EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA
ISSN 2317-904X

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Saberes docentes para ensinar matemática e os impactos na formação de professores – o caso dos números irracionais

Teaching knowledge to teach mathematics and the impacts on teacher education – the case of irrational numbers

https://doi.org/10.37001/emr.v26i73.2618

Geraldo Claudio Broetto[1]
Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner[2]

Resumo

Este trabalho discute como questões relacionadas aos saberes movimentados na atividade docente de ensinar matemática impactam na formação do professor dessa disciplina. A primeira questão é de natureza ontológica e trata da natureza e especificidades do conhecimento matemático escolar. Argumentamos que esse conhecimento não se constitui apenas como uma reorganização didática do conhecimento científico nem como uma construção original da escola, mas como um conjunto de saberes associados à profissão docente. A segunda questão avança em relação à primeira esmiuçando os saberes necessários ao exercício da atividade docente, e mostramos que é necessário um domínio diferenciado do conteúdo quando se pretende ensiná-lo. A terceira questão trata dos impactos que as duas primeiras questões provocam na formação dos professores de matemática. Finalizamos com aplicações no ensino de números irracionais a partir de uma pesquisa de doutorado realizada pelos autores com estudantes ingressantes em licenciatura em matemática.

Palavras-chave: Saberes e saberes docentes. Ensino de matemática. Formação inicial de professores. Números irracionais.

Abstract

This work discusses how questions related to the teaching knowledge for activity impact on the mathematics teacher education. The first question is of an ontological nature and deals with the nature and specificities of school mathematical knowledge. We argue that this knowledge did not only constitute as a didactical reorganization of scientific knowledge neither as an original school construction, but as a set of knowledge associated with the teaching profession. The second question advances by examining the knowledge necessary for the exercise of teaching activity, and we show that a differentiated content domain is necessary when it is intended to teach it. The third question deals with the impacts that the first two questions cause in the training of mathematics teachers. We conclude with an application in teaching of irrational numbers coming from a doctoral research conducted by the authors with entering students in a mathematics teacher education course.

Keywords: Teacher knowledge. Mathematics teaching. Preservice teacher education. Irrational numbers.

Introdução

Diversas questões perpassam a trajetória de um professor de matemática, desde sua formação inicial até sua prática profissional. Entre essas questões, selecionamos aquelas que

[1] Doutorado em Educação em Universidade Federal do Espirito Santo (UFES); Professor de matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), Vitória, ES, Brasil, e-mail: gbroetto@gmail.com.
[2] Doutorado em Educação (PhD) em Indiana University; Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Vitória, ES, Brasil (Professora aposentada da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)), e-mail: profvaniasantoswagner@gmail.com.

consideramos centrais nesse processo, pois impactam diretamente na formação do professor de matemática. A primeira delas diz respeito à natureza e às especificidades da matemática escolar, cuja origem se deve não só à matemática acadêmica, mas também à própria escola enquanto instituição sócio-histórica. A segunda questão é relativa aos saberes[3] necessários para o desempenho da atividade docente daqueles que ensinam matemática. É ponto pacífico para toda comunidade acadêmica que o professor de matemática, assim como de qualquer disciplina, precisa conhecer o conteúdo que ministra. Contudo, entre educadores matemáticos, existe relativo consenso de que o conhecimento do conteúdo não é suficiente para desempenhar satisfatoriamente a atividade docente.

Pensamos que diversas reflexões importantes estão relacionadas às duas questões anteriores, a natureza da matemática escolar e os saberes necessários para exercício da profissão docente. Isso nos leva a refletir a respeito do impacto dessas questões na formação do professor de matemática e nos conduz à nossa terceira questão: de que forma a matemática escolar e os saberes necessários para ensiná-la estão presentes na formação inicial do professor de matemática? Finalizamos o texto com uma aplicação de toda a discussão para o caso específico do ensino dos números irracionais, resultado de uma pesquisa de doutorado de natureza qualitativa realizada pelos autores em 2016 com estudantes recém ingressados em um curso de licenciatura em matemática (BROETTO, 2016, BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017).

A natureza da matemática escolar

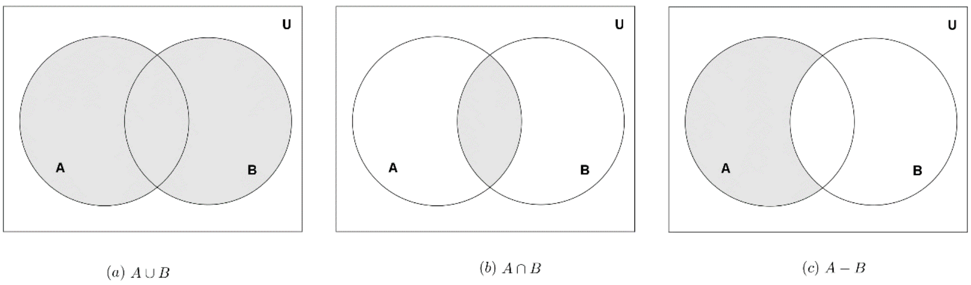
Segundo Chevallard (1991), um objeto de saber preexiste ao movimento que o designa como um saber a ensinar. A partir daí esse objeto sofre uma série de transformações adaptativas que o torna um objeto de ensino. O trabalho realizado para transformar um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática. Como exemplo desse processo, Chevallard (1991) cita a noção de distância:

> A noção de distância (entre dois pontos) é utilizada espontaneamente *desde sempre*; o conceito matemático de distância é introduzido em 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático); no primeiro ciclo da educação secundária francesa, a noção matemática de distância, surgida da noção de Fréchet aparece em 1971 (objeto a ensinar); seu tratamento didático varia com os anos a partir de sua designação como objeto a ensinar: continua o *trabalho* de transposição (p. 46, tradução nossa).

[3] Adotamos a visão de Tardif (2002) para o qual o saber docente é um "saber plural, formado de diversos saberes provenientes das instituições de formação, da formação profissional, dos currículos e da prática cotidiana" (p. 54).

Chevallard (1991) também afirma que, em alguns casos, os objetos de ensino podem ser verdadeiras criações didáticas, que surgem como um recurso para outras aprendizagens. Por exemplo, os diagramas de Venn surgiram na transposição didática da teoria dos conjuntos, cuja proposta é representar graficamente situações como a união de conjuntos ($A \cup B$), a interseção de conjuntos ($A \cap B$), a diferença de conjuntos ($A - B$), entre outros (ver Figura 1). Outro exemplo de criação didática escolar citado por Chevallard (1991) é o grande seno e o grande cosseno[4]. Segundo Pais (2012), o problema surge quando esses objetos de ensino tornam-se um fim em si mesmos, de forma "puramente automatizada e desvinculada de aplicação" (p. 17).

Figura 1 – Diagramas de Venn



Fonte: Elaborada pelos autores.

As ideias contidas em Chevallard (1991) também apresentam alguns pontos polêmicos – principalmente no que se refere ao saber acadêmico como única fonte geradora e balizadora do conhecimento a ser ensinado –, mas existem contrapontos. No caso da matemática, pode-se dizer que o saber acadêmico (saber sábio) é formado principalmente pelas contribuições da matemática, da educação matemática e da pedagogia. Essas ideias passam em seguida pelo filtro das políticas públicas, pela elaboração dos currículos e, em seguida, pelos autores e editoras de livros didáticos, materializando o saber sábio em um saber a ensinar, por exemplo, por meio do livro didático. Esse saber a ensinar ainda passará pelo crivo das escolas e, em última instância, pelo professor, antes de se tornar um saber ensinado (SANT'ANNA; BITTENCOURT; OLSSON, 2008).

Além de "fonte privilegiada do saber escolar" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 18), o saber acadêmico, de acordo com Chevallard (1991), também seria responsável pela validação ou acreditação do saber escolar. Nesse ponto específico, muitos autores discordam que

[4] Segundo Chevallard (1991) são criações exclusivas de escolas francesas. Grosso modo, trata-se de diferenciar o seno e o cosseno de um número real da função seno e da função cosseno, chamadas de *gran seno* e *gran cosseno*. Para maiores detalhes, indicamos a leitura de Leivas e Cury (2009).

> A matemática escolar se constituiria essencialmente de uma adaptação à escola de conceitos, métodos e técnicas da Matemática Científica (...) As análises de Chevallard, embora penetrem de forma rica e profunda em certos aspectos do processo de ensino de Matemática na escola, sugerem uma concepção de Matemática Escolar excessivamente dominada pela Matemática Científica (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 18).

Um texto que frequentemente é utilizado como contraponto a Chevallard (1991) é Chervel (1990). Ele contesta a ideia de que as disciplinas escolares são uma vulgarização das respectivas ciências de referência, e que, consequentemente, a pedagogia serviria apenas como um lubrificante facilitador do ensino.

> Se se ligam diretamente as disciplinas escolares às ciências, aos saberes, aos *savoir-faire* correntes na sociedade global, todos os desvios entre umas e outros são atribuídos à necessidade de simplificar, na verdade vulgarizar, para um público jovem, os saberes que não se lhe podem apresentar na sua pureza e integridade. A tarefa dos pedagogos, supõe-se, consiste em arranjar os métodos de modo que eles permitam que os alunos assimilem o mais rápido e o melhor possível a maior porção da ciência de referência. As disciplinas reduzem-se, nessa hipótese, às *metodologias*. Ao lado da disciplina-vulgarização é imposta a imagem da pedagogia-lubrificante, encarregada de lubrificar os mecanismos e fazer girar a máquina (CHERVEL, 1990, p. 180).

Para Chervel (1990), as disciplinas escolares são entidades *sui generis*, criadas pela "própria escola, na escola e para a escola" (p. 181), ou seja, seriam independentes, de certa forma, da realidade cultural exterior à escola. Quanto à pedagogia, o autor aponta que ela faz parte das disciplinas, e que "longe de ser um lubrificante espalhado sobre o mecanismo, não é senão um elemento desse mecanismo, aquele que transforma os ensinos em aprendizagens" (p. 182). Ou seja, a escola não deve ser vista como uma simples reprodutora (e vulgarizadora) da ciência, nem as disciplinas escolares devem ser vistas como matérias a serem ensinadas, uma "lista de conteúdos constituída anteriormente ao processo de ensino escolar. Ao contrário, se constitui historicamente em conjunção com a prática e a cultura escolar" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20).

Moreira e David (2010) também reconhecem a existência de uma matemática acadêmica e de uma matemática escolar com objetivos e métodos próprios, porém, oferecem uma visão que ultrapassa as posições assumidas em Chevallard (1991) e Chervel (1990). Moreira e David (2010) reconhecem que o poder criativo da escola em relação a alguns objetos de ensino foi contemplado por Chevallard (1991), entretanto, consideram que ele comete um hiper dimensionamento do saber científico, reduzindo a matemática escolar a uma espécie de "didatização da matemática científica" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20). Quanto a Chervel (1990), Moreira e David (2010) avaliam que considerar as disciplinas escolares como uma construção original da escola "parece fechar as portas a múltiplos mecanismos e processos que condicionam essa construção a partir do exterior do espaço escolar" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20). Além de destacar que matemática acadêmica e matemática escolar são formas distintas do conhecimento matemático, em Moreira e David (2010) a matemática escolar é estabelecida não como uma "disciplina ensinada na escola", mas como um "conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente" (p. 21). Este é o nosso ponto de vista, o que nos remete à nossa segunda questão.

Saberes necessários para o exercício da profissão docente

É consenso entre os educadores que o professor deve ter um bom nível de conhecimento do conteúdo da disciplina que vai ensinar. Além disso, também se considera importante deter alguns saberes de pedagogia, como a didática. Durante muito tempo, os cursos de formação de professores refletiram esse pensamento por meio do modelo que ficou conhecido como 3+1, isto é, 3 anos de bacharelado mais 1 ano de disciplinas pedagógicas que conferiam o grau de licenciado. Ainda que esse modelo seja considerado um modelo ultrapassado, e hoje as disciplinas pedagógicas estejam diluídas ao longo de todos os anos dos cursos de licenciatura em matemática, a essência da dualidade conteúdo-método ainda se mostra presente (SCHEIBE, 1983).

Lee Shulman foi um dos pioneiros na superação dessa dualidade ao lançar um olhar diferente para a questão, oferecendo novas possibilidades de descrição tanto do conhecimento do conteúdo quanto do conhecimento pedagógico. Para Shulman (1986), existem três categorias referentes ao conhecimento do conteúdo: "conhecimento do conteúdo da matéria a ser ensinada; conhecimento pedagógico do conteúdo[5] e o conhecimento curricular" (SHULMAN, 1986, p. 9). É importante ressaltar que, ao incluir um tipo de conhecimento pedagógico como parte do conhecimento de conteúdo, Shulman (1986) não diminui a importância do conhecimento pedagógico do ensino, que se refere ao conhecimento dos princípios genéricos da organização e regência de uma sala de aula.

Em relação ao conhecimento do conteúdo da matéria a ser ensinada, Shulman (1986) aponta que os professores devem ser capazes de definir para os estudantes as verdades

[5] As ideias de Shulman (1986) foram citadas em mais de 1200 artigos em periódicos ao longo de duas décadas após sua publicação. A difusão das ideias de Shulman (1986) alcançou áreas como matemática, ciência, estudos sociais, educação física, direito, enfermagem, comunicação, religião, engenharia, química, música, educação especial, entre outras. Dentre as ideias de Shulman (1986), a que mais se destacou foi o conhecimento pedagógico do conteúdo, citado e/ou utilizado por milhares de artigos, capítulos de livros e relatórios de pesquisa (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

aceitas em um determinado domínio, além de explicar por que uma dada proposição é considerada válida, porque se deve saber aquela proposição, e como ela se relaciona com outras proposições, tanto no âmbito interno da disciplina quanto no âmbito externo, tanto na teoria quanto na prática. De acordo com o autor,

> O professor precisa não apenas entender ‘que’ alguma coisa é assim, o professor precisa entender, além disso, ‘porque’ é assim, que fundamentos garantem suas afirmativas, e sob que circunstâncias nossas crenças nesta justificativa podem ser enfraquecidas ou até mesmo abandonadas (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa, grifos no original).

No que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo, Shulman (1986) destaca que esse ponto ainda trata fundamentalmente do conhecimento do conteúdo, mas de um aspecto particular desse conhecimento, que está relacionado com a sua ensinabilidade (*teachability*). Além dos tópicos regulares comumente ensinados em uma determinada área, Shulman (1986) inclui no conhecimento pedagógico do conteúdo as formas mais comuns de representação desses tópicos, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. “Em uma palavra, as formas de representar e formular o assunto que o torna compreensível para outrem” (p. 9, tradução nossa). Shulman (1986) ainda ressalta que não existe uma forma mais poderosa de representação, o que leva o professor a ter que conhecer vários recursos alternativos para ensinar, que podem se originar de pesquisas ou de saberes construídos na própria prática docente. Além disso, o autor chama a atenção para a importância de o professor conhecer os pontos mais difíceis da matéria que ensina e as concepções que os alunos trazem consigo.

> Já que não existem formas singulares mais poderosas de representação, o professor deve ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam-se de pesquisas enquanto outras são originadas da sabedoria da prática. O conhecimento pedagógico do conteúdo também deve incluir o que torna um tópico específico fácil ou difícil, as concepções e preconcepções que os estudantes de diferentes idades e bagagens (*backgrounds*) trazem com eles para a aprendizagem dos tópicos e lições mais frequentemente ensinados. Se essas preconcepções são concepções equivocadas (*misconceptions*), que elas frequentemente são, os professores precisam de saberes de estratégias com maiores chances de serem frutíferas em reorganizar o entendimento dos aprendizes, porque é improvável que aqueles aprendizes apareçam na frente deles como lousas em branco (p. 9, tradução nossa).

Quanto ao conhecimento curricular, Shulman (1986) aponta que o currículo é composto dos programas designados para ensinar um determinado tópico em um dado nível e de uma variedade de materiais instrucionais disponíveis relacionados a esses tópicos.

> O currículo e seus materiais associados são a *materia medica*[6] da pedagogia, a farmacopeia[7] a partir da qual os professores selecionam aquelas ferramentas de ensino que apresentam ou exemplificam um conteúdo particular e remedeiam ou avaliam a adequação das realizações dos estudantes (p. 10).

Além disso, o autor também chama atenção para dois aspectos do conhecimento curricular: o "conhecimento curricular lateral e o conhecimento curricular vertical" (SHULMAN, 1986, p. 10). O primeiro aspecto se refere à habilidade do professor em relacionar o conteúdo que ensina com outros conteúdos que seus alunos estejam aprendendo em outras disciplinas. O segundo aspecto se refere ao conhecimento do que foi ensinado na mesma disciplina durante os anos anteriores e do que será ensinado em anos posteriores, bem como os materiais envolvidos. Em nossa experiência docente como professores de matemática, percebemos o potencial para gerar estímulo do conhecimento curricular lateral. Muitos alunos ficam empolgados quando relacionamos algum tópico da matemática com algum assunto que está sendo tratado nas aulas de física, química, de biologia, entre outras. Quanto ao conhecimento curricular vertical, o que vemos é que uma visão holística de todo o currículo de matemática, desde a educação infantil até a educação superior, é muito rara de se encontrar. Constatamos ainda a necessidade de termos uma cultura de matemática (currículos, livros, professores) que valorizem as compreensões instrumentais (procedimentais) – saber fazer cálculos, usar fórmulas e regras matemáticas – assim como as compreensões relacionais de conceitos matemáticos – a origem dos conceitos, porque e como funcionam e como se relacionam com outros conceitos (SKEMP, 1976).

Com uma visão estabelecida de que conhecer um conteúdo para o ensino é algo diferente de apenas conhecer um conteúdo, Shulman (1987) conduziu uma pesquisa e observou professores veteranos e professores de várias disciplinas que estavam iniciando na carreira docente durante três anos, com o objetivo de comparar suas ações e descobrir quais são os principais saberes necessários para lecionar. Shulman (1987) observou professores veteranos ensinando os mesmos tópicos nos quais os professores novatos apresentaram alguma dificuldade, como equações quadráticas, o subcontinente indiano, fotossíntese, entre

---

[6] *Materia medica* é um termo em latim usado na medicina que representa o corpo de saberes acumulados a respeito das propriedades terapêuticas das substâncias para o tratamento de doenças. O termo foi usado desde o período do Império Romano até o século XX, e deriva do título de um trabalho de um fisiólogo grego antigo chamado Pedanius Dioscorides, do século I d.C. Hoje esse termo foi substituído no ensino de medicina pelo termo farmacologia. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Materia_medica. Acesso em 4/12/2015.

[7] Uma farmacopeia é um conjunto de informações técnicas que retratam a nomenclatura das substâncias e dos medicamentos básicos, bem como seus princípios ativos. Em sua forma técnica moderna, o termo se refere a um livro contendo referências de medicamentos publicado por autoridades governamentais ou por sociedades médicas ou farmacêuticas. Fontes: https://pt.wikipedia.org/wiki/Farmacopeia e https://en.wikipedia.org/wiki/Pharmacopoeia. Acesso em 4/12/2015.

outros. A intenção do pesquisador foi aprender como os conteúdos e as estratégias pedagógicas interagiam na mente desses professores e definir um quadro de conhecimentos-base (*knowledge base*) para ensinar qualquer disciplina. Além do conhecimento do conteúdo (e suas três subcategorias), já discutido anteriormente, Shulman (1987) acrescenta mais três categorias: conhecimento dos estudantes e suas características; conhecimento dos contextos educacionais; e conhecimento dos fundamentos filosóficos, propósitos, valores e finalidades da educação.

Com objetivos bastante próximos aos de Shulman (1987), Deborah Ball e Hyman Bass observaram o ensino de matemática em uma sala de aula do terceiro ano de uma escola pública durante um ano (BALL; BASS, 2003). Observaram coisas que os professores de matemática fizeram que todo professor faz, como manter a classe organizada, acompanhar o progresso dos estudantes, comunicar com os pais, construir relações com os estudantes, selecionar e modificar tarefas, criar questionários, mediar discussões, interpretar e utilizar materiais do currículo, propor questões, avaliar os estudantes e decidir o que aprofundar e o que deixar de lado. Parecem atividades pedagógicas genéricas, mas, olhando de perto, essas tarefas exigem um substancial conhecimento matemático e raciocínio.

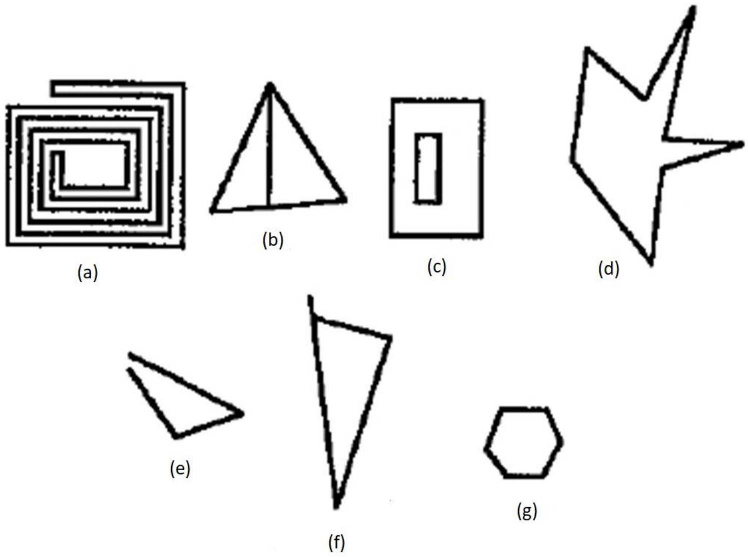
O trabalho de Ball e Bass (2003) pode ser considerado como uma espécie de complemento às ideias apresentadas em Shulman (1986; 1987). Esses pesquisadores deram exemplos mais concretos do que seriam os saberes necessários ao professor de matemática para ensinar. Ball e Bass (2003) supõem que, estudando polígonos, os estudantes produzam ou encontrem figuras não usuais como as apresentadas a seguir (O professor poderá recorrer a livros texto e encontrar definições como '1' ou '2'. Ele precisará perceber que a definição '1' não exclui os casos (b), (c) e (f) (Figura 2); isto é, de acordo com essa definição, as figuras representadas em (b), (c) e (f) são polígonos (Figura 2). Quanto à definição '2', ela parece mais apropriada, porém, o professor precisará estar atento ao fato de que os alunos podem não ter conhecimento do significado de termos como curva fechada simples' utilizados no enunciado. Assim, ensinar envolve selecionar definições que são matematicamente apropriadas ao mesmo tempo em que possam ser utilizáveis pelos estudantes de um determinado nível. O professor precisaria, portanto, ser capaz de desenvolver uma definição adequada para os seus alunos, e poderia chegar até a definição '3'. Essa definição, ao contrário de '1', além de matematicamente aceitável, exclui as figuras (b), (c), (e) e (f) da categoria de polígonos (Figura 2). Ao contrário de '2', utiliza termos de mais fácil compreensão para os alunos (mas ainda assim o professor deve estar atento a termos utilizados como segmentos vizinhos).

Figura 2) e perguntem quais delas são polígonos. Nesse momento, torna-se essencial levar os alunos a pensar na diferença entre uma figura qualquer e um polígono. É tudo a mesma coisa? Ou existem diferenças? Algumas definições podem surgir nesse momento, e é importante considerar algumas possibilidades, como as seguintes:

> 1) Polígono é uma forma plana fechada bidimensional cujos lados são formados por segmentos de reta.
> 2) Polígono é uma curva fechada simples formada por segmentos de reta.
> 3) Polígono é uma sequência de três ou mais segmentos de reta em um plano, cada um terminando onde o próximo começa, e o último terminando onde o primeiro começa. Exceto por esses pontos finais, compartilhando apenas pelos pares de segmentos vizinhos, os segmentos de reta não têm outros pontos em comum (BALL; BASS, 2003, p. 8, tradução nossa).

O professor poderá recorrer a livros texto e encontrar definições como ‘1’ ou ‘2’. Ele precisará perceber que a definição ‘1’ não exclui os casos (b), (c) e (f) (Figura 2); isto é, de acordo com essa definição, as figuras representadas em (b), (c) e (f) são polígonos (Figura 2). Quanto à definição ‘2’, ela parece mais apropriada, porém, o professor precisará estar atento ao fato de que os alunos podem não ter conhecimento do significado de termos como curva fechada simples’ utilizados no enunciado. Assim, ensinar envolve selecionar definições que são matematicamente apropriadas ao mesmo tempo em que possam ser utilizáveis pelos estudantes de um determinado nível. O professor precisaria, portanto, ser capaz de desenvolver uma definição adequada para os seus alunos, e poderia chegar até a definição ‘3’. Essa definição, ao contrário de ‘1’, além de matematicamente aceitável, exclui as figuras (b), (c), (e) e (f) da categoria de polígonos (Figura 2). Ao contrário de ‘2’, utiliza termos de mais fácil compreensão para os alunos (mas ainda assim o professor deve estar atento a termos utilizados como segmentos vizinhos).

Figura 2 – Figuras não usuais



Fonte: BALL; BASS (2003, p. 7)

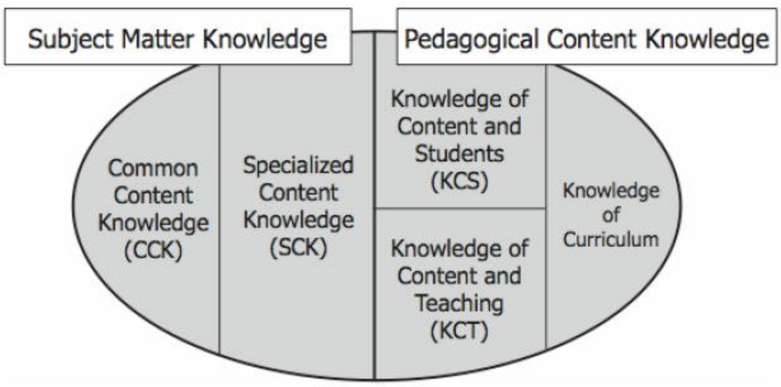
Conhecer e saber definições para ensinar, portanto, requer capacidade de lidar com as definições que vai além de simplesmente codificá-las ou utilizá-las. É preciso saber como as definições funcionam, qual o seu papel, e saber adaptar ou criar definições que ao mesmo tempo tenham integridade matemática e sejam compreendidas pelos estudantes. Esses argumentos estão em consonância com assertivas de Skemp (1976), Shulman (1986; 1987) e Ball e Bass (2003).

A primeira constatação do trabalho de Ball e Bass (2003) é óbvia: os professores precisam saber/conhecer matemática para ensinar matemática. Outra questão, porém, não é óbvia: como esses professores precisam saber essa matemática? O que mais professores precisam saber da matemática e sobre a matemática? Ball e Bass (2003) chegaram até a propor uma lista desses saberes:

> ✓ Projetar explicações matematicamente acuradas que são compreensíveis e utilizáveis pelos estudantes;
> ✓ Usar definições matematicamente apropriadas e compreensíveis;
> ✓ Representar ideias cuidadosamente, mapeando entre um modelo físico ou gráfico, a notação simbólica e a operação ou processo;
> ✓ Interpretar e fazer julgamentos matemáticos e pedagógicos sobre as perguntas dos estudantes, soluções, problemas e *insights* (previsíveis e não usuais);
> ✓ Ser capaz de responder produtivamente às questões matemáticas e curiosidades dos estudantes;
> ✓ Fazer julgamentos sobre a qualidade matemática dos materiais de instrução e modificá-los se necessário;
> ✓ Ser capaz de propor boas questões matemáticas e problemas que são produtivos para a aprendizagem dos estudantes;
> ✓ Avaliar a aprendizagem dos estudantes e tomar os próximos passos.
> (p. 11, tradução nossa).

O trabalho conduzido por Ball, Thames e Phelps (2008) também avançou em relação aos trabalhos de Shulman (1986; 1987), e propõe um refinamento das categorias propostas nessas obras. O conhecimento do conteúdo específico ou saberes do conteúdo da disciplina, orginalmente proposto por Shulman (1986), foi dividido em dois. O conhecimento comum do conteúdo (Common Content Knowledge – CCK) é o conhecimento matemático que é esperado de um adulto bem-educado para desempenhar seu papel de cidadão em qualquer sociedade atual. Por exemplo, realizar uma subtração como 367 – 168, ler e entender tabelas e gráficos, realizar medidas, identificar formas geométricas, entre outros. Já o conhecimento de conteúdo especializado (Specialized Content Knowledge – SCK) é o tipo de conhecimento que está além do que se espera de um cidadão bem-educado (Figura 3). É o tipo de conhecimento que o professor precisa ter e saber para explicar um conteúdo e motivar os alunos a querer aprender. O conhecimento SCK não é necessariamente o conhecimento que o aluno construirá. Portanto, esse conhecimento do professor engloba tarefas como: 1) apresentar ideias matemáticas; 2) responder às perguntas dos estudantes do tipo *porque*; 3) encontrar exemplos e contraexemplos para fazer um apontamento matemático específico; 4) reconhecer o que está envolvido quando se usa uma determinada representação matemática; 5) fazer ligações entre diferentes tipos de representações; 6) apreciar e adaptar o conteúdo matemático dos livros texto; 7) modificar tarefas para se tornarem mais fáceis ou mais difíceis; 8) fornecer e avaliar explicações matemáticas; 9) escolher e desenvolver definições utilizáveis pelos alunos; 10) usar e ser capaz de criticar a linguagem e a notação matemática, entre outros.

Figura 3 – Refinamento de Ball, Thames e Phelps (2008) para as categorias de Shulman (1986)



Fonte: BALL; THAMES; PHELPS (2008, p. 5)

O conhecimento pedagógico do conteúdo proposto em Shulman (1986) também foi refinado em Ball, Thames e Phelps (2008), e passou a incluir três subtipos (Figura 3). O conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) é um tipo de conhecimento que combina saberes a respeito dos estudantes e saberes matemáticos. Ele deriva da experiência e do conhecimento que o professor vai adquirindo ao longo do tempo como, por exemplo, o conhecimento dos erros mais comuns que os alunos cometem. O conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT) é um tipo de conhecimento que combina saber ensinar com saber matemática. Está incluído nesse tipo de conhecimento saberes como sequenciar o conteúdo para a instrução, decidir quais exemplos utilizar para iniciar um determinado assunto e quais exemplos utilizar para aprofundar o assunto, avaliar as vantagens e desvantagens de determinadas representações utilizadas para ensinar alguma ideia, decidir quando pedir aos alunos maior clareza nas suas colocações, quando colocar uma nova questão ou sugerir uma nova tarefa, entre outros.

Impactos na formação do professor de matemática

A grande ruptura ocasionada pela introdução do conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo nos trabalhos de Shulman (SHULMAN, 1986; 1987) foi a distinção entre o conteúdo como é estudado e aprendido em configurações disciplinares e o "amálgama especial de conteúdo e pedagogia" (BALL; BASS, 2003, p. 8, tradução nossa) necessário para ensinar uma matéria. Ou seja, o que deve estar em jogo durante a formação de professores é muito mais do que saber matemática, é saber ensinar matemática, que são coisas bem diferentes. Segundo Ball e Bass (2003), a introdução de ideias como o conhecimento pedagógico do conteúdo trouxe à tona questões sobre o conteúdo e sobre o entendimento desse conteúdo pelos professores que não haviam sido levantadas previamente pela formação de professores. Para Fiorentini (2005), o conhecimento do conteúdo, da forma como elaborado em Shulman (1986), é o principal saber docente, "pois interliga de forma intencional o saber matemático e os saberes didático-pedagógicos" (p. 109).

> Parece natural que o saber construído na/pela prática docente faça parte da formação dos professores. Porém, de acordo com Tardif (2002), os saberes difundidos pelas universidades ainda não estão em sintonia com os saberes construídos na prática docente. Até agora, a formação para o magistério esteve dominada sobretudo pelos saberes disciplinares, saberes esses produzidos geralmente numa redoma de vidro, sem nenhuma conexão com a prática profissional, devendo, em seguida, serem aplicados na prática por meio de estágios ou de outras atividades do gênero (FIORENTINI, 2005, p. 23).

Concordamos com Tardif (2002) que os saberes difundidos pelas universidades ainda não estão em sintonia com os saberes construídos na prática docente, embora as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica (BRASIL, 2002) já signifiquem um avanço na relação da formação do professor com sua futura prática na escola. Essas diretrizes defendem que o preparo para o ensino deve visar à aprendizagem do aluno e que a seleção e o ordenamento dos conteúdos da matriz curricular para a formação de professores é o "primeiro passo para a transposição didática, que visa a transformar os conteúdos selecionados em objeto de ensino dos futuros professores" (BRASIL, 2002, p. 5). Brasil (2002) aponta também que haja "coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor" (p. 2) e que "os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas" (p. 2). Para as Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), "o licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica" (p. 4). Para os Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2010),

> O Licenciado em Matemática é o professor que planeja, organiza e desenvolve atividades e materiais relativos à Educação Matemática. Sua atribuição central é a docência na Educação Básica, que requer sólidos saberes sobre os fundamentos da Matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias para transposição do conhecimento matemático em saber escolar (p. 79).

Segundo Moreira e David (2010), o conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente inclui tanto os saberes produzidos pelos professores em sua ação pedagógica na sala de aula quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar. Complementando essa ideia, Fiorentini (2005) acrescenta que a formação do professor deve contemplar, além do conhecimento acadêmico, saberes próprios da escola e também de práticas não-formais.

> O conhecimento matemático pode ser focalizado a partir de três diferentes perspectivas: da prática científica ou acadêmica; da prática escolar; e das práticas cotidianas não-formais. Todas essas perspectivas interessam à formação do professor, pois a matemática escolar se constitui com feição própria mediante um processo de interlocução com a matemática científica e com a matemática produzida/mobilizada nas diferentes práticas cotidianas. Interessa ao professor, principalmente, porque a matemática escolar – que é objeto-foco da atividade do professor no Ensino Básico – é um conhecimento que é, ao mesmo tempo, mobilizado e *transcriado* ou produzido nas relações que se estabelecem no seio escolar (p. 108).

A respeito da relação entre disciplinas do chamado núcleo duro e as disciplinas pedagógicas, Fiorentini (2005) desenvolve argumentos que consideramos pertinentes.

Segundo o autor, professores de cálculo diferencial e integral, álgebra, análise etc., ensinam muito mais do que conceitos ou procedimentos matemáticos, apesar de muitas vezes não terem consciência disso. Os professores dessas disciplinas também ensinam o que Fiorentini (2005) chama de um "currículo oculto subjacente à ação pedagógica" (FIORENTINI, 2005, p. 111); isto é, um jeito de ser pessoa, um jeito de ser professor, um modo de conceber o mundo e um modo de conceber e tratar a matemática, além do próprio ensino e da avaliação da aprendizagem.

Algumas pesquisas apontam ainda que o comportamento dos professores das disciplinas específicas influencia mais a prática do futuro professor do que as prescrições das disciplinas didático-pedagógicas. As razões para isso, segundo Fiorentini (2005), é que o comportamento dos professores das disciplinas específicas reforça procedimentos internalizados durante o processo anterior de escolarização. Nesse ponto, convém lembrar que a atividade docente é talvez a única em que, antes mesmo de se profissionalizar, o candidato passa vários anos em seu futuro local de trabalho.

> Antes mesmo de começarem a ensinar oficialmente, os professores já sabem, de muitas maneiras, o que é o ensino por causa de toda a sua história escolar anterior. Além disso, muitas pesquisas mostram que esse saber herdado da experiência escolar anterior é muito forte, que ele persiste através do tempo e que a formação universitária não consegue transformá-lo nem muito menos abalá-lo (TARDIF, 2002, p. 20).

Cientes da formação pedagógica implícita em todos os seus movimentos, os professores das disciplinas específicas da licenciatura, deveriam implementar outros modelos didáticos de ensino. Fiorentini (2005) sugere que esses professores utilizem atividades exploratórias e problematizadoras das dimensões conceituais, procedimentais, epistemológicas e históricas dos saberes matemáticos por meio de investigações em sala de aula e modelagem matemática baseados na metodologia de projetos, além de seminários temáticos. De forma análoga, em Fiorentini (2005) também é defendida uma formação matemática nas disciplinas pedagógicas. Isso pode ocorrer de várias formas, como a contribuição para uma visão da matemática como um "saber sociocultural produzido nas relações e práticas sociais" (p. 112), que pode se expressar de muitas maneiras, sendo uma delas a forma acadêmica. Outra forma é a ressignificação de conceitos e procedimentos matemáticos adquiridos durante o processo de escolarização. Por exemplo, pode-se discutir "como cada licenciando pensa introduzir, na prática escolar, o conceito de equação ou promover a iniciação ao desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos" (p. 112). Ainda uma outra forma sugerida em Fiorentini (2005) seria a discussão de episódios reais ocorridos em sala de aula, por meio de vídeos ou narrativas, que podem ser extraídos de relatos de pesquisa ou do diário de campo do próprio licenciando após observação nas escolas.

O caso dos números irracionais

Uma característica importante da matemática é sua capacidade de comprimir informações em formas abstratas e usáveis. Uma das habilidades fundamentais de se saber matemática para o ensino consiste no processo contrário, isto é, o conhecimento matemático precisa ser desempacotado. Um exemplo é a aprendizagem de frações. As crianças não começam a aprender frações com a noção de número real, nem mesmo de número racional, como na matemática acadêmica. Elas começam vendo as frações como partes de um todo. Em relação aos números reais ocorre situação semelhante. Existe muito conhecimento, resultado de séculos de compactação, que são trabalhados na formação do professor de matemática, mas que não são suficientes para capacitar o professor para lidar com o desenvolvimento das crianças (BORTOLOSSI, 2017). Embora definições formais, teoremas e demonstrações referentes a números reais tenham grande utilidade para o trabalho dos matemáticos, eles não são adequados ao trabalho de ensinar esse conteúdo na educação básica (BALL; BASS, 2003).

O caso dos números irracionais – e consequentemente dos números reais – é um entre vários exemplos de que existem diferenças importantes entre a matemática escolar e ciência de referência, no caso, a matemática acadêmica. Na educação básica, "número real é número, extensão dos números naturais; não é corte de Dedekind, classe de equivalência, ou sequência de intervalos" (MOREIRA; FERREIRA, 2012, p. 53). Além disso, quando a matemática acadêmica postula a existência dos números reais a partir do nada configura uma inversão de rota que entra em conflito com o processo que se desenvolve na escola, em que os números reais vêm estender a noção de número que começa com os naturais.

Essa diferença no tratamento dos números reais na formação do professor de matemática e na educação básica pode provocar o que Felix Klein chamou, no início do século XX[8], de 'dupla ruptura' no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Ao ingressar na universidade, o estudante entende que a matemática que agora deve aprender é

[8] Esse termo aparece no livro "Matemática elementar de um ponto de vista superior", que foi editado pela primeira vez em 1908 (GIRALDO, 2018). A edição que tivemos acesso foi: KLEIN, Felix. Elementary mathematics from an advanced standpoint. Londres: McMilliam and Co., 1932.

diferente daquela que aprendeu no ensino médio, e ele sente que precisa romper com a matemática escolar para aprender uma *nova matemática*. Ao concluir seus estudos e se tornar professor – considerando que aprendeu que números reais são cortes de Dedekind ou limites de sequências de Cauchy – terá que realizar uma segunda ruptura, dessa vez com a matemática acadêmica, retornando à matemática escolar, com o apoio do livro didático. O tratamento que o recém-formado professor dará ao assunto provavelmente não será diferente daquele que recebeu quando estudante, fechando um círculo vicioso (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

Para romper com esse círculo, a matemática ensinada na licenciatura precisa voltar-se menos para a pós-graduação e mais para a escola (BORTOLOSSI, 2017). Ou seja, é preciso romper com uma ideia corrente de que o conhecimento matemático deva ser trabalhado no processo de formação de professores predominantemente a partir dos valores da matemática acadêmica, em que "saber matemática torna-se meio e fim" (PEDRDOSA; LEITE; ARAGÃO, 2012, p. 172). Visto que matemática escolar e matemática acadêmica são *corpus* de saberes diferentes, torna-se premente que uma nova abordagem dos números irracionais/reais seja aplicada na formação dos professores de matemática, com olhar voltado para a matemática escolar, sem negligenciar, evidentemente, a importância dos meios próprios de se construir conhecimento da matemática acadêmica. Para Moreira e David (2010),

> É fundamental conceber o número real como número, o que faz uma grande diferença, porque, na escola, a ideia de número já possui uma história de elaboração e reelaboração. No processo de ensino-aprendizagem escolar essa história vem se desenvolvendo a partir do trabalho com os naturais e passa pelos inteiros, pelos racionais até chegar aos reais. Ao longo dela, o aluno se vê na condição de reelaborar esquemas cognitivos para, a cada etapa, acomodar a nova noção de número (p. 80).

O processo de reorganização do ensino de números irracionais na formação inicial do professor de matemática deve começar a partir dos saberes trazidos pelos estudantes, pois,

> Ao chegar à universidade, o aluno já passou por um longo processo de aprendizagem escolar e construiu para si uma imagem dos conceitos matemáticos a que foi exposto, durante o ensino básico. Assim, a formação do matemático demanda o aprofundamento da compreensão dos significados dos conceitos matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. O mesmo pode-se dizer em relação aos processos escolares em geral: o aluno chega ao ensino superior com uma vivência e um conjunto de representações construídas. É preciso que estes saberes também sejam considerados ao longo de sua formação como professor (BRASIL, 2001, p. 4).

Ao encontro da ideia de começar pelos saberes trazidos pelos estudantes, trazemos Soares, Ferreira e Moreira (1998), para os quais as representações conceituais[9] já existentes entre os licenciandos deveriam ser o ponto de partida para a construção de uma nova abordagem dos sistemas numéricos, especificamente voltada para a formação de professores. O ponto de chegada seria a formação de uma "visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que efetivamente instrumentalize para o ensino na educação básica" (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, p. 95).

Em nossa pesquisa de doutorado (BROETTO, 2016), realizamos um trabalho de natureza qualitativa e com intervenção em sala de aula, cujos sujeitos foram os ingressantes do 1º período de uma turma de licenciandos de matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória. Para detectar os conhecimentos trazidos pelos estudantes, começamos a pesquisa com a aplicação de dois questionários sobre números racionais e irracionais. Utilizando como referencial teórico principal a imagem do conceito, desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner (TALL; VINNER, 1981), constatamos que os conhecimentos prévios dos licenciandos – as imagens conceituais construídas na educação básica – são bastante frágeis, superficiais, decoradas e desconectadas de outros saberes/conhecimentos.

Na sequência, realizamos atividades individuais como uma entrevista inicial e uma entrevista final, e atividades em grupos visando a discussão de propriedades e situações diversas relacionadas aos números reais/irracionais, como a incomensurabilidade, medida de segmentos e equivalência de definições. Além disso, com o objetivo de levar a matemática acadêmica até a escola e, ao mesmo tempo, contribuir com a formação do conhecimento pedagógico do conteúdo dos licenciandos, realizamos atividades em que eles foram estimulados a pensarem e agirem como professores, como a correção de questões, análise de livros didáticos e formulação de problemas (SHULMAN, 1986; MOREIRA; DAVID, 2010; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998; BALL; BASS, 2003).

Identificamos, no decorrer e após as atividades descritas anteriormente, imagens do conceito conflitantes para número racional e irracional, a predileção pelo uso de imagens ao invés de definições e a proximidade desse conhecimento ao de uma compreensão

[9] Por representações conceituais, Soares, Ferreira e Moreira (1998) referem-se às imagens conceituais (ou imagens do conceito), constructo teórico capaz de lidar com a formação, transformação e manipulação de conceitos e definições matemáticas. Tall e Vinner (1981) definem a imagem do conceito como toda a estrutura cognitiva de um indivíduo – figuras mentais, processos e propriedades – relacionada a um determinado conceito.

instrumental (SKEMP, 1976). Citamos o caso da estudante Agatha como exemplo representativo de vários casos similares de conflitos entre imagens conceituais e definições encontrados em Broetto (2016). Detectamos que a licencianda associava número racional com representação fracionária, o que a levou a classificar $\sqrt{3}/2$ e $\sqrt{5}/2$ como números racionais. Quando o número estava em notação decimal, Agatha associava corretamente as dízimas periódicas com os números racionais e as não-periódicas com os irracionais. Porém, como considerava possível uma fração representar uma dízima não periódica, considerou $-3/14$ e $13/23$ como números irracionais.

Ao final do trabalho, pudemos constatar que alguns alunos demonstraram pequenos avanços, como reformulações e/ou inclusões em sua imagem do conceito de número racional/irracional. Agatha, ao contrário, apresentou um aparente retrocesso, principalmente no que diz respeito à definição de números racionais e irracionais. No início da pesquisa, apuramos que ela definia número irracional como “aquele que tem dízima não-periódica”, o que está correto do ponto de vista matemático e, inclusive, é uma das definições mais frequentes nos livros didáticos de matemática da educação básica. Porém, ao final da pesquisa, ela disse que “irracionais são números que, quando estão em forma de fração, são dízimas não-periódicas”.

Apesar do aparente retrocesso, entendemos que essa definição, apesar de errada do ponto de vista matemático – já que um número irracional não pode ser escrito em forma de fração – essa definição é coerente com as classificações que a licencianda fez de $-3/14$ e $13/23$ como números irracionais. Descobrimos, durante a entrevista final, que Agatha dividiu o numerador pelo denominador, em busca da representação decimal, e, como não enxergou o período desses números, que são grandes – foi uma escolha intencional nossa – classificou-os como irracionais. A arrumação das imagens conceituais de Agatha, bem como suas definições, mostraram-se claramente abaladas pela nossa pesquisa e, na entrevista final, ela parecia mais confusa do que na entrevista inicial. Constatamos que ela e alguns colegas precisavam de mais tempo e de outras tarefas matemáticas que os ajudassem a refazer as imagens conceituais que tinham de número racional, de divisão, de como identificar um padrão no quociente ao dividir numerador pelo denominador e passar de fração para dízima.

Segundo Tall e Schwarzenberger (1978), é fácil ver que toda fração m/n, com m e n inteiros, representa uma dízima periódica. Procedendo a divisão, as possibilidades para o resto são limitadas, $1, 2, \ldots, n-1$, e, em um dado momento, necessariamente os cálculos começarão a se repetir e aparecerá uma dízima periódica. Para esses autores, a recíproca é muito mais profunda, isto é, que toda dízima periódica representa uma fração de inteiros. Em nossa pesquisa, percebemos o contrário. A maioria dos participantes não tem dúvidas que uma dízima periódica representa uma fração de inteiros, mas muitos, inclusive Agatha, apresentaram dificuldades em entender que toda fração de inteiros representa, necessariamente, uma dízima periódica. Entendemos que isso é provavelmente um reflexo da abordagem dos livros didáticos brasileiros. É muito comum apresentar a fórmula ou procedimento para se obter fração geratriz e, quanto ao contrário, ou seja, da fração para a obtenção da dízima periódica, apresenta-se a divisão, porém quase sempre com denominadores pequenos e sem explicar a ligação dos restos com o aparecimento da dízima periódica. Isso explicaria o comportamento de Agatha, por exemplo, que não está segura de que uma fração de inteiros é sempre uma dízima periódica.

Do ponto de vista da ação didático-pedagógica, detectar a imagem dos conceitos matemáticos construídas pelos estudantes é importante, pois quando são ignoradas no processo de ensino, podem se transformar em obstáculos para a aprendizagem (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, 1999). Shulman (1986) também aponta para a necessidade do conhecimento das concepções e preconcepções trazidas pelos alunos, frequentemente equivocadas, que demandarão que os professores criem estratégias frutíferas para reorganizar o entendimento dos aprendizes. Porém, trabalhar a partir das imagens construídas pelos estudantes não é algo simples, visto que elas são “psicologicamente resistentes” (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995); isto é, não são facilmente substituíveis por outras imagens. Soares, Ferreira e Moreira (1998) explicam a dinâmica do funcionamento da imagem do conceito quando os alunos são expostos a uma definição formal apresentada pelo professor.

> É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na Universidade. De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definição formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito, recorrendo a uma ou outra dessas representações, dependendo das circunstâncias (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1998, p. 97).

Portanto, apenas expor os licenciandos a definições matemáticas rigorosas, não garante que aquele conteúdo será ensinado adequadamente na educação básica. O tratamento rigoroso conferido a esse assunto pela matemática acadêmica não condiz com os saberes docentes necessários para abordar números reais/irracionais em um contexto de matemática escolar. E mesmo que seja realizada uma abordagem que busca aproximação com a matemática escolar, como ambicionamos realizar em nossa pesquisa, o caminho será longo e árduo, pois parece que, mesmo nesses casos, permanecem válidas as colocações de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) a respeito da resistência das imagens conceituais. A reconstrução dessas imagens não é uma tarefa que pode ser finalizada em uma única pesquisa ou em uma única disciplina, mas como resultado de um esforço conjunto de todos – matemáticos e educadores matemáticos – em diversos momentos ao longo de toda a formação inicial.

Considerações finais

À guisa de conclusão, pensamos que a licenciatura em matemática deveria estreitar seus laços com a educação básica. Para atingir o conhecimento de conteúdo da forma como proposto por Shulman (1986; 1987), Ball e Bass (2003), Ball, Thames e Phelps (2008) e aproximar a matemática acadêmica da matemática escolar (FIORENTINI, 2005; MOREIRA; DAVID, 2010), entendemos que seria preciso colocar em prática as orientações das diretrizes para a formação de professores que já existem (BRASIL 2001; 2002; 2010), e inserir os problemas e as especificidades dos saberes da escola na formação acadêmica do professor de matemática. Seria preciso discutir na licenciatura, com base nos resultados de pesquisas acadêmicas e nos saberes docentes de quem ensina matemática na educação básica, questões relacionadas com o ambiente escolar, com as dificuldades dos alunos em determinados tópicos e as estratégias adotadas pelos professores para contornar diversas situações, entre outras questões. Assim, poder-se-ia criar condições para que os licenciandos desenvolvam, começando desde sua formação inicial, o verdadeiro arsenal de representações citado por Shulman (1986).

No caso dos números reais/irracionais, defendemos a necessidade de uma abordagem do assunto na licenciatura em matemática visando a futura prática do docente na educação básica. A matemática acadêmica tende a valorizar as estruturas ao invés da natureza dos objetos. Dessa forma, postular a existência de um corpo ordenado completo e identificar esse conjunto com $\mathbb{R}$ não atende às necessidades da formação do professor para o (futuro) trabalho na escola. Na visão de Ball e Bass (2003), com a qual concordamos, muitos professores não têm um conhecimento matemático que seja útil para o ensino.

Em nossa pesquisa, constatamos que o cenário pode ser ainda pior e, mesmo realizando a dupla ruptura e abandonando uma abordagem mais formal dos números reais, o futuro professor de matemática pode ter dificuldades com a matemática básica escolar se suas imagens conceituais conflitantes e/ou incoerentes não forem detectadas e trabalhadas apropriadamente ao longo de sua formação inicial. Defendemos a criação de uma abordagem completamente nova, antenada com o conceito de número real da matemática escolar, como apontam Soares, Ferreira e Moreira (1999),

> Deve ser construída uma nova abordagem dos sistemas numéricos, especificamente voltada para a formação de professores. Tal abordagem deveria partir da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que efetivamente instrumentalize para o ensino na educação básica (p. 95).

Para isso, a escola precisa ser parte efetiva nas discussões relativas à formação de professores de matemática. Como os saberes docentes também se constroem na prática, professores de matemática da educação básica também precisam ter suas experiências com o ensino de números reais levadas para o centro dos debates realizados em ambientes de formação de professores de matemática. Reconhecemos que tratar os números reais/irracionais nos cursos de licenciatura em matemática de forma articulada com a matemática escolar requer grandes esforços de diversos atores do campo educacional, e pode se mostrar um caminho longo e difícil. Todavia, acreditamos que esse tipo de trabalho tem boas perspectivas para propiciar ao futuro professor a criação de um arsenal de métodos, técnicas, exemplos, contraexemplos, material concreto e tecnologia para trabalhar com esse tema, conforme proposto por Shulman (1986).

Referências

BALL, D.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: **Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**, 2003, Edmonton: CMESG/GCEDM, 2003. p. 3-14. Disponível em: http://eric.ed.gov/?id=ED529557 .

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407. 2008.

BORTOLOSSI, H. J. A formação nas universidades do professor de matemática para a escola básica: o que é realmente preciso e prioritário? In: **Colóquio do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense**, 2017, Niterói. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=FSzSetkZLq0.

BRASIL. **Referenciais curriculares nacionais dos cursos de bacharelado e licenciatura**. Brasília: Secretaria de Educação Superior, 2010.

BRASIL. **Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica**. Brasília: Conselho Nacional de Educação, 2002.

BRASIL. **Diretrizes curriculares para cursos de matemática**. Brasília: Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Superior, 2001.

BROETTO, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**. 2016. 417 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. **Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática:** uma abordagem direcionada à sala de aula. Vitória: Edifes, 2017. Disponível em: https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/362.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. O ensino de números irracionais na educação básica e na licenciatura em matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 33, n. 64, p. 728 – 747. 2019.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177–229. 1990.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas,** Campinas, n. 18, p. 107–115. 2005.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, n. 29, p. 29 – 44. 1995.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. **Ciência e Cultura**, São Paulo, vol. 70, n.1, p. 37 - 42. 2018.

LEIVAS, J. C. P.; CURY, H. N. Transposição didática: exemplos em educação matemática. **Educação Matemática Em Revista – RS**, Rio Grande, v. 1, n. 10, p. 65–74. 2009.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. O que é número real? Os números reais na formação do professor de matemática. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. (Orgs.). **Formação do professor de matemática:** reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: IPR, 2012. p. 49–94.

PAIS, L. C. Transposição didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012. p. 11-47.

PEDROSA, E. M. P.; LEITE, L. S.; ARAGÃO, R. M. R. Formação profissional do professor de matemática: saberes essenciais que emergem de relatos docentes. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v.8 – nº 16, p.159 -173. 2012.

SANT'ANNA, D.; BITTENCOURT, J.; OLSSON, S. Transposição e mediação didática no ensino de frações. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 20, n. 27, p. 1–18. 2008.

SCHEIBE, L. A formação pedagógica do professor licenciado - contexto histórico. **Perspectiva**, v. 1, n. 1, p. 31–45. 1983.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1–22. 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4–14. 1986.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20–26. 1976.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 12, p. 95–117. 1999.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Números racionais e reais:** as concepções dos alunos e a formação do professor. Belo Horizonte: UFMG/SPEC/CAPES, 1998.

TALL, D.; SCHWARZENBERGER, R. Conflicts in the learning of real numbers and limits. **Mathematics Teaching**, n. 82, p. 44–49. 1978.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151–169. 1981.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

Recebido em: 14 de novembro de 2020.

Aprovado em: 13 de dezembro de 2021.