Environnements "calculatrice symbolique": necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus*

DOMINIQUE GUIN, LUC TROUCHE**

Resumo

A apresentação deste texto será organizada em dois momentos. Num primeiro momento, mostraremos, a propósito das "calculadoras simbólicas", os possíveis efeitos de um artefato sobre os processos de *conceitualização*. Destacaremos o interesse de uma análise do artefato em termos de pré-estruturação da ação (mais que em termos de "potencialidade abstrata"). Aí, colocaremos em evidência elementos da transposição informática em termos condições/impositivos para o pensamento e a ação. Mostraremos que o controle desses efeitos necessita de uma intervenção explícita do profesor, levando-o a uma nova organização do espaço e do tempo de estudo, considerando a exigência de uma socialização dos processos de instrumentação. Num segundo momento, apresentaremos dois experimentos integrando calculadoras gráficas. Uma tipologia de comportamentos de

* Plusieurs ateliers seront associés à cet exposé et permettront de compléter cette présentation: Luc Trouche et des élèves d'une terminale S expérimentale: «Regards croisés sur un environnement TI 92» (cf. p. 213); Jacques Salles: «TI 92 rétroprojetée. Outil d'aide à l'introduction d'une notion, à la conjecture, à la découverte des propriétés,... à partir de figures de base» (cf. p. 227); René Bernard, Christian Faure, Maryse Noguès et Yvon Nouazé: «Représentation approchée, représentation symbolique des nombres, coexistence dans une calculatrice» (cf. p. 257); Jacques Delgoulet: «Introduction des fonctions en Seconde à l'aide de la TI 92" (cf. p. 267).

** ERES – Études et Recherches sur l'Enseignement Scientifique. Université Montpellier 2 (irem@math.univ_montp.fr).

alunos, construída a partir de relações combinadas com a atividade matemática geral e com instrumentos de cálculo, permite descrever a diversidade e evolução dos comportamentos de alunos ao longo do processo de instrumentação. Concluindo, apresentaremos alguns elementos para uma tomada de conciência institucional de ferramentas de cálculo no ensino da matemática.
Palavras-chave: calculadoras simbólicas, conceitualização, transposição informática.

Résumé

L'exposé sera organisé en deux temps. Dans un premier temps, nous montrerons, à propos des calculatrices symboliques, les effets possibles d'un artefact sur les processus de conceptualisation. Nous remarquerons l'intérêt d'une analyse de l'artefact en terme de pré-structuration de l'action (plus qu'en terme de «potentialité» abstraite). A cette occasion, nous mettrons en évidence des éléments de la transposition informatique en termes de contraintes pour la pensée et l'action. Nous montrerons que le contrôle de ces effets nécessite une intervention explicite de l'enseignant, débouchant sur une nouvelle organisation de l'espace et du temps de l'étude prenant en compte l'exigence d'une socialisation des processus d'instrumentation. Dans un deuxième temps, nous présenterons deux expérimentations intégrant des calculatrices symboliques. Une typologie de comportements d'élèves, construite à partir des rapports combinés à l'activité mathématique générale et aux instruments de calcul, permet de décrire la diversité et l'évolution des comportements d'élèves au cours du processus d'instrumentation. En conclusion, nous présenterons quelques éléments pour une prise en compte institutionnelle des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques.
Mots clées: *calculatrices symbolique, conceptualisation, transposition informatique.*

Effets négatifs d'une utilisation exclusivement privée sur les processus de conceptualisation

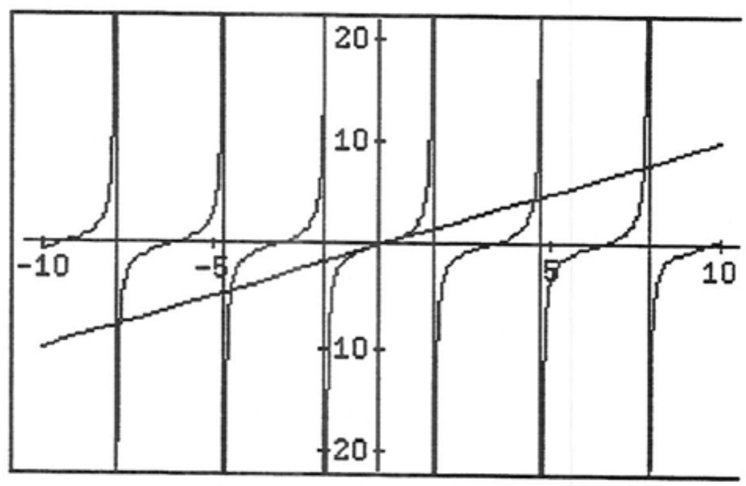
En France, toutes les calculatrices sont autorisées aux examens, cependant une faible minorité d'enseignants (15%) les prend en compte dans leur enseignement. La plupart des enseignants les ignore et ne consacre aucun temps à l'apprentissage de techniques élémentaires. Pourtant tous les élèves ont une calculatrice graphique dans les classes scientifiques et l'utilisent continuellement! Les élèves doivent donc acquérir par eux-mêmes ces techniques élémentaires, il n'y a pas de prise en charge par l'institution des processus d'instrumentation.

Quelles peuvent être les conséquences d'une utilisation exclusivement privée des calculatrices graphiques? Voici quelques exemples de comportements d'élèves face à des images produites par des écrans de calculatrices graphiques:

Comment les élèves interprètent les images-écrans?

Nombre de solutions de l'équation tan x = x sur R

Dans une classe de 32 élèves de 1[ère] scientifique (17 ans) ayant leur cours à disposition, seulement quatre élèves évoquent une infinité de solutions, en référence au cours. La représentation suivante produite par l'écran d'une calculatrice nous éclaire sur ce comportement qui peut paraître surprenant:



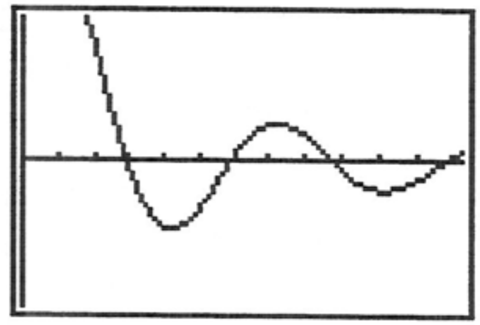
Les autres élèves mentionnent un nombre fini de solutions (correspondant à celles visibles sur leur écran). Fait encore plus remarquable, sept élèves prennent en compte les intersections de la droite avec les asymptotes : «les asymptotes font partie de la courbe, puisqu'elles apparaissent quand on demande le tracé...» alors que le tracé de ces asymptotes est simplement une conséquence de la modélisation, dans les outils technologiques, du continu par le discret.

Enfin, cinq élèves suggèrent une infinité de solutions au voisinage de 0, en s'appuyant sur la perception de proximité des représentations de tan x et x, alors qu'ils ont vu en cours quelle était la tangente en 0 à la représentation de tan x. L'on observe ici une conception de la représentation graphique d'une fonction qui est une transcription fidèle de ce qui est perçu par l'élève à l'écran.

Comment les élèves gèrent la contradiction des images-écrans?

Nombre de solutions de l'équation $\frac{\sin x}{x} = 0$ sur [0, 600].

```
RANGE
Xmin=0
Xmax=610
Xscl=50
Ymin=-.01
Ymax=.01
Yscl=1
Xres=1
```



Cette représentation devrait paraître étrange, puisqu'en principe cette fonction devrait s'annuler environ 200 fois sur l'intervalle considéré qui est [0, 610]. L'écart entre la courbe attendue et la courbe obtenue vient du fait que la machine[1] place environ 95 points et que l'amplitude de l'intervalle est 610, c'est-à-dire presque 95 * 2π.

Face à des productions d'écran (pourtant contradictoires) correspondant à des fenêtres différentes relatives à la même fonction $\frac{\sin x}{x}$, parmi quarante élèves en Terminale scientifique (18 ans) et des élèves de première année scientifique d'université (19 ans), seulement 10% répondent «à chaque fois que sin x s'annule» et ont conscience du fait que les graphiques sont erronés, même s'ils ne savent pas expliquer pourquoi. Pour les autres, certains graphiques sont justes alors qu'ils sont pourtant visiblement incompatibles et ils évaluent le nombre de solutions à partir de ceux-ci. Ce qui dénote une confiance très importante en la fiabilité de leur calculatrice, sans procédure quelconque de contrôle vis à vis de cet outil.

Un fait très significatif est à noter dans les explications des élèves qui perçoivent que certains graphiques sont erronés: les erreurs sont toujours imputées à l'utilisateur et ne remettent jamais en cause la machine, on retouve cette grande confiance en la fiabilité de l'outil.

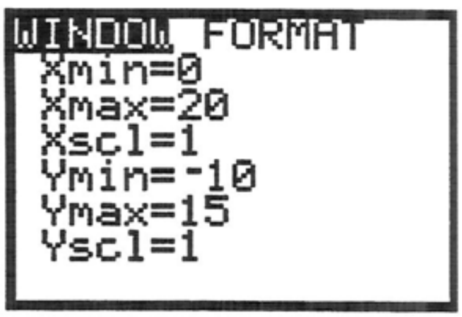
1 Il s'agit ici d'une calculatrice TI 82, le même phénomène pourrait être relevé sur toute autre calculatrice graphique.

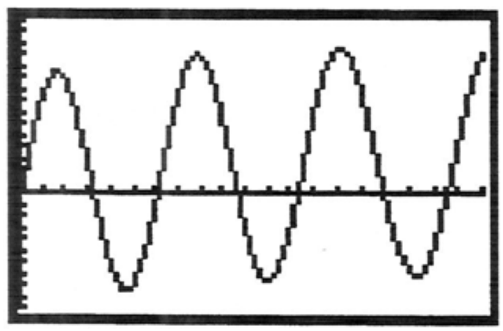
Quelle influence sur la conceptualisation des limites?

La quasi-totalité des élèves affirme qu'une calculatrice graphique permet de contrôler l'existence d'une limite nulle en l'infini, en Terminale Scientifique et même en première année d'université (où les étudiants ont pourtant vu la définition «formelle» avec quantificateurs). Cette conviction est confirmée par l'observation du comportement des élèves. Considérons l'exemple suivant:

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x + 10 \sin x)$$

Sans calculatrice, toutes les réponses des élèves sont correctes, mais l'on observe un effet sensible des calculatrices dû à un graphe très étonnant pour un «novice»:





Les procédures des élèves de niveaux comparables sont très différentes avec ou sans calculatrice. Sans calculatrice, les élèves se réfèrent à des comparaisons de fonctions, minorations ou factorisations et à leur cours. Avec calculatrice, leur premier geste est d'obtenir le graphe et de déduire du profil de la courbe par des zooms successifs le résultat, ils se réfèrent alors aux variations de fonctions. Cette prégnance de l'application graphique se traduit par des suites ordonnées de gestes, des régularités dans l'action qui doivent retenir notre attention.

En effet, l'idée fondamentale d'une relation entre le geste et la pensée mise en évidence dans Vygotski (1930/1985) est à la base de l'analyse des processus de conceptualisation Vergnaud (1996). G. Vergnaud souligne le rôle central des schèmes (organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations) dans les processus de conceptualisation. D'autre part, il met en évidence le rôle moteur des systèmes de représentation dans le développement conceptuel du fait que, contrairement au conceptuel, ces systèmes peuvent être transmis. Puisque l'individu construit des concepts à partir des représentations externes intériorisées (sous forme de représentations mentales), les représentations ont un rôle crucial dans les processus de conceptualisation.

De même, les automatismes qui se mettent en place risquent d'influer sur les processus de conceptualisation (Trouche e Guin, 1996). Nous émettons l'hypothèse qu'une utilisation exclusivement privée des calculatrices symboliques conduirait à des comportements similaires, cependant il n'est pas possible dans le contexte actuel de valider cette hypothèse, car les classes où tous les élèves disposent de ces calculatrices sont des classes expérimentales, ces outils sont donc intégrés dans l'enseignement.

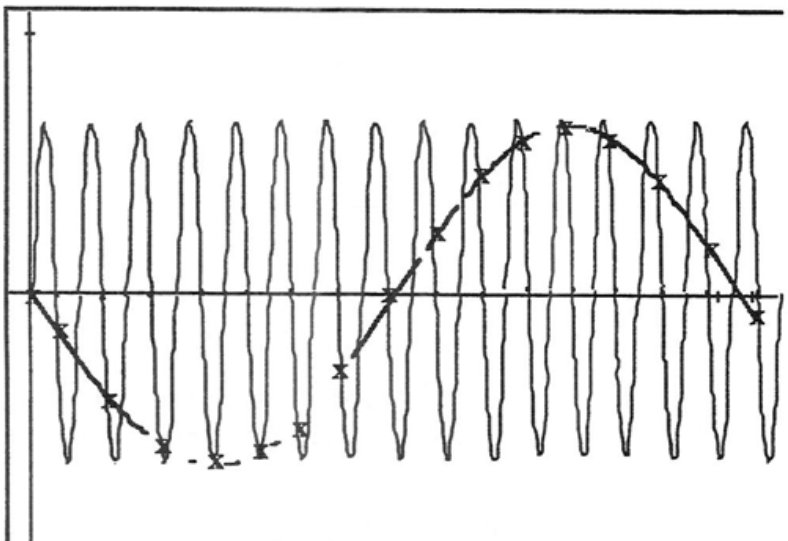
Eléments de la transposition informatique en termes de contraintes pour l'action et la pensée

La complexification du système d'enseignement en environnement informatique peut être analysée à la lumière de la transposition informatique (Balacheff, 1994) qui met en évidence la modification de la connaissance due aux spécifications de l'environnement (représentations et conception de l'enseignement) et à la mise en oeuvre du dipositif informatique. «Les caractéristiques de ces environnements façonnent et **contraignent** les possibilités d'interaction avec les objets mathématiques et conditionnent fortement les mathématiques qui peuvent être produites ou acquises» (Artigue, 1995).

Pour accéder à la transposition informatique de ces environnements, trois types de contraintes peuvent être distingués (Trouche, 1996): les contraintes internes (représentation et traitement), celles de commandes (choix implémentés) et celles d'organisation (accès et organisation). Les deux derniers types de contraintes sont liés à l'interface et préstructurent l'action. Voici quelques exemples de contraintes des applications graphique et formelle de la TI 92:

Contraintes internes

- Les phénomènes de discrétisation qui se produisent, par exemple, lors de la représentation à l'écran d'une fonction périodique, quand la distance entre les abscisses de deux points successifs calculés par la machine est proche de la période:



- La gestion dans l'application HOME du calcul exact est liée aux choix internes de simplification qui sont différents des nôtres dépendant du contexte : $\cos^2 x$ ou $\frac{\cos 2x+1}{2}$, $\frac{x+1}{x}$ ou $1+\frac{1}{x}$, ln (4) ou 2 ln(2). Obtenir à l'écran une forme équivalente d'une expression nécessite par conséquent un apprentissage et les choix internes des concepteurs peuvent induire des contradictions, par exemple l'expression $\frac{x^2-4}{x-2}$ et simplifiée en $x+2$, mais la valeur pour $x = 2$ n'existe pas. De même l'expression f (f (x)) ou f (x+1) n'est pas acceptée [2] : il y a un décalage inévitable entre le «discours» mathématique et celui de la calculatrice [Canet et alii 96].
- La touche ENTER induit une simplification qui peut être soit une factorisation, un développement ou une décomposition en éléments

simples : d'où la difficulté d'anticiper le résultat, souvent surprenant. Pour un novice, le calcul algébrique n'est pas si aisé, on ne peut donc espérer que la TI 92 soit immédiatement un instrument de validation.

- Autre exemple de contrainte interne : cos $\frac{\pi}{8}$ est connu de la TI 92 (mais pas cos $\frac{\pi}{16}$). Elle peut évidemment calculer cos $\frac{\pi}{16}$ par résolution de l'équation correspondante cos $\frac{\pi}{8} = 2\ (\cos \frac{\pi}{16})^2 - 1)$, mais on ne peut espérer que la machine reconnaisse cos $\frac{\pi}{16}$! Cette contrainte pose donc le problème de la **gestion du vrai / faux** dans l'enseignement et l'on ne peut faire l'économie d'une réflexion sur ces dysfonctionnements.
- La nouvelle touche ∞ donne un nouveau statut de nombre à l'infini par la possibilité de calculer f (∞) pour toute fonction f. De plus l'infini peut être la valeur d'une fonction en mode exact (pour la fonction $\frac{1}{(x-2)^2}$, f (2) vaut l'infini en mode exact et undef en mode approché).

  Ces contraintes ont un impact sur les comportements des élèves, on assiste à une **standardisation** de l'infini: un élève dit par exemple, le point d'intersection de deux courbes est (2, + ∞)!

Plus généralement, la maîtrise des relations entre nombres réels et complexes, calcul exact et approché nécessite des connaissances mathématiques précises.

Contraintes de commande

- Le mode courant choisi reste affiché sur l'écran graphique, mais le calcul est toujours approché, ce qui entraîne des confusions des élèves entre un nombre et ses approximations dans l'interprétation des graphes. De plus, il faut quitter l'application graphique pour calculer en mode exact.

2 Ce problème n'existe plus sur les nouvelles TI 92 «plus».

- Les contraintes syntaxiques exigent une distinction entre variable, paramètre, fonction, équation, etc., ce qui induit des difficultés chez les élèves, même si l'on estime que cette rigueur comporte un aspect positif.
- Les effets des commandes peuvent conduire à des procédures de contournement : par exemple si l'on n'obtient pas de résultat pour la limite d'une fonction, il est parfois possible d'obtenir une valeur par prolongement. Plus généralement, la limitation des commandes conduit souvent à des résultats contradictoires, par conséquent la présence de calcul symbolique ne dispense pas de réflexion et ouvre des possibilités nouvelles pour un travail mathématique.

Contraintes d'organisation

Théoriquement, la TI 92 accorde une place privilégiée au calcul symbolique. En fait, dans l'étude d'une fonction, le graphe donne réalité à l'objet mathématique et le mode de référence n'est pas naturellement le mode exact, même s'il est privilégié par l'enseignant (le raccourci-clavier pour le mode approché est souvent plus rapide). De plus, les passerelles entre applications sont souvent problématiques (Home / éditeur de fonctions, Home / éditeur de suites) puisque dans certaines applications, le calcul exact n'est pas accessible et que certains objets ne sont pas reconnus si l'on repasse dans l'application Home (objet suite, par exemple). Ainsi, les mathématiques sont continuellement en jeu dans les manipulations et la gestion des graphes, du calcul exact et approché. C'est l'enseignant qui peut exploiter ces contraintes pour élaborer des situations intégrant la calculatrice et favorisant une réflexion mathématique.

Nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation

Voici la description du comportement d'un élève manipulant la TI 92 dans (Shoaf M., 1997): «Un processus au cours duquel l'élève converse silencieusement avec lui-même par l'intermédiaire de la calculatrice, se posant des questions tout en manipulant des images concrètes. Ceci le conduit à acquérir la connaissance pour conjecturer non seulement ce qui va se passer réellement à l'écran, mais aussi pourquoi cela se produit. L'utilisation des calculatrices conduit plus probablement les élèves à construire leur propre compréhension mathématique grâce à une réflexion consciente».

Ce comportement ne nous paraît pas naturel chez les élèves que nous avons observés, sans doute tout d'abord parce que les effets de la visualisation sont nettement plus complexes que ce que l'on imagine en général. Le comportement idéal décrit ci-dessus induisant un apport bénéfique des calculatrices nécessite que la visualisation des représentations des concepts mathématiques à l'écran devienne (ce qui n'est pas immédiat) un support pour la conjecture et la réflexion. La déformation inévitable des objets mathématiques à l'écran nécessite une analyse des caractéristiques de l'artefact utilisé pour anticiper les modifications induites dans l'environnement d'apprentissage et une intervention **explicite** des enseignants dans l'éducation à l'image qui suppose des conditions matérielles (dispositif de rétroprojection) et pédagogiques.

Les enseignants sont investis d'une responsabilité importante dans le choix des situations pour accompagner le processus individuel d'**instrumentation** qui transformera l'artefact en un instrument mathématique efficace. Ce processus complexe exige une combinaison et une gestion contrôlée des différentes sources d'information qui doit conduire à une construction mathématique personnelle.

L'intervention de l'enseignant dans le processus suppose des conditions **écologiques**, c'est à dire une **réorganisation** de l'espace et du temps de l'étude en phases de nature différente pour une articulation appropriée du travail papier / crayon et du travail avec la calculatrice (sans machine; machine guidée par le rétroprojecteur; utilisation temporaire en cours ou devoir surveillé; utilisation libre en TP). Dans cette nouvelle organisation de l'étude, les dfficultés mathématiques sont déplacées.

Au delà du choix des situations, le rôle de l'enseignant est fortement modifié, mais certainement pas plus simple: il doit souligner les contradictions non perçues, inciter à une réflexion pour trouver une cohérence mathématique, aider les élèves à accéder à cette cohérence, introduire les nouvelles connaissances mathématiques nécessaires et gérer les difficultés qui surgissent dans le nouvel environnement.

Objectifs d'une nouvelle organisation de l'espace et du temps de l'étude

L'introduction d'un artefact dans l'enseignement ne provoque pas nécessairement des réorganisations cognitives. Plusieurs recherches (Dorfler, 1993; Ruthven et Chaplin, 1997) ont montré que ces réorganisations ne sont pas si spontanées, même en environnement calculatrice. Comment peut-on favoriser un fonctionnement cognitif conscient des élèves (tel celui décrit dans (Shoaf, 1997) conduisant à un contrôle de leur propre travail et à une construction de leur propre compréhension mathématique et favoriser ainsi ces réorganisations cognitives?

Ce changement radical d'attitude vis à vis des mathématiques lié à la conscience du sujet de franchir un seuil, d'acquérir un pouvoir d'initiative et de contrôle, peut être atteint grâce au recours à des registres variés pour éviter la confusion entre représentation et objet mathématique représenté (Duval, 1996). En effet, l'observation des élèves révèle un travail essentiellement mono-registre (graphique, algébrique ou numérique) et des difficultés de conversion entre registres sémiotiques souvent sous-estimées par les enseignants.

De même que R. Duval préconise de favoriser une différentiation et une coordination des représentations externes des différents registres sémiotiques (Duval, 1994), nous essaierons d'organiser un travail analogue pour les différentes applications de la calculatrice en insistant sur les passerelles entre applications (dans les deux sens).

Les situations proposées visent à encourager un travail expérimental, une investigation et anticipation par des interactions entre observations graphiques, géométriques, calcul théorique, une interprétation, coordination et confrontation des informations pour surmonter les contradictions apparentes. Cette réorganisation du temps et de l'espace de l'étude peut être une motivation pour acquérir les connaissances mathématiques nécessaires visant à convertir l'artefact en un instrument mathématique efficace: le rôle de l'enseignant est vu comme le chef d'orchestre de la socialisation de ce processus d'instrumentation.

Un exemple de situation (niveau seconde)

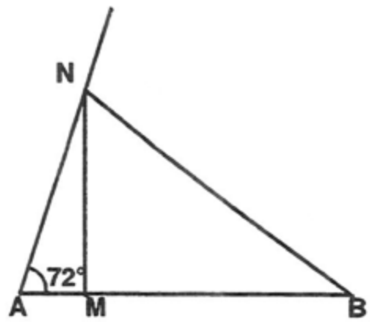
Il s'agit d'une situation d'introduction aux fonctions qui est décrite en détails dans l'atelier de J. Delgoulet (1996, p. 267), nous indiquerons essentiellement l'évolution dont cette situation a fait l'objet. Les élèves travaillent de manière autonome en groupe sur **une seule approche**, pour limiter la difficulté de manipulation en seconde. Trois approches différentes sont proposées à partir de la figure géométrique, la représentation graphique et l'expression algébrique afin d'appréhender l'objet mathématique à travers ses différentes représentations et leurs conversions.

Voici les principales leçons tirées d'une première expérimentation : les mathématiques en jeu disparaissent facilement devant les problèmes liés à la machine, d'où la nécessité d'une prise en main plus progressive de la calculatrice pour les élèves. De plus, l'introduction de plusieurs nouvelles fonctionnalités au cours d'une séance augmente de manière sensible les difficultés de gestion de la séquence par l'enseignant.

Dans un premier temps, nous avons introduit des activités plus centrées sur l'appropriation de la calculatrice, ce qui pose des problèmes vis à vis des élèves et de l'institution. Afin de centrer davantage l'activité proprement dite sur les mathématiques, les énoncés ont été nettement simplifiés, les nouvelles commandes ont été réduites et le contrat en ce qui concerne la configuration de la machine a été précisé.

Des situations, sans machine, préparatoires aux passerelles entre applications ont été introduites. Elles concernent essentiellement les conversions entre registres (signe d'une expression; inéquations; résolution graphique d'équations et inéquations), l'interprétation des graphes - calculatrices, les problèmes de fenêtrage et la trigonométrie (calcul exact, radicaux). Des situations préparatoires avec machine portaient sur la gestion du fenêtrage (pour les représentations connues, à savoir les droites). Nous avons donc cherché à ce que les aspects techniques ne masquent pas les mathématiques visées.

La situation proposée est une situation d'origine géométrique, il s'agit de la recherche du minimum d'une longueur ℓ (x) quand N décrit une droite donnée formant un angle de 72° avec un segment AB donné:



$AM = x \qquad BN = \ell\ (x)$

L'approche géométrique est une approche productrice, grâce aux affichages numériques et à la possibilité d'animer la figure donnée, elle seule permet d'obtenir, en seconde, la valeur exacte du minimum cherché. L'approche algébrique est construite à partir de l'expression algébrique qui est donnée. L'approche graphique est construite à partir de la représentation graphique construite par la calculatrice.

Chaque approche comporte des phases avec calculatrice (⌨) mettant en jeu une seule application, des phases papier / crayon (✍) où l'articulation des différents registres est travaillée. Les phases sont clairement identifiées sur les fiches élèves par les logos correspondants. Par exemple, pour l'approche algébrique:

✍	recherche du domaine de définition,
⌨	programmation de l (x) donnée dans Home, tableau de valeurs,
✍	graphique,
✍	construction géométrique,
✍	calcul de BN pour retrouver l'expression de l(x),
✍ / ⌨	approximation de la solution,
✍	construction géométrique de la solution,
✍ / ⌨	recherche de la valeur exacte du minimum: contrôle et validation.

La phase de synthèse est fondamentale, puisqu'elle intègre la traduction dans chaque registre des résultats obtenus dans chaque approche. Elle est également l'occasion d'introduire le vocabulaire relatif aux fonctions. La documentation et l'analyse de cette situation peuvent être consultées dans (Guin e Delgoulet, 1996).

Le contexte expérimental

Deux expériences ont lieu à Montpellier: la première concerne une classe de seconde (élèves de 15/16 ans), la deuxième concerne une classe de terminale scientifique (élèves de 17/19 ans). Dans ces deux classes, tous les élèves sont pourvus d'une calculatrice TI-92, prêtée pour l'année (dans le cadre de contrats de recherche nationaux entre la DISTN et l'équipe ERES de l'université Montpellier II, ou locaux entre le CRDP et l'IREM de Montpellier). Nous nous intéresserons plus particulièrement ici au dispositif d'enseignement mis en place dans la classe de terminale scientifique.

Il repose sur une organisation particulière du temps et de l'espace de l'étude, à trois niveaux: le cours, les travaux pratiques (T.P.) et les problèmes pour un temps plus long.

Le cours

Le cours combine en permanence l'utilisation d'un tableau et d'un écran sur lequel est rétroprojetée une des calculatrices de la classe. Cette combinaison constitue un exemple de ce que les élèves sont censés faire sur leur table de travail: faire la part du travail «papier/crayon» et du travail avec calculatrice (cf. schéma 1 ci-dessous).

C'est un élève (à tour de rôle) qui manipule la calculatrice rétroprojetée ; appelé **élève sherpa**, il sert (à la fois pour le maître et pour la classe) de référence, de guide, d'auxiliaire, de médiateur. C'est une fonction centrale dans le dispositif de cours, qui bouleverse les rapports traditionnels dans la classe (entre l'ensemble des élèves et le maître). Ici les relations se complexifient: de nouvelles relations apparaissent entre les élèves de la classe et l'élève sherpa, entre cet élève et le maître, qui favorisent un débat dans la classe, une explicitation des démarches, indispensable pour contrebalancer le caractère nécessairement «intime» de l'observation des petits écrans des calculatrices.

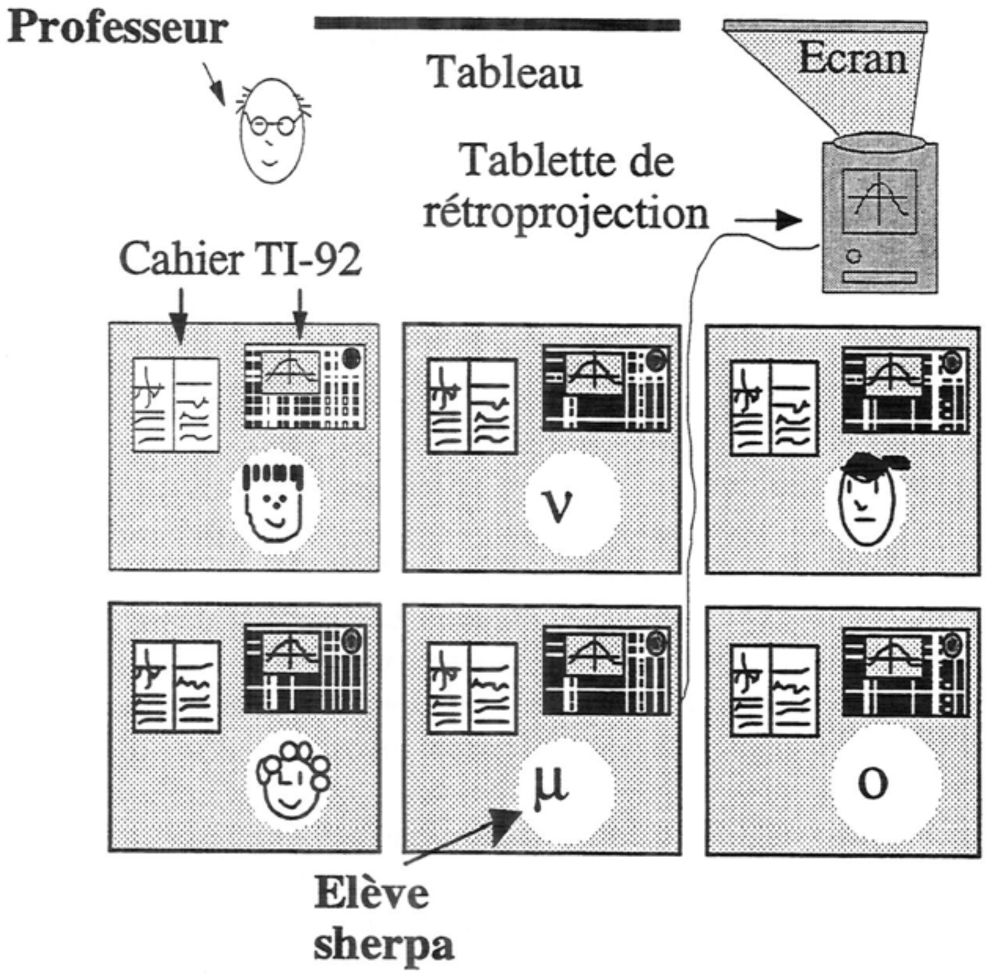


Schéma 1 Le dispositif de cours dans un environnement calculatrice:la combinaison du travail papier/crayon et du travail calculatrice, le rôle pivot de l'élève sherpa.

La gestion collective du travail avec instrument impose de distinguer des phases de nature différente : parfois les calculatrices sont fermées (et le rétroprojecteur éteint), parfois le travail est guidé strictement par l'élève sherpa (les élèves sont censés avoir sur leur écran exactement la même chose que sur le grand écran projeté), parfois le travail avec la calculatrice est libre pendant un temps donné (pour un exercice, une mise au point d'une conjecture, l'observation d'un nouvel objet, la mise à l'épreuve d'une nouvelle commande...). A tout moment, la nature du travail avec calculatrice (pas de calculatrice, calculatrice guidée ou calculatrice «libre») doit être claire pour tous les élèves de la classe.

Un tel dispositif entraîne une **nouvelle organisation du temps de l'étude**: les phases d'observation, de confrontation de différents résultats, de mises à l'épreuve de différentes stratégies proposées sont plus longues. Un exemple : l'introduction du cours sur les coniques s'est faite à partir de l'utilisation de l'application géométrique : un point F et une droite D étant donnés, comment construire l'ensemble des points M tels que $\frac{d(M,F)}{d(M,D)}$ soit égal à un nombre e donné ? Cela impose, en l'absence de commande spécifique, de revenir sur les lignes de niveau, l'utilisation de l'homothétie, cela permet une phase d'observation des variations de forme de l'ensemble en fonction des valeurs prises par e, une phase de conjecture sur la nature des différentes familles de courbe, une phase de mise en forme algébrique, d'observation des tracés dans l'application graphique, etc. On imagine bien que cela prend du temps, mais que ce n'est pas tout à fait du temps perdu.

Cela nécessite de la part du maître une bonne connaissance de l'outil de calcul et une prise en compte permanente de celui-ci, sur le plan de ses potentialités et de ses contraintes. Un exemple : pour l'introduction du calcul intégral, la proximité (géographique sur le clavier et syntaxique, par la forme des écritures) des commandes «somme» et «intégrale» permet d'évoquer les rapports entre phénomènes discrets et phénomènes continus. En même temps, le fait que, dans l'application graphique, il soit impossible de calculer une intégrale si les bornes «ne sont pas dans le bon sens» peut renforcer les idées souvent présentes chez les élèves d'identité entre intégrale et aire. Cette contrainte de l'instrument impose au maître d'être encore plus clair sur ce point.

Les travaux pratiques (T.P.)

Deuxième niveau de travail, les travaux pratiques sont **institués** comme tâche régulière, une fois par semaine pendant une heure. Les élèves sont regroupés par binôme (cf. schéma 2 ci-dessous).

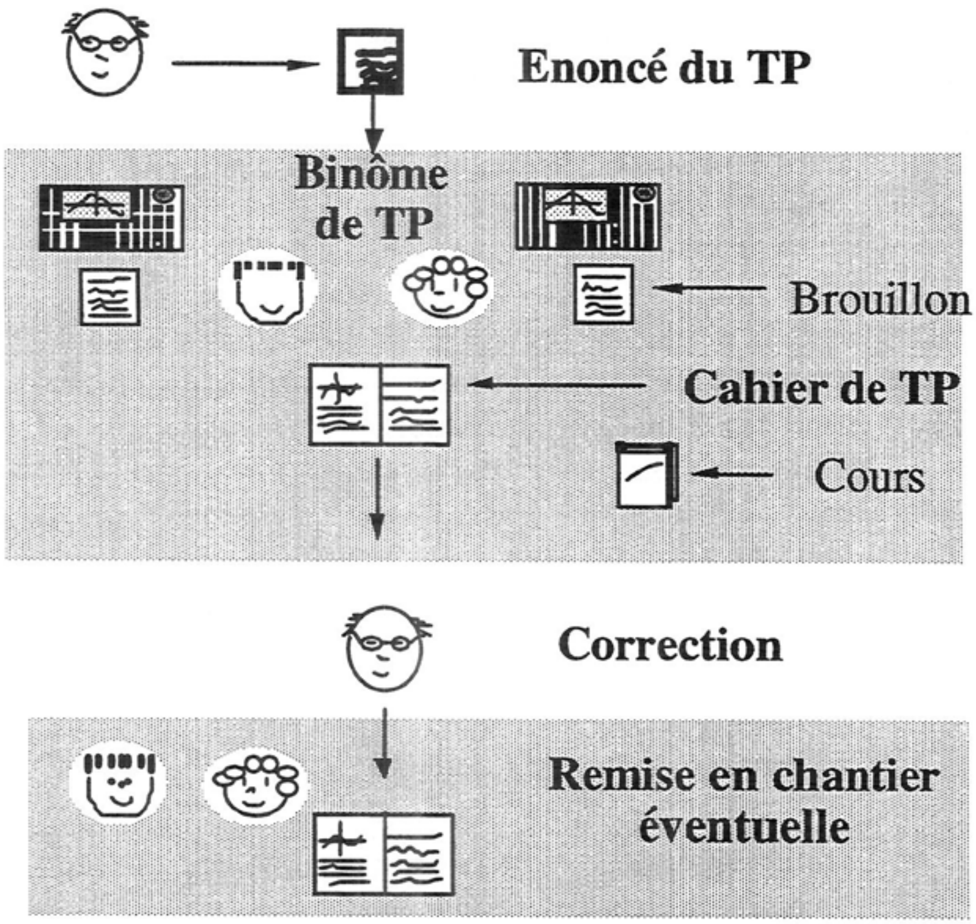


Schéma 2 Un TP, comme dispositif spécifique et comme processus

Il s'agit donc d'un travail d'équipe (ce qui pose des problèmes d'appariement et impose, pendant la séance, la non intervention du maître).

Un problème est proposé aux binômes. L'énoncé dépend bien sûr de la connaissance visée, des contraintes de l'outil, des applications mobilisables. Il favorise toujours la **mobilisation conjointe** des connaissances disponibles et de l'outil de calcul. Il s'agit d'une question assez ouverte qui se prête à des **phases d'observation, de conjectures, de preuves partielles, de réfutations**. Un exemple traité pendant l'année: l'étude des équations $e^x = x^{10n}$; combien y a-t-il de solutions, comment évoluent-elles quand n varie ? Comme on l'a vu dans l'étude des contraintes de la calculatrice, la première réponse donnée par le logiciel n'est pas forcément la bonne... Le recul réflexif est indispensable pour comprendre le phénomène.

Chaque binôme doit réaliser un rapport de recherche dans un cahier spécifique (un cahier pour deux, ce qui permet d'alterner le rôle de rédacteur. Ce cahier est essentiel pour l'élève (explicitation des démarches avec calculatrice ou «à la main», analyse à chaud des impasses éventuelles, évaluation de la pertinence des résultats). Il est essentiel aussi pour le maître (recueil d'information sur l'évolution des processus d'instrumentation et de conceptualisation).

Le T.P. est le moment crucial d'un processus de recherche institué comme enjeu de connaissance dans la classe. Il comporte une «question du jour» et des «questions du lendemain» qui permettent aux volontaires de remettre la question en chantier, d'approfondir la preuve, d'envisager une généralisation possible, de proposer d'autres pistes de recherche.

Des moments de recherche plus flous et plus longs

La combinaison d'un environnement de calculatrices complexes (qui suscite on l'a vu de nombreuses questions pas toujours prévues ni mêmes prévisibles par le maître) et d'un processus de recherche institué dans la classe peut faire émerger à l'occasion d'un TP, d'un cours, d'une lecture, une question plus vaste qui ne peut pas toujours être traitée dans le cadre de la classe et qui ne présente pas toujours un intérêt suffisant pour tous les élèves.

La question est alors posée de façon facultative comme «défi» à la classe, reprise au vol par des élèves, individuellement ou en petit groupe (cf. schéma 3 ci-dessous). Différentes propositions de résolution, globales ou partielles, sont proposées par leurs découvreurs à l'ensemble de la classe, le problème est alors relancé sous une autre forme... Cela nécessite un temps souvent long de maturation, de remise en forme, d'échange.

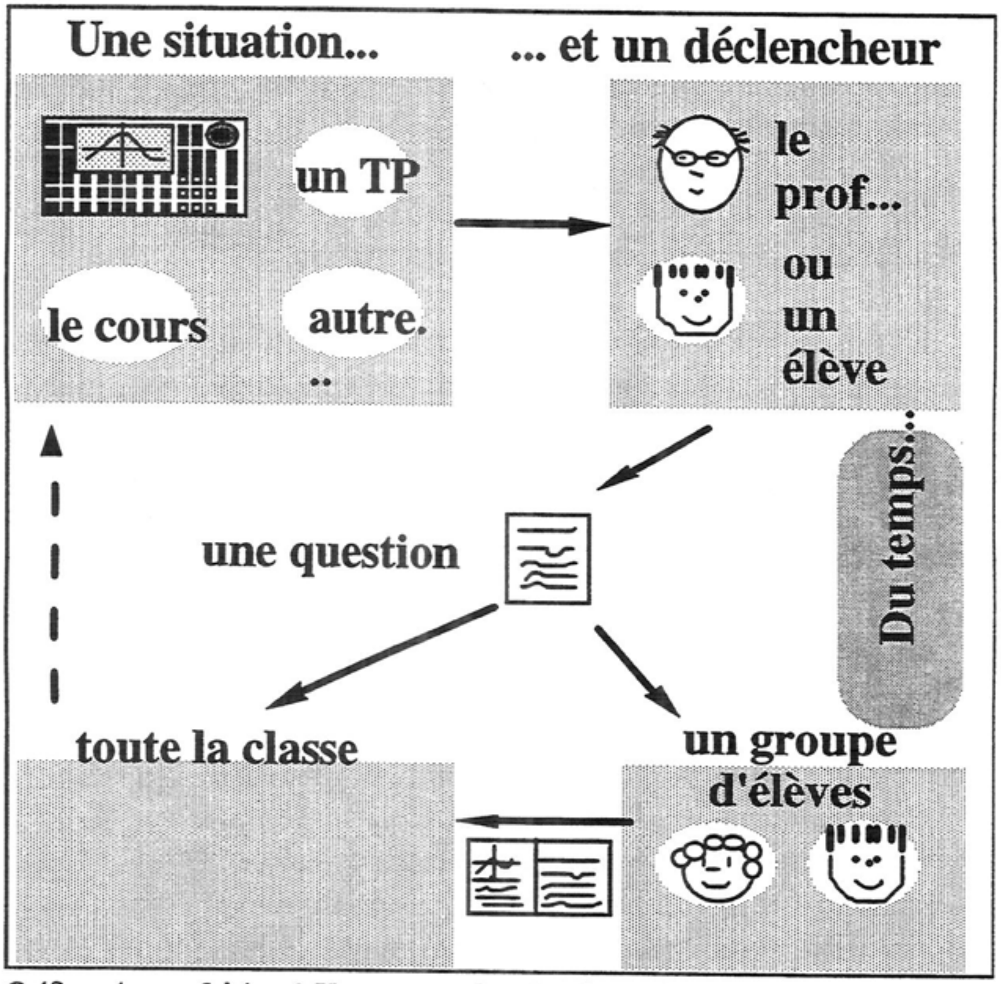


Gráfico número: Schéma 3 Un processus de recherche multiforme

Cela alimente le «climat» de recherche dans la classe, rend légitime le fait de poser des questions et d'oser des réponses, mêmes si celles-ci, dans un premier temps, ne sont pas assurées. Un exemple d'une telle recherche proposée à la classe: si l'on observe les valeurs prises par la suite «plus proche entier de $n+\sqrt{n}$, que remarque-t-on? L'étude fait assez vite émerger la conjecture que la suite prend toutes les valeurs entières successives, sauf les carrés. Il reste alors à valider cette conjecture, c'est-à-dire à rechercher les causes profondes du phénomène observé.

Voilà le décor de la classe expérimentale planté. On aura remarqué l'importance accordée à l'intervention explicite du maître dans le processus d'instrumentation (dans le cadre du cours), à la socialisation des manoeuvres instrumentées (via l'élève sherpa) à **l'explicitation des démarches** (dans les moments de recherche), à la **combinaison du travail avec la calculatrice** et du **travail papier/crayon**.

Évolution du comportement des élèves

L'importance accordée par le maître aux processus individuels d'instrumentation n'entraîne pas bien sûr que tous les élèves vont marcher d'un même pas. Suivre l'évolution des comportements nécessite de disposer de quelques points de repère.

Une carte des métaconnaissances

A partir de résultats issus de l'intelligence artificielle [Pitrat 90], de la psychologie cognitive (Houdé, 1995), repris en didactique des mathématiques (Robert e Robinet, 1996), on peut distinguer des métaconnaissances en oeuvre dans le travail mathématique, en particulier en environnement calculatrice. Sont alors disponibles des outils de résolution de natures différentes (les références théoriques, le papier/crayon, la calculatrice, le voisinage). L'élève est censé savoir rechercher les informations pertinentes (investigation), savoir interpréter un résultat donné, savoir déduire logiquement un deuxième résultat d'un premier résultat (inférence), savoir coordonner, comparer les informations issues de sources différentes, savoir exprimer les résultats trouvés, savoir stocker les nouvelles informations (ce qui implique une réorganisation des anciennes). Ces métaconnaissances peuvent être mise en oeuvre de façon «mécanique» ou de façon contrôlée, ce qui permettra d'inhiber les schèmes non pertinents. Le contrôle a ainsi une place centrale (cf. schéma 4 ci-dessous).

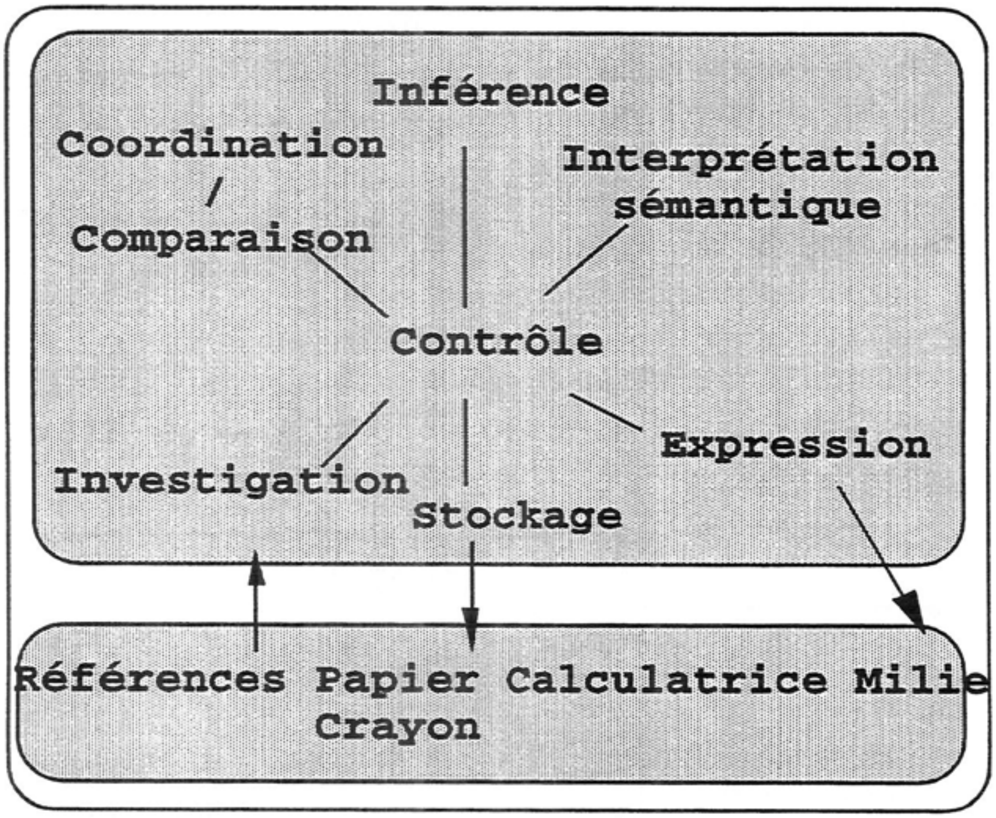


Schéma 4 Métaconnaissances actives et outils de travail en environnement calculatrice

Une typologie des comportements des élèves

Cette carte des métaconnaissances permet de distinguer des comportements extrêmes dans le travail mathématique (cf. schéma 5 ci-dessous):

- un comportement «rationnel», qui utilise surtout le travail papier/crayon, qui fonctionne par inférence. La méthode de preuve est alors la démonstration;
- un comportement «théorique», qui utilise surtout les références disponibles, qui fonctionne par interprétation des résultats. La méthode de preuve est alors l'analogie;
- un comportement «scolaire» [3], qui n'a pas d'outil privilégié, ou plutôt

3 Les étiquettes attribuées à chacun de ces comportements extrêmes sont évidemment sujettes à caution... Surgies des échanges dans l'équipe de suivi de l'expérimentation, elles sont en fait révélatrices des représentations de leurs auteurs!

qui a des difficultés à utiliser les différents outils à disposition et à mettre en oeuvre les différentes métaconnaissances. La méthode de preuve repose souvent sur le «copié-collé» de résultats antérieurs identifiés comme pertinents;

- un comportement «bricoleur», qui utilise surtout la calculatrice et procède par investigation. La méthode de preuve repose sur l'accumulation de résultats concordants;
- un comportement «expérimentateur», qui utilise tous les outils à disposition, procède par comparaison des différents résultats. La méthode de preuve repose alors sur la confrontation des différentes sources, sur la vérification de la cohérence de celles-ci.

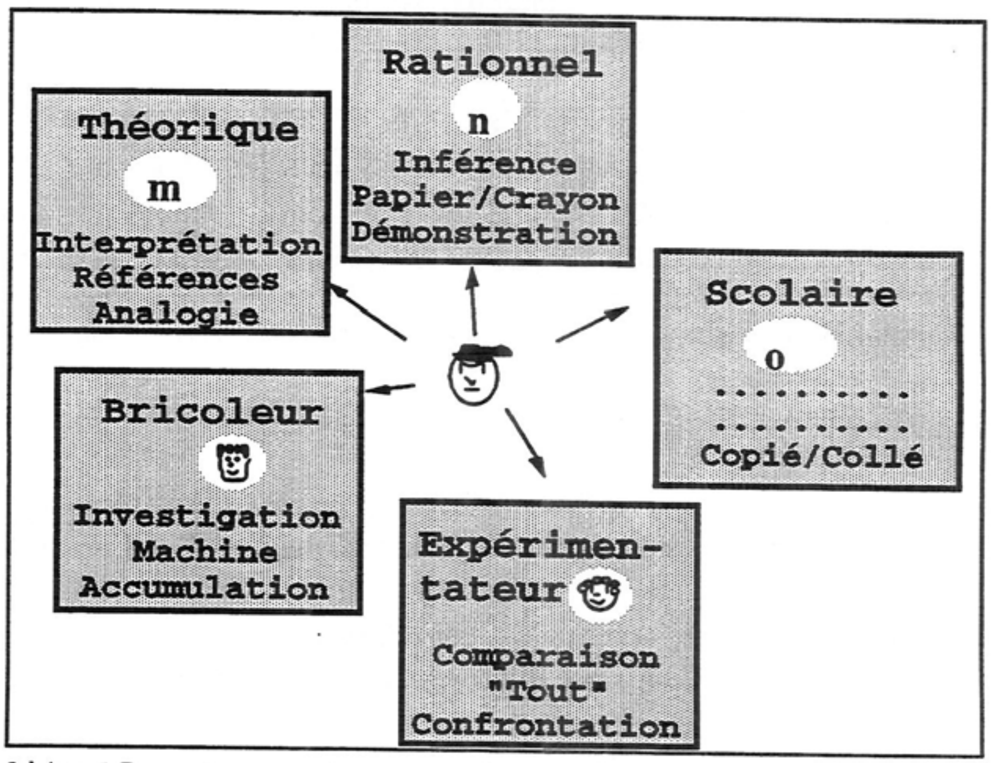


Schéma 5 Des caricatures qui permettent de construire une géographie de la classe

Cette typologie n'a pas un caractère rigide bien sûr. Elle permet de distinguer des points extrêmes dans la classe, de situer les élèves dans des situations intermédiaires, de repérer des évolutions.

L'adaptation naturelle à l'environnement TI 92

La genèse instrumentale (Rabardel, 1995) a un versant individuel et un versant social. Au début du processus (quand les calculatrices sont introduites dans la classe), on peut estimer que le versant individuel est le plus important. Ce sont les habitudes de travail des élèves, les comportements «naturels» qui vont constituer l'outil en instrument du travail mathématique. Ensuite, le travail collectif, l'intervention du maître dans le processus d'instrumentation, vont permettre une harmonisation relative des processus. Mais les comportements individuels installés au départ du processus vont perdurer et s'exprimer en particulier quand l'élève se retrouve «seul» avec sa calculatrice devant un travail à réaliser (par exemple en devoir surveillé). On observe alors:

- pour les comportements de type «rationnel», la calculatrice joue le rôle d'un **cahier de brouillon interactif**. La TI 92 transforme et enrichit le travail mathématique (conjectures, changements de registres, vérifications);
- pour les comportements de type «théorique», la calculatrice est une **boîte à problèmes**. La TI 92 renforce une tendance naturelle: désintérêt pour les calculs élémentaires (traités par la machine), fixation sur les problèmes théoriques généraux;
- pour les comportements de type «scolaire», la calculatrice est une **béquille**. Le travail mathématique est réduit à la traduction pour la machine des questions posées et à l'interprétation des résultats;
- pour les comportements de type «bricoleur», la calculatrice est une **lanterne magique**. La TI-92 renforce la tendance naturelle: investigations multiples, constructions d'itinéraires (par déformations successives) pour arriver au résultat proposé par la calculatrice;
- pour les comportements de type «expérimentateur», la calculatrice joue le rôle d'une **lunette panoramique**. La TI 92 accentue la tendance à rechercher, confronter les résultats issus des différentes applications.

On le voit, **l'adaptation «naturelle» des élèves à un environnement de calculatrices complexes ne réduit pas la dispersion des comportements**, elle peut augmenter celle-ci, enrichir le travail mathématique des «meilleurs», appauvrir le travail mathématique des élèves en difficulté. Cela n'en rend que plus nécessaire l'intervention explicite du maître dans l'organisation du milieu de l'étude.

L'évolution des comportements dans le cadre expérimental

On peut constater d'abord que le temps de travail avec calculatrice est à peu près le même pour tous les élèves (dans les environnements de calculatrices symboliques, ce qui constitue une différence notable par rapport aux environnements de calculatrices simplement graphiques (cf. Trouche, 1997). Cela traduit un certain équilibre entre les phases de travail papier/crayon et les phases de travail avec calculatrice [4].

Mais le travail à fournir pour s'adapter à une nouvelle syntaxe n'est pas le même:

- pour les comportements de type «rationnel», l'adaptation est relativement aisée (comme l'a été l'adaptation à la syntaxe mathématique);
- pour les comportements de type «théorique» ou «expérimentateur», l'adaptation est d'abord problématique (*«la machine me répond toujours syntax error!»*), mais ensuite l'effort d'adaptation s'accompagne d'un progrès dans la rigueur du travail en général;
- pour les comportements de type «scolaire», l'on observe une coupure entre deux groupes:
- ceux qui franchissent le barrage linguistique gagnent en assurance;
- ceux qui ne l'ont pas franchi gagnent en perplexité: «la machine me montre des erreurs que je ne comprends pas, elle m'énerve, elle me surprend par des messages bizarres, elle me fait perdre du temps»;
- pour les comportements de type «bricoleur», l'on distingue aussi une coupure entre deux groupes:
- ceux qui ont fait l'effort d'adaptation rationalisent une démarche d'anticipation/vérification;
- les autres transportent les résultats tels quels[5].

Cependant, l'on observe, pour la majorité des élèves, des effets induits par les processus d'instrumentation socialisés dans le cadre expérimental:

---

4 Cf. sur ce point les observations minutées réalisées par les élèves eux-mêmes lors de l'atelier 7A *«Regards croisés sur le travail en environnement calculatrices symboliques»*.

5 On peut parler à ce propos de schème de «transport automatique», cf. Trouche (1997).

- une diversification, un équilibrage du point de vue des différentes métaconnaissances mises en oeuvre dans l'activité mathématique;
- une modification de la conception des calculatrices et de leur utilisation:
- «je sais désormais qu'une utilisation sérieuse et appliquée de la calculatrice permet d'alléger le travail»;
- «avant cette année, une calculette me semblait inutile, je ne dirais pas que ma calculette m'est devenue indispensable, mais c'est un bon outil de vérification»;
- «la calculatrice permet de conjecturer»;
- «elles sont devenues pour moi de véritables outils utiles qui aident à la réflexion»;
- «c'est un outil utile et efficace, mais qui ne remplace pas une réflexion méthodique».
- l'on observe aussi une modification profonde de la conception des mathématiques et de leur enseignement:
- «le mélange théorie-pratique-calculatrice rend plus passionnantes les mathématiques»;
- «j'ai beaucoup aimé l'enseignement des mathématiques cette année: cela les a rendues vivantes et a éveillé la curiosité de tous et l'envie»;
- «en comparant cela à la musique, il ne s'agit plus seulement de gammes, mais d'applications intéressantes»;
- les maths apportent une rigueur méthodique que je ne soupçonnais pas aussi importante»;
- «les maths, c'est en fait une recherche (difficile) d'où on part de rien pour arriver à quelque chose. On ne connaît jamais les bases, les vraies relations entre les choses».

Le cadre d'étude mis en place dans la classe a permis ainsi un rapprochement des points de vue des différents élèves et un rééquilibrage des différents comportements dans la classe.

Des problèmes demeurent cependant, même au bout d'un an de travail dans le cadre de la classe expérimentale, en particulier chez certains élèves au comportement «scolaire»:

- «cette calculatrice compliquée à utiliser, lourde et dont les messages sont en anglais a aussi des caprices imprévisibles»;

- «cette calculette crée des fossés dans une classe, donne du travail en plus à certains élèves et en plus peut être le cas d'une grande confusion dans les esprits» (remarques extraites du bilan de l'année scolaire 97/98 (cf. Trouche, 1998).

Conclusion

De cette expérimentation, un certain nombre de leçons peuvent être tirées d'un point de vue institutionnel[6] :

- on ne peut espérer régler tous les problèmes par la mise en place du même dispositif concernant indifféremment tous les élèves. L'existence de problèmes spécifiques concernant quelques élèves (les comportements «scolaires» que nous venons d'évoquer) suggère la nécessité de mettre en place des dispositifs spécifiques de tutelle du type «TI 92 langue étrangère»[7];
- il est aussi possible de jouer sur la complémentarité des différents comportements, en associant dans les binômes de TP des élèves bien choisis. Une étude précise sur ce point reste à faire, mais les premières observations dans le cadre expérimental montre les potentialités de ce type de co-tutelle (cf. Trouche, 1996).

Plus généralement, l'enseignement des mathématiques dans un environnement de calculatrices symboliques met au centre du dispositif (ce qui est bien naturel) l'élève dans sa singularité (cf. ci-dessous schéma 6). Il impose de:

- **développer les structures de contrôle collectif** des gestes de travail avec instrument, du langage à travers lequel ces gestes s'expriment et des objets manipulés (les «images», les nombres);

6 Nous nous limiterons ici à l'institution «classe». Il est clair que l'intégration des calculatrices complexes requiert d'autres conditions, relatives aux programmes, aux instructions, aux relations entre disciplines, à l'organisation du temps et de l'espace de l'étude dans un établissement scolaire, etc. Cela sort du cadre de cette conférence...

7 Expression choisie par analogie avec les dispositifs spécifiques de tutelle mis en place pour les jeunes immigrés qui arrivent en France : ils ont droit à des cours de «Français langue étrangère» pour faciliter leur intégration.

- **développer des environnements de travail** qui nécessitent la sollicitation des différents outils (papier/crayon, calculatrice, références disponibles);
- **envisager une diversification des problèmes** qui permette une sollicitation différenciée des métaconnaissances (certains problèmes nécessitant davantage de mettre en oeuvre une coordination de différentes applications, d'autres nécessitant au contraire une utilisation raisonnée d'une seule application -voire d'une seule commande).

La métaphore du chef d'orchestre a déjà été utilisée pour décrire le rôle du maître dans une classe en environnement «calculatrices symboliques». Elle peut aussi se déplacer pour décrire le rôle de l'élève lui-même : ce n'est qu'en apparence qu'il ne dispose que d'un outil. Nous avons tenté de montrer dans cet article que cet outil se constituait en instrument au cours d'une genèse individuelle et collective.

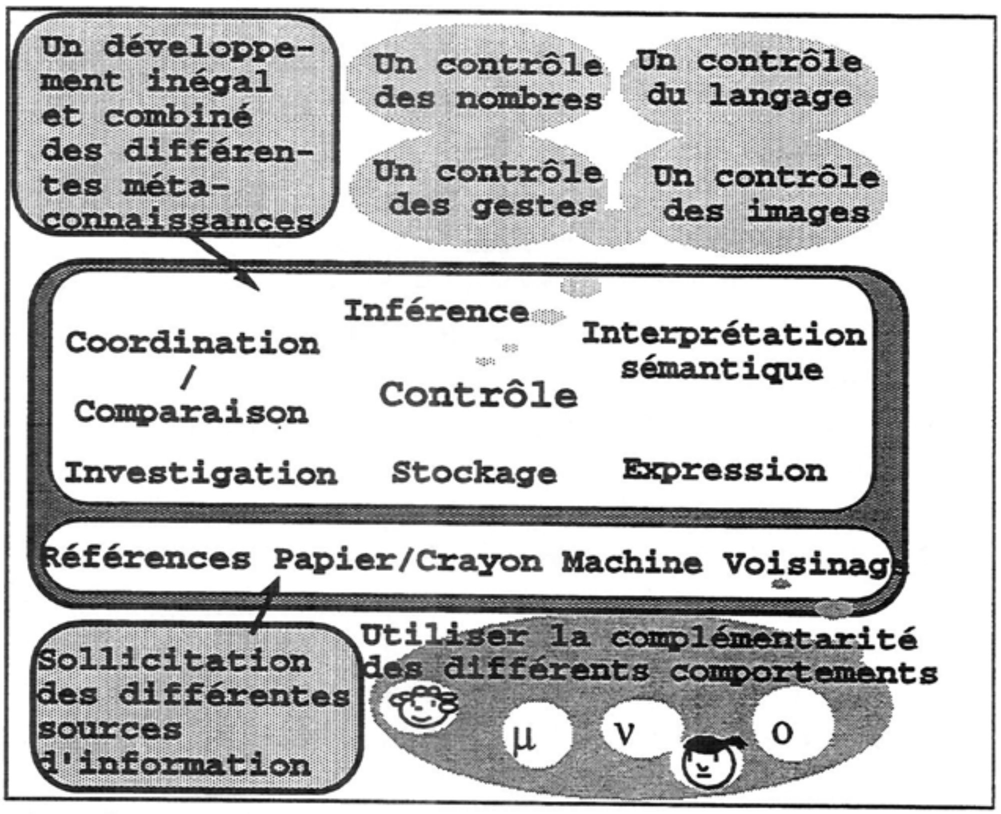


Schéma 6 La carte des métaconnaissances, comme repère pour l'organisation de l'étude dans la classe

A l'issue de cette genèse, l'élève doit avoir à la fois les capacités d'un homme orchestre, pouvant utiliser pertinemment telle ou telle partie de l'instrument en fonction du contexte (ce qui nécessite qu'il ait rencontré des contextes suffisamment variés faisant appel à des partitions différentes), mais aussi les capacités d'un musicien d'orchestre, pouvant s'intégrer dans un ensemble coordonné.

A calculatrices complexes, intégration complexe... Ce n'est qu'en se défaisant de l'illusion des environnements naturellement «mathématiquement producteurs» que l'on pourra obtenir des calculatrices symboliques un enrichissement du travail mathématique.

Bibliographie

ACTES de l'Université d'Été de Rennes. "Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques: quelles perspectives?". Ministère de l'Education Nationale, Diten B2.

ARTIGUE, M. (1995). Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement. In: COLLOQUE ENVIRONNEMENTS INTERACTIFS D'APPRENTISSAGE AVEC ORDINATEUR 95, pp. 17-28, *Actes*. Eyrolles, Paris.

BALACHEFF, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 14, ns. 1-2, pp. 9-42.

BERNARD, R.; FAURE, C.; NOGUÈS, M. e TROUCHE, L. (1997). *L'intégration des calculatrices dans la formation des maîtres*. Irem de Montpellier.

CANET, J.-F.; DELGOULET, J.; GUIN, D. e TROUCHE, L. (1996). *Un outil personnel puissant qui nécessite un apprentissage et ne dispense toujours pas de réfléchir*. Repères-Irem, v. 24, Topiques Editions.

DORFLER, W. (1993). *Computer use and views of the mind*. Learning From Computers: Mathematics Education and Technology, Nato Serie F, Springer-Verlag, 121,

DUVAL, R. (1994). *Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Editeur Irem de Strasbourg.

_____ (1996). Quel cognitif retenir en didactique? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 16, n. 3, pp. 349-382.

GUIN, D. e DELGOULET, J. (1996). *Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de Seconde.* Irem de Montpellier.

HOUDÉ, O. (1995). *Rationalité, développement et inhibition. Un nouveau cadre d'analyse.* Paris, PUF.

PITRAT, J. (1990). *Métaconnaissances, futur de l'intelligence artificielle.* Paris, Hermès.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris, Armand Colin.

ROBERT, A. et ROBINET, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 16, n. 2, pp. 145-176.

RUTHVEN, K. e CHAPLIN, D. (1997). The calculator as a cognitive tool: upper-primary pupils tackling a realistic number problem. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning* , n. 2, pp. 93-124.

SHOAF, M. M. (1997). Using the total Power of the TI 92! From Discovery Explorations to Complete Lab Reports. *The International Journal of Computer Algebra in Education,* v. 4, n. 3, pp. 295-299.

TROUCHE, L. (1996). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice: étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentalisation.* Thèse de doctorat. Université Montpellier II, Irem de Montpellier.

TROUCHE, L. (1997). *Calculatrices symboliques, un défi mathématique.* CRDP de Montpellier.

_____ (1996). *Enseigner les mathématiques en Terminale scientifique avec des calculatrices graphiques et formelles* (deux volumes). Irem de Montpellier.

_____ (1998). *Expérimenter et prouver, faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques; 38 variations sur un thème imposé.* Irem de Montpellier.

TROUCHE, L. et GUIN, D. (1996). *Seeing is reality: how graphic calculators may influence the conceptualisation of limits.* Proceedings, 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 4, pp. 323-333, Valencia.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, ns. 2-3, pp. 133-170.

_____ (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. *Actes de l'école d'été de didactique des Mathématique*. IREM, Clermont-Ferrand.

VYGOTSKI, L. S. (1930/1985). «La Méthode Instrumentale en Psychologie». *Vygotski aujourd'hui*. Neûchatel, Delachaux et Niestlé.

Recebido em jun./1999; aprovado em set./1999