntos estudados. Essa conclusão nos remete às idéias discutidas na Introdução quanto à necessidade, proposta por Vergnaud, de se pensar não em um conceito, mas em um campo conceitual.

Concluímos ainda que utilizar uma abordagem que parta de situações-problema (tal como sugere Vergnaud), considerando o logaritmo como ferramenta indispensável para a sua resolução (no sentido de Vygotsky), representou uma possibilidade viável para a aplicação em sala de aula. De fato, tendo em vista que utilizamos o horário normal de aula para o desenvolvimento da seqüência e que o material nela envolvido é de fácil aquisição (inclusive financeiramente), acreditamos que não haverá necessidade de grandes adaptações na seqüência para que um educador possa usá-la em sua sala de aula.

Outra conclusão não menos importante é a de que a calculadora representou para nossa amostra uma ferramenta bastante eficaz, possibilitando que o aluno centrasse sua atenção no conceito e não nas técnicas de cálculo. Neste momento gostaríamos de salientar que não defendemos o uso da calculadora indiscriminadamente. Mesmo no desenvolvimento da seqüência houve momentos em que os alunos trabalharam com estimativa do valor do logaritmo e nessa hora a calculadora, obviamente, ficava de lado. Concluímos então que cabe ao professor decidir em quais atividades a calculadora pode representar uma ferramenta eficaz.

Por fim, gostaríamos de deixar claro que a forma que encontramos para introduzir o conceito de logaritmo não tem a pretensão de ser a única ou a melhor maneira para alcançar este objetivo. Porém nos sentimos confortáveis para afirmar, a partir da análise dos resultados, que, para esse grupo, tanto a seqüência de ensino, trabalhando a partir de situação-problemas envolvendo equações exponenciais, como a utilização da ferramenta calculadora, foram certamente elementos facilitadores no processo ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Referências bibliográficas

GRACIAS, T. S. e BORBA, M. C. (1998). Calculadoras gráficas e funções quadráticas. *Revista de Educação Matemática,* (4), 27-32.

CONFREY, J. (1991). "The Concept of Exponential Functions: a Student's Perspective". In: *Epistemological Foudations of Mathematical Experience*. New York, Ed. L. Stefe.

CONFREY, J. e SMITH, E. (1995). Splitting, Covariation and their role in the development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education,* (26), 66-86.

EVES, H. (1983). *An introduction of the history of mathematics.* Saunders – College Pub.

LESTER, F. K. e MAU, T. S. (1993). Teaching mathematics via problem solving. *For the Learning Mathematics*, 13, pp. 8-17, USA.

VERGNAUD, G. (1987). Problem Solving and Concept Development in Learning of Mathematics. *E.A.R.L.I.* (Second Meeting). Tübigen, Earli.

_____(1983). "Multiplicative Structures". In: LESH, R. e LANDAU (eds.), *Aquisitions of Mathematics Concepts and Processes.* New York, Academic Press, pp. 127-174.

_____(1994). "Multiplicative Conceptual Field: What and Why?". In: HAREL, G. e CONFREY, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. State University of New York Press.

VYGOTSKY, L. S. (1991). *Formação social da mente – O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Trad. de J. Cipolla Neto e outros. São Paulo, Martins Fontes.

_____(1993). *Pensamento e Linguagem.* Trad. de J. L. Camargo. São Paulo, Martins Fontes.

_____(1997). *The collected works of L. S. Vygotsky.* Vol. II. Problems of General Psychology. New York, Plenum Press.