Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática

VICENÇ FONT*

Resumen

El trabajo que presentamos es fundamentalmente una reflexión de tipo filosófico sobre la relación entre las matemáticas y las cosas, es una mirada realizada desde la perspectiva de la educación matemática. Los diversos enfoques que se han propuesto en la didáctica de las matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) Una metodología de investigación. Si un programa de investigación problematiza y se posiciona explícitamente sobre cuestiones de ontología y de epistemología general, diremos que se trata de un programa de investigación global, si problematiza la naturaleza de las matemáticas hablaremos de programa semi-local y si sólo se posiciona en los últimos tres puntos hablaremos de programa local.

Palabras claves: *didática da matemática; educação matemática; ontologia e epistemologia.*

Abstract

This work is mainly philosophical; we raise some points about the relationship between things and mathematics based on a mathematics education perspective.

The different points of view that have been proposed in didactics of mathematics are implicitly or explicitly based on the following aspects: 1) A general ontology, 2) A general epistemology, 3) A theory about the nature of mathematics, 4) A general theory about teaching and learning and about mathematics in particular, 5) A definition of the object of didactics of mathematics, and 6) A methodology of investigation. If a program of investigation explicitly emphasizes questions about general epistemology and ontology, we will refer to it as a global investigation program; if the emphasis is on the nature of mathematics we will say that it is a semi-local program; and if a program is based on the last three points, it will be called a local program.

Key-words: *didactics of mathematics; mathematics education; ontology and epistemology.*

* Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona. E-mail: vfont@d5.ub.es

Introducción

En nuestra opinión, los diversos enfoques que se han propuesto en la didáctica de las matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) Una metodología de investigación. Si un programa de investigación problematiza y se posiciona explícitamente sobre cuestiones de ontología y de epistemología general, diremos que se trata de un programa de investigación global (puntos 1 y 2), si problematiza la naturaleza de las matemáticas hablaremos de programa semilocal (punto 3) y si sólo se posiciona en los últimos tres puntos hablaremos de programa local. En Font (2002) analizamos el posicionamiento sobre estos seis puntos de algunos de los principales programas de investigación en didáctica de las matemáticas: el enfoque cognitivo, el constructivismo radical, el constructivismo social, el enfoque sistémico, el enfoque antropológico, el enfoque semiótico y el enfoque crítico.

El hecho de que los diferentes programas de investigación se posicionen explícitamente o bien implícitamente sobre la naturaleza de las matemáticas conlleva que, para una parte de los investigadores en didáctica de las matemáticas, una preocupación central haya sido la clarificación de la propia naturaleza de las matemáticas, realizando investigaciones propias de la filosofía de las matemáticas.

A continuación se exponen algunos puntos de vista sobre la relación entre las matemáticas y las "cosas" y se comentan algunas implicaciones sobre los modos de enseñar matemáticas que de ellos se derivan. Si bien el trabajo que presentamos es fundamentalmente una reflexión de tipo filosófico sobre la relación entre las matemáticas y las cosas, es una mirada realizada desde la perspectiva de la educación matemática.

Distintas concepciones sobre la relación entre las matemáticas y las cosas

Un hecho ampliamente aceptado en el campo de la educación matemática es que las concepciones de los profesores, y de las instituciones escolares, sobre la naturaleza de las matemáticas influye en su enseñanza. También está ampliamente aceptado que no es el único factor a tener en cuenta ya que hay otros que también son muy importantes como, por ejemplo, las concepciones pedagógicas y psicológicas de tipo general. A continuación se realiza un recorrido por algunos puntos de vista sobre la relación entre las matemáticas y las "cosas" y se comentan algunas de sus implicaciones didácticas

De las teorías acabadas a la praxis

Las matemáticas se pueden considerar como una determinada organización de los productos de la actividad matemática. Esta organización no es estática sino que va evolucionando históricamente.

El análisis de las diferentes organizaciones de los productos de la actividad matemática, según el positivismo lógico, se puede hacer desde un punto de vista interno (contexto de justificación) o bien desde un punto de vista externo (contexto de descubrimiento). El contexto de justificación tendría que ver con los criterios metodológicos normativos subyacentes a la ciencia y, consiguientemente, podría ser objeto de un análisis *a priori* y metacientífico, mientras que los procesos de descubrimiento deberían ser objeto de los estudios de historiadores, sociólogos y psicólogos de la ciencia, en tanto que interesados en la descripción *a posteriori* de aspectos diversos vinculados a la actividad científica. Actualmente, después de un largo proceso, se ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia que han dejado de centrarse en las teorías y han pasado al análisis de las prácticas. Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división propuesta por el positivismo lógico.

Las prácticas matemáticas, también llamadas actividad matemática, se pueden considerar tanto como una actividad social (institucional) como una actividad individual. La actividad matemática se puede considerar como un conjunto de prácticas realizadas en el seno de una institución, o bien como la actividad que desarrolla un sujeto individual. La sociología del conocimiento explica cómo se genera la actividad personal a partir de las instituciones y cómo la actividad institucional se genera a partir de la actividad de los miembros de la institución.

En nuestra opinión, la actividad matemática (personal e institucional) se puede considerar como una manipulación de ostensivos acompañada de pensamiento en el que se manipulan símbolos mentales. Por este motivo, siguiendo a Heidegger (1975), consideramos que la actividad matemática es una determinada manera de pensar sobre las "cosas". Los diferentes puntos de vista sobre las matemáticas que se han ido proponiendo a lo largo de la historia polemizan tanto sobre el tipo de "cosas" como sobre la "manera de pensar" sobre estas "cosas".

Respuestas clásicas

1) El "pensamiento matemático" se puede entender como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que no depende de las "cosas" o bien como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que sí depende de las "cosas".

Una de las clasificaciones que ha generado la lógica es la que distingue entre juicios universales y particulares. Las afirmaciones matemáticas suelen tener la forma de juicios generales. Las afirmaciones generales son muy útiles porque nos permiten hacer predicciones. Por ejemplo, podemos predecir que si calentamos agua a más de 100° entrará en ebullición, o bien que los ángulos formados por tres torres suman 180°. A los juicios que nos aportan información sobre las "cosas" como árboles, sillas, etc. se les llama juicios "sintéticos". Los juicios sintéticos se distinguen de otra clase de afirmaciones generales, como por ejemplo, el juicio "todos los solteros no son casados". Este juicio no parece de gran utilidad, pues si queremos saber si un hombre es soltero, debemos primero saber si está casado o no; y una vez que lo sabemos el juicio no nos dice nada más. La implicación no agrega nada a la condición expuesta en ella. Los juicios de esta clase, para muchos lógicos son vacíos, y no aportan información. Este tipo de juicios recibe el nombre de "analíticos". Si nos preguntamos cómo podemos averiguar si una afirmación general es verdadera, observamos que por lo que respecta a las implicaciones analíticas, esta cuestión se resuelve fácilmente. La implicación "todos los solteros no son casados" no es sino una consecuencia de la palabra "soltero". Pero sucede una cosa diferente con los juicios sintéticos del tipo "todos los metales se dilatan". El significado de las palabras "metal" y "caliente" no incluye ninguna referencia a la dilatación. La implicación puede, por lo tanto, comprobarse sólo por medio de la observación. Los juicios sintéticos tales que su verdad depende de la experiencia se llaman "sintéticos *a posteriori*".

Se puede considerar que afirmaciones matemáticas del tipo "los ángulos formados por tres torres suman 180°" son analíticas y que no informan sobre las cosas de nuestra experiencia, o bien considerar que son sintéticas (informativas), en este último caso ¿su verdad depende de la experiencia? Esta pregunta se puede responder afirmativamente o negativamente. Si se responde negativamente tenemos que, por una parte, la afirmación "los ángulos de un triángulo suman 180°" se considera un juicio sintético que informa sobre las cosas del mundo físico, ya que de él podemos deducir que "los ángulos formados por tres torres suman 180°", y, por otra parte, tenemos que su verdad no depende de la experiencia, ya que no resulta de una generalización de nuestras experiencias en la medición de los ángulos de un triángulo, ni puede ser refutada por el hecho de encontrar un triángulo tal que sus ángulos no sumen 180°. De hecho, la verdad de esta afirmación se demuestra a partir de los axiomas por razonamiento.

Si se considera que las afirmaciones matemáticas son juicios sintéticos que no dependen de la experiencia – son *a priori* y no *a posteriori* –, se esta defendiendo que la razón humana tiene capacidad de descubrir propiedades generales de los objetos físicos independientemente de la experiencia y se tiene que explicar cómo la razón puede descubrir la verdad sintética. Una de las primeras explicaciones se debe a Platón.

2) La dependencia respecto de las "cosas", históricamente se ha entendido de diferentes maneras. La primera explicación es la platónica y consiste en considerar que hay unas determinadas "cosas" que son entidades ideales existentes objetivamente, diferentes de las cosas como los árboles, sillas, etc., que forman un mundo trascendente que podemos intuir merced a una cierta facultad intelectual, de manera análoga a como nuestros cinco sentidos nos permiten percibir objetos físicos.

Platón dice que además de las cosas físicas hay otra clase de cosas que él llama "ideas". Existe la idea de triángulo, de paralelas o de círculo, además de las correspondientes figuras trazadas sobre el papel. Las ideas son superiores a los objetos físicos, muestran las propiedades de estos objetos de un modo perfecto, y por ello sabemos más sobre los objetos físicos mirando sus ideas que mirando los objetos mismos. Estos, dice él, participan de los objetos ideales en forma tal que muestran las propiedades de los objetos ideales de un modo imperfecto. Según Reichenbach (1951) la teoría de las ideas de Platón se puede considerar como un intento para explicar la naturaleza aparentemente sintética de las matemáticas. Las propiedades de los objetos ideales nos son reveladas por actos de visión intuitiva y de este modo adquirimos un conocimiento de las cosas reales. La visión intuitiva de las ideas se considera como una fuente de conocimiento comparable a la observación de los objetos reales, pero superior a ella por el hecho de que revela propiedades "necesarias" de sus objetos. La observación sensorial no puede darnos la verdad infalible, pero la visión intuitiva sí. Por los "ojos de la mente" vemos que dados dos puntos, es posible dibujar una única recta. El hecho de que esta afirmación se nos presenta como una verdad infalible, no puede derivarse de observaciones empíricas, sino que nos es dado por un acto de visión intuitiva que podemos realizar aunque tengamos cerrados los ojos. Es importante remarcar que, para Platón, los actos de visión intuitiva pueden suministrar conocimiento sólo porque los objetos ideales existen con independencia de las personas. Esta manera de entender la existencia es indispensable para él.

Platón introduce un mundo trascendente de ideas platónicas que está fuera de la mente de las personas. Su existencia es independiente de las personas (consideradas individualmente y colectivamente). Esta manera de considerar la existencia es la esencia del platonismo actual. Según la concepción platonista actual, los objetos matemáticos son reales, y su existencia un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos. Su existencia se halla fuera del espacio y del tiempo de la existencia física. Toda cuestión provista de significado que pueda hacerse al respecto de un objeto matemático tiene respuesta definida, seamos o no capaces de determinarla. Para el platonismo, los matemáticos nada pueden inventar, porque todo está ya presente. Todo cuanto pueden hacer es descubrir. Según el platonismo tenemos una facultad mental que nos permite intuir ciertas verdades como evidentes y, a partir de ellas, siguiendo demostraciones rigurosas podemos llegar a resultados que, de entrada, permanecen ocultos.

Frege, Russel, Gödel, Thom, Penrose y muchos otros, en algún momento de su trayectoria intelectual han sido defensores de algún tipo de platonismo. En 1884, Frege publica *Fundamentos de Aritmética*, obra en la que distingue el mundo objetivo de los conceptos del mundo subjetivo que es perceptible por los sentidos:

> (...) el número es un objeto de la psicología o un resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte. La objetividad del mar del Norte no viene afectada por el hecho de que dependa de nuestro arbitrio qué parte de toda la superficie de agua en la tierra delimitemos y cubramos bajo el nombre de "mar del Norte". Éste no es motivo para querer estudiar este mar por vía psicológica. (Frege, 1998, p. 23)

En 1901, Russell escribía:

> El número 2 debe ser de todos modos una entidad, que tendría una entidad ontológica, aunque no esté en ningún espíritu (...) La aritmética debe ser descubierta en el mismo sentido que Colón descubrió las islas occidentales y nosotros no creamos los números ni él creó a los indios. (Apud Omnès 2000, p. 146)

Thom, en 1971, escribe:

> Habida cuenta de todo, los matemáticos deberían tener el valor de sostener sus convicciones más profundas y afirmar, por tanto, que las formas matemáticas tienen existencia independiente de la mente que las está contemplando... A pesar de ello, en un instante dado cualquiera, la visión que tienen los matemáticos de este mundo de ideas es tan solo incompleta y fragmentaria. (Apud Davis y Hersh 1988, p. 236)

Por su parte, Gödel, en sus ensayos inéditos, escribe:

> Por otro lado, la segunda alternativa, en la que existen proposiciones matemáticas absolutamente indecidibles, parece refutar la

> concepción de que la matemática (en cualquier sentido) es sólo nuestra propia creación. Pues el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas, ya que ellas no pueden tener más propiedades que aquellas que él les ha dado. Así, esta alternativa parece implicar que los objetos y hechos matemáticos, o al menos algo en ellos, existen objetiva e independientemente de nuestros actos mentales y decisiones, es decir supone alguna forma de platonismo o "realismo" respecto a los objetos matemáticos. (Gödel 1994, p. 156)

Penrose, en 1989, en *La mente del emperador* también aboga por un cierto de tipo de platonismo: "En este capítulo he argumentado que tales ideas 'infusas' tendrían algún tipo de existencia intemporal, independientes de las nuestras terrenales" (p. 135).

El platonismo entiende las matemáticas como una determinada manera de pensar sobre las cosas del mundo platónico. Las características de este modo de pensar son, entre otras: 1) los objetos producidos (descubiertos) en la actividad matemática son objetos intemporales, 2) las relaciones y propiedades de estos objetos son verdaderas ya que pueden ser demostradas por una prueba lógica a partir de unas verdades que se captan intuitivamente (axiomas). Desde esta perspectiva, el proceso de producción de los objetos matemáticos y su organización en teorías que tienen una evolución histórica no se considera muy relevante ya que, en definitiva, es un descubrimiento de objetos y propiedades preexistentes. Lo que realmente interesa es la demostración de la verdad de las proposiciones de las teorías matemáticas entendida como demostración lógica a partir de los axiomas.

La repercusión de este punto de vista sobre la enseñanza de las matemáticas es la siguiente: considera que se tienen que enseñar teorías acabadas organizadas deductivamente. Entre las muchas y diferentes implicaciones de este punto de vista destacan: 1) la separación de las teorías acabadas de los problemas que las originaron, los cuales no juegan ningún papel importante en su organización. 2) las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente "neutras" ya que se consideran como diferentes significantes de objetos matemáticos ahistóricos. El efecto que producen las diferentes representaciones ostensivas en la producción de sentido es un tema que no preocupa en demasía a la concepción platónica, ya que este posible efecto corresponde al "contexto de descubrimiento" y no al "contexto de justificación". Desde un punto de vista didáctico, el platonismo tiende a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la producción de sentido (Font y Peraire 2001).

3) Se puede considerar el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que sí depende de las "cosas" de nuestra experiencia como árboles, piedras, etc. En su versión fuerte o "empírica", dice que las matemáticas es una ciencia que depende de las "cosas" como los árboles, sillas, etc exactamente igual a como dependen de ellas las ciencias experimentales.

Los empiristas sostenían que todo conocimiento, exceptuando el conocimiento matemático, es consecuencia de la observación. Para resolver la paradoja de que por una parte las matemáticas se aplican a la realidad y por la otra sus resultados no parecen depender de la observación, optaron por diferentes soluciones. Según Davis y Hersh (1988), Locke consideraba el conocimiento matemático como absolutamente seguro, por ser sintético y, por lo tanto, lo distinguía del conocimiento empírico. Las proposiciones necesarias eran, según él, "fútiles" o "instructivas", distinción por medio de la cual, al parecer, anuncia la distinción kantiana entre proposiciones analíticas y sintéticas y que, si se interpreta de este modo, lo convertiría en partidario de la síntesis *a priori*. Si bien Locke acepta el principio de que todos los conceptos, aun los de las matemáticas y la lógica, se incorporan a nuestra mente a través de la experiencia; no está dispuesto a ampliarlo hacia la tesis de que todo conocimiento sintético adquiere su valor a partir de la experiencia. Ampliación que si llevó a cabo Mill al proponer una teoría empirista del conocimiento matemático que afirmaba que las matemáticas son una ciencia natural no diferente de las demás. Por ejemplo, sabemos que $6+3 = 9$, porque observamos que al reunir un montón de 6 manzanas con otro de tres obtenemos un montón de 9.

Hume no acepta la solución sugerida por Locke y sólo admite como sintético el conocimiento que depende de la experiencia. Para Hume las matemáticas y la lógica son analíticas ya que no dependen de la experiencia. Hume entiende que la "dependencia" quiere decir no sólo que los conceptos tienen su origen en la percepción sensible, sino también que la percepción sensible es la base de la validez de todo conocimiento no analítico. Para Hume, la adición suministrada al conocimiento empírico por la inteligencia es de naturaleza vacía. La solución de Hume de considerar que el pensamiento matemático no informa sobre las cosas de nuestra experiencia porqué son verdades analíticas que no dependen de ella, al no conocer aún las geometrías no-euclidianas, no podía explicar la doble naturaleza de la geometría de la época, tanto como producto de la razón como predictor de observaciones, por lo que su punto de vista tuvo que esperar al positivismo lógico del siglo XX para desarrollarse.

En *A System of Logic ratiocinative and inductive* publicada por primera vez en 1843, John Stuart Mill sostiene una concepción claramente empírica de la lógica y las matemáticas. Mill considera que las ciencias matemáticas no están fundadas completamente sobre verdades necesarias, sino solamente sobre hipótesis y sobre algunos axiomas que constituyen generalizaciones de la experiencia. Para Mill, las hipótesis son deformaciones de los objetos reales, en donde algunas circunstancias son omitidas o exageradas (por ejemplo, línea sin anchura, etc.); en cambio los axiomas (por ejemplo, "dos líneas rectas no pueden contener un espacio") son verdades inductivamente adquiridas sobre la base de la experiencia y mediante un paso al límite.

Los trabajos de Mill y en general lo que se llamó "psicologismo" fueron duramente criticados primero por Frege y después por Husserl, por lo que han tenido que esperar a la aparición del naturalismo en filosofía de la ciencia para ser debidamente valorados. Por psicologismo se entiende la teoría epistemológica que pretende explicar los resultados de las ciencias formales por las estructuras psicológicas de las personas, las cuales en última instancia son los resultados azarosos de un proceso evolutivo natural.

El punto de vista que propone Mill es que las matemáticas son el producto de una determinada manera de pensar sobre las cosas de nuestra experiencia que es la misma que tienen la física o la química. Su propósito era mostrar que las matemáticas eran una ciencia inductiva. El punto de vista de Mill presentaba muchos puntos débiles, el primero es que las ciencias experimentales no funcionan por el método inductivo; el segundo es que tampoco lo hacen las matemáticas, y el tercero es que sólo tiene en cuenta aspectos psicológicos y no considera aspectos sociales. A pesar del poco éxito que tuvo su propuesta, tiene aspectos interesantes. Uno de ellos es que, tal como remarca Bloor (1998), el enfoque de Mill está claramente relacionado con ideas educativas.

Según Bloor (ibid.), la idea fundamental de Mill es que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. Algunas de esas experiencias caen bajo categorías que constituirán más tarde las distintas ciencias empíricas; así, por ejemplo, el hecho de que los metales se dilaten pertenece a la física. Paralelamente a este tipo de hechos referentes a ámbitos bastante estrechos, también tenemos conocimiento de hechos que se aplican indiferentemente a ámbitos muy amplios; por ejemplo, existen múltiples colecciones de objetos que pueden ser ordenados y clasificados, organizados según ciertas pautas o series, agrupados o separados, alineados o intercambiados entre si, etc. Es esta categoría de hechos la que Mill piensa que subyace a las matemáticas. El agrupamiento y la organización de objetos físicos suministran modelos para nuestros procesos mentales, de modo que cuando pensamos matemáticamente estamos apelando tácitamente a ese saber. Los procesos de razonamiento matemático no son sino pálidas sombras de las operaciones físicas con objetos, y ese carácter forzoso que tienen los pasos de una demostración y sus conclusiones reside en la necesidad propia de las operaciones físicas que subyacen como modelos. Si el campo de aplicación de los razonamientos aritméticos es tan vasto se debe a que podemos, con mayor o menor dificultad, asimilar a esos modelos una gran variedad de situaciones diferentes.

En Mill se encuentran ideas sobre la enseñanza de las matemáticas que hoy son ampliamente aceptadas. Mill consideraba que en la enseñanza de las matemáticas hay que rechazar la manipulación formal de símbolos escritos en beneficio de las experiencias físicas subyacentes que les correspondan. Sólo éstas pueden dar sentido a las manipulaciones simbólicas y proporcionar un significado intuitivo a las conclusiones que se obtengan. Sin duda la perspectiva de Mill apunta elementos interesantes. Los objetos físicos, las situaciones y las manipulaciones pueden funcionar claramente como modelos de las diversas operaciones matemáticas básicas. Las experiencias de tales operaciones físicas pueden plausiblemente presentarse como la base empírica del pensamiento matemático. Las ideas de Mill apuntan hacia una enseñanza de las matemáticas basada en la exploración del alumno.

4) La no-dependencia de las "cosas" de nuestra experiencia como los árboles, sillas, etc. se puede entender sin recurrir a un mundo platónico. La primera consiste en considerar que el pensamiento matemático no informa sobre este tipo de cosas porque son verdades analíticas que no dependen de la experiencia.

La crisis de fundamentos ocurrida en las matemáticas a finales del siglo pasado se intentó resolver primeramente por medio del programa logicista. Este programa fue iniciado por Frege en su intento de dotar a la aritmética de unos fundamentos seguros. Este objetivo estaba relacionado con la preocupación por el rigor en el análisis matemático surgida en el siglo XIX. La introducción por Cauchy del concepto de límite y la insistencia de Weierstrass en fundamentar el análisis en la teoría de los números reales fueron sólo los primeros pasos. Los números reales se definen en términos de sucesiones convergentes de números racionales y, puesto que los números racionales pueden definirse fácilmente en términos de números naturales, Frege se impuso la tarea de completar el proceso reductivo: definir los números naturales en términos puramente lógicos.

Frege considera que las verdades aritméticas son "analíticas" y *a priori*, y que serían a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría. Frege critica la idea de que los números son propiedades de las cosas externas ya que el número que adscribimos a las cosas depende de cómo las clasifiquemos previamente y esto depende de nuestros propósitos, y también critica la idea de que el número sea algo subjetivo. Frege en los *Fundamentos de Aritmética* define los números a partir de la relación de equinumerabilidad y considera que demuestra la tesis logicista, esto es: la reducción de la aritmética a la lógica, deduciendo los teoremas matemáticos por cálculo lógico.

Russell descubrió una paradoja lógica que afectaba profundamente la base de los *Fundamentos de Aritmética* de Frege. Russell y Whitehead intentaron completar el programa logicista iniciado por Frege, esto es probar que la matemática es una rama de la lógica porque toda ella puede derivarse de la lógica. Su obra *Principia Mathematica* empiezan como un tratado de lógica y progresa mediante operaciones lógicas y definiciones explícitas hasta dar todos los elementos fundamentales de las matemáticas sin que, en su opinión, sea posible señalar una línea de separación entre la lógica y las matemáticas que no sea totalmente arbitraria. Ello requiere dos reducciones: la primera es la definición de los términos matemáticos mediante términos lógicos y la segunda es la reducción de los teoremas matemáticos, mediante deducciones lógicas, a teoremas de la lógica. Las entidades primitivas en las que termina la reducción lógica, son las del cálculo proposicional, los cuantificadores y las variables del cálculo funcional. Los axiomas lógicos fundamentales para la reducción de los teoremas matemáticos son los axiomas del cálculo de predicados; dos reglas de inferencia lógica (sustitución y modus ponens) y los axiomas de infinitud, de selección y de reducibilidad.

El programa logicista se enfrentó a dificultades que muchos consideran insuperables. La primera tiene que ver con la tesis fundamental de su programa: "las matemáticas se pueden reducir a la lógica", mientras que la segunda tiene que ver con la suposición de que los axiomas de la lógica son evidentes para cualquier persona. Con relación a esta segunda dificultad hay que tener en cuenta que el logicismo, muy a su pesar, se vio obligado a aceptar unos axiomas que difícilmente encajan en esta versión. Por ejemplo, en relación al axioma de la reducibilidad los autores de los *Principia* en la introducción a la segunda edición dicen: "La justificación de este axioma es puramente pragmática: lleva a los resultados deseados y no a otros. Pero es claro que no es la clase de axioma del cual podamos quedar satisfechos" (apud Dou, 1970, p. 73). Con relación a la primera, hay diferentes objeciones. Una muy importante es que la teoría de los tipos o la reducción lógica del número natural suponen intuiciones previas que aunque se llamen lógicas son típicamente matemáticas.

Por otra parte, muchas personas consideran que el teorema de incompletitud de Gödel permite responder al desafió que formula Russell en el último capítulo de su *Introduction to Mathematical Philosophy* publicado en 1919:

> Si todavía hay quien no admita la identidad de la lógica y la matemática, podemos desafiarle a que nos muestre en qué punto de la cadena de definiciones y deducciones de los Principia Mathematica considera que concluye la lógica y comienza la matemática. Entonces quedaría patente que cualquier respuesta debe ser totalmente arbitraria. (Russell 1988, p. 171)

A partir de los teoremas de Gödel, parece razonable responder que la lógica no se extiende más allá de la teoría de la cuantificación.

Cuando se dice que la aritmética y, con ella, todos los llamados cálculos funcionales de orden superior, así como todas las versiones de la teoría de conjuntos, son esencialmente incompletos, se está admitiendo que esas teorías envuelven alguna noción, o más de una, de la que no cabe ofrecer una exhaustiva caracterización mediante el establecimiento de una serie de reglas de inferencia: y ésta parece constituir una buena razón para excluirlas del dominio de la lógica. Parece pues fuera de lugar afirmar la posibilidad de reducir toda la matemática a la lógica si, al mismo tiempo, hay que admitir que la lógica incluye dentro de si todos y cada uno de los diversos apartados de la matemática.

El segundo intento de superar la crisis de fundamentos fue el programa formalista iniciado por Hilbert. En esta concepción no hay objetos matemáticos (a diferencia del platonismo) solamente hay símbolos ostensivos. Para el formalismo extremo, lo único que hay son reglas mediante las cuales se pueden deducir fórmulas a partir de otras, pero las fórmulas no se refieren a nada; son nada más ristras de símbolos que no tienen significado, y tampoco tienen asignado valor de verdad. El primer objetivo del programa formalista es la "completa formalización" de un sistema deductivo. Esto implica la extracción de todo significado de las expresiones existentes dentro del sistema: se las debe considerar, simplemente, como signos vacíos. La forma en que se deben manipular y combinar estos signos ha de ser plasmada en un conjunto de reglas enunciadas con toda precisión. La finalidad de este procedimiento estriba en construir un sistema de signos (llamado un "cálculo") que no oculte nada y que solamente contenga lo que expresamente se haya puesto en él. Los postulados y los teoremas de un sistema completamente formalizado son "hileras" (o sucesiones de longitud finita) de signos carentes de significado construidas conforme a las reglas establecidas para combinar los signos elementales del sistema formar más amplios conjuntos. Además, cuando un sistema ha sido completamente formalizado, la derivación de teoremas a partir de los postulados se limita, simplemente, a la transformación (siguiendo la regla) de un conjunto de estas "hileras" en otro conjunto de "hileras". De esta manera se elimina el peligro de utilizar cualesquiera reglas no declaradas de razonamiento.

Una página entera cubierta con los signos "carentes de significado" de este tipo de matemáticas formalizadas permite formular declaraciones

 Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 3, n. 2, pp. 59-112, 2001

sobre su configuración y sobre sus relaciones. Puede uno decir que una "hilera" está compuesta de otras tres distintas, etc. Estas afirmaciones poseen, evidentemente, significado y pueden suministrar información importante acerca del sistema formal. Es preciso observar, no obstante, que tales declaraciones significativas acerca de un sistema matemático carente de significado (o formalizado) no pertenecen plenamente a dicho sistema. Pertenecen a lo que Hilbert denominó "metamatemáticas", o sea al lenguaje que se formula "acerca" de la matemáticas. Las declaraciones metamatemáticas son declaraciones acerca de los signos existentes dentro de un sistema matemático formalizado.

Un requisito esencial del programa formalista de Hilbert en su primitiva concepción era que las demostraciones de consistencia implicaran únicamente procedimientos que no hicieran referencia ni a un número infinito de propiedades estructurales de fórmulas ni a un número infinito de operaciones con fórmulas. Hilbert, al optar por admitir únicamente métodos finitistas en la metamatemática, en cierta manera acepta los planteamientos intuicionostas, pero en lugar de aplicarlos, como hacen estos, a las matemáticas, los reserva para la metamatemática.

La influencia del positivismo lógico fue determinante para el auge del formalismo en la filosofía de las matemáticas. El positivismo lógico abogaba por una ciencia unificada, codificada en un cálculo lógico formal y con un único método deductivo. Se sostenía que la formalización había de ser el objetivo a lograr en todas las ciencias. Formalizar significaba elegir un vocabulario de términos básicos, enunciar las leyes fundamentales mediante tales términos y desarrollar a partir de las leyes fundamentales una teoría por medio de la lógica. Por lo que toca a las propias matemáticas, éstas no son consideradas como una ciencia, sino como un lenguaje para las demás ciencias.

Hacia la mitad del siglo XX, el formalismo se convirtió en el punto de vista predominante en las instituciones universitarias. El formalismo contemporáneo, también llamado conjuntismo, es descendiente del formalismo hilbertiano, pero no es exactamente lo mismo. Este tipo de formalismo (Mosterin, 1980) considera que en la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar, como mínimo, tres estadios sucesivos, correspondientes a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba. En el primer estadio, llamado intuitivo o ingenuo, se prueban los enunciados de la teoría, pero no se dice ni de dónde parte la prueba ni cuáles son los procedimientos admisibles para probar. En el segundo estadio, llamado axiomático, se determina el punto de partida de la prueba, eligiendo ciertos enunciados de la teoría como axiomas y exigiendo que todos los demás sean probados a partir de ellos, aunque sigue sin explicitarse cuáles son los procedimientos o reglas o medios de prueba admisibles. En el tercer y último estadio, llamado formalizado, el concepto de prueba está completamente precisado y explicitado, tanto en lo que respecta al punto de partida de la prueba como a los medios de prueba permitidos.

A finales del siglo XIX se fundamenta toda la matemática sobre los números naturales y esta última sobre la teoría de conjuntos. La aparición de las paradojas lleva a la crisis de fundamentos de principios de siglo. Por un lado la matemática entera se fundamenta en la teoría de conjuntos y la lógica y por otro lado en la teoría intuitiva de conjuntos se descubren contradicciones que la hacen insostenible. Como respuesta a estas paradojas aparecen a principios de siglo tres respuestas diferentes: La respuesta de Brouwer que rechaza la lógica clásica y el infinito actual y postula una nueva lógica y una nueva matemática, dando lugar al intuicionismo. La respuesta de los *Principia* de Russell y Whitehead, que formula la teoría ramificada de los tipos, en la cual la eliminación de las contradicciones se obtiene al precio de una notable complicación técnica. Y la respuesta de Zermelo, consistente en axiomatizar la teoría de conjuntos con axiomas *ad hoc* que impidan la aparición de las contradicciones conocidas, conservando en lo posible la riqueza y agilidad de la teoría intuitiva de conjuntos. Aunque las dos primeras respuestas eliminan el peligro de caer en contradicciones de un modo mucho más seguro y radical, la corriente central de la matemática ha hecho suya la respuesta axiomática de Zermelo que hasta ahora no ha dado lugar a contradicciones.

La idea de Zermelo consiste en introducir un axioma que evita que puedan aparecer en la teoría conjuntos "demasiado grandes" (como el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos) que son los que pueden dar lugar a contradicciones. Además el sistema de Zermelo consta de otros 6 axiomas: el de extensionalidad, el del par, el de la gran unión, el del conjunto de las partes, el de elección y el de infinitud. Este sistema excluye, pues, los conjuntos peligrosos y garantiza al mismo tiempo la existencia de los conjuntos "inofensivos" necesarios al matemático: tanto el conjunto vacío como el de los números naturales existen, así como todos los que se puedan obtener a partir de ellos por formación sucesiva de la gran unión y el conjunto de las partes. De todos modos, pronto se descubrió que los 7 axiomas de Zermelo no bastaban para probar la existencia de algunos conjuntos deseables. Esta laguna fue rellenada por Fraenkel, que en 1922 introdujo el axioma del reemplazo (o "de sustitución"). El sistema resultante de añadir este nuevo axioma a los 7 de Zermelo se conoce desde entonces con el nombre de sistema ZF (Zermelo-Fraenkel). Además de esta axiomatización existen otras axiomatizaciones de la teoría de conjuntos como son las de NBG, Ackermann, Quine, Schoenflies, Tarski-Mostowski, etc.

Desde el punto de vista formalista, la pregunta por la verdad o la falsedad de los enunciados matemáticos no tiene sentido en el estadio axiomático, ya que lo más que podemos preguntar con sentido es por la consistencia o contradicción del sistema. En ninguna de las actuales axiomatizaciones de la teoría de conjuntos se han producido contradicciones; pero en ninguno de ellos ha podido probarse que no puedan producirse el día menos pensado.

En 1931, Gödel, en el artículo "Sobre sentencias formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines", muestra que no hay ningún sistema formal matemático con un número finito de axiomas del cual pueda desarrollarse la aritmética que sea completo; por el contrario, hay problemas relativamente simples de la aritmética de números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas y reglas. Para probarlo, lleva a cabo la aritmetización de la metamatemática partiendo de la asignación biunívoca de números naturales – números de Gödel – a los signos primitivos, sentencias y pruebas. De este modo, consiguió que unas proposiciones metamatemáticas acerca de un sistema formalizado de aritmética pudieran ser representadas por proposiciones aritméticas contenidas dentro del propio sistema. Este método le permitió construir una fórmula que resulta ser indecidible, puesto que ni la fórmula ni su negación son demostrables dentro del cálculo. Como quiera que una de estas dos fórmulas aritméticas debe codificar una verdad aritmética, ninguna de las cuales es, sin embargo, derivable de los axiomas, los axiomas son incompletos. La incompletitud es esencial en los sistemas formales que incluyan la aritmética, porque aunque se introduzca como axioma aquél que permita derivar la proposición indecidible surgirá otra proposición indecidible, y así sucesivamente. A este resultado se le suele denominar primer teorema de incompletitud. Gödel también muestra que es imposible obtener una prueba finitaria de consistencia para un sistema formal que pueda desarrollar la aritmética, que contenga formalizados todos los modos finitarios de prueba. A este resultado se le denomina el segundo teorema de incompletitud.

La repercusión del trabajo de Gödel dentro del área de la fundamentación matemática es difícil de exagerar aunque su impacto ha sido mayor sobre las cuestiones conceptuales que tienen que ver con los computadores y la mecanización, cuestiones que son una preocupación central en la tecnología actual. La incidencia del resultado de Gödel sobre las "escuelas" de filosofía de la matemática fue la siguiente: 1) El teorema de incompletitud significó para el logicismo de Russell y Whitehead el fracaso de su intento de construir un sistema lógico que permita incluir la aritmética. 2) Respecto al formalismo cabe destacar que Gödel demostró los límites internos de los sistemas formales al demostrar que la matemática es inagotable desde cualquier sistema formal: siempre contendrán verdades matemáticas indecidibles,

Desde el punto de vista filosófico, la herencia de Frege, Russell, el primer Wittgenstein y el positivismo lógico ha sido una escuela de filosofía analítica que sostiene que el problema central de la filosofía es el análisis referencial del significado y que el instrumento esencial para efectuarlo es la lógica. Este punto de vista considera que la filosofía de las matemáticas tiene por objetivo el estudio de las teorías formalizadas. Desde esta perspectiva sólo interesa lo que se llamó "contexto de justificación" y se relega a otras disciplinas el "contexto de descubrimiento".

Desde el punto de vista educativo la herencia del formalismo ha sido las matemáticas modernas, tanto en la enseñanza universitaria como no universitaria. A principios de los años 70 aparecen en España los nuevos programas de enseñanza primaria y secundaria que incorporan las matemáticas "modernas". La idea que los inspiraba era que la enseñanza de las matemáticas tenía que estar de acuerdo con el espíritu de la época, que creía que las matemáticas servían para estructurar el pensamiento y que eran el lenguaje de la ciencia. Podemos encontrar matemáticas en todas partes, se decía, pero no cualquier clase de matemáticas, sino las matemáticas de hoy en día: la teoría de conjuntos, las estructuras matemáticas, la probabilidad, la estadística, el álgebra, la topología, etc; y cuanto más pronto los alumnos entren en contacto con estas matemáticas, mejor.

Como ejemplo de este interés por introducir lo más tempranamente posible las matemáticas modernas, tenemos la introducción de la teoría de conjuntos en la etapa infantil. Este intento de poner la enseñanza de las matemáticas al nivel de las matemáticas del siglo XX se consideraba especialmente necesario en los niveles primario y secundario, en los cuales se creía que se estaban enseñando contenidos obsoletos por no estar de acuerdo con el espíritu de las matemáticas modernas.

En la elaboración de los nuevos programas se procuró conseguir una coherencia interna desde el punto de vista de los contenidos matemáticos que se concretó en: 1) el desarrollo consecuente del punto de vista conjuntista y vectorial, 2) el desarrollo sistemático y coherente de la geometría a través del concepto de transformación y 3) el desarrollo de las estructuras algebraicas con aplicación inmediata a diferentes partes de la aritmética, del álgebra y de la geometría.

Los matemáticos profesionales partidarios de esta reforma creían que las dificultades que se producían en el aprendizaje de las matemáticas eran causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática tradicional (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducían en el alumno una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa. Dicho en términos constructivistas actuales: consideraban que la matemática tradicional hacía una presentación confusa de las matemáticas y que, por lo tanto, no era potencialmente significativa para los alumnos.

Sin entrar en un análisis exhaustivo de las consecuencias del enfoque "moderno" de las matemáticas en la enseñanza no universitaria, podemos decir que los aspectos más perjudiciales de la aplicación concreta de esta reforma fueron (Núñez y Font 1995): a) Deductivismo exagerado: las matemáticas se presentaban como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente. Esta presentación podía poner de manifiesto al alumno la ordenación lógica de la materia, pero, al presentar el producto terminado, impedía la acción, las conjeturas, la imaginación, etc; es decir, en la terminología de la época, "impedía hacer matemáticas". b) Definiciones formalizadas: se cayó en el error de identificar el concepto que se quería enseñar con su definición formalizada. Esta identificación llevó: 1) a presentar a los alumnos un exceso de simbolismo, 2) a hacerlos manipular mecánicamente estos símbolos, sin saber lo que estaban haciendo (formalismo prematuro) y 3) a olvidar que, para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia que le den sentido, al mismo tiempo que permiten descubrir las relaciones con otros conceptos. c) Exceso de generalización y, por tanto, falta de procesos de abstracción: los conceptos se presentaban de la manera más general posible, con lo cual se iba de lo más general a lo más particular y, por tanto, no se mostraban al alumno las situaciones concretas que permitían abstraer sus similitudes e ir de lo concreto a lo más general. d) Las matemáticas por las matemáticas: se presentaban unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias. Los textos didácticos ofrecían pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, lo cual facilitaba preguntas del tipo "esto para qué sirve".

El estrepitoso fracaso de la aplicación concreta de las matemáticas modernas modificó la manera de enseñarlas en las instituciones no universitarias en diferentes direcciones. Una fue enseñar teorías acabadas, sin demostrarlas deductivamente, focalizando el trabajo en el aula en el dominio de las técnicas algorítmicas que se derivaban de la teoría. Los partidarios de este estilo docente asumían, en muchos casos implícitamente, el punto de vista conductista en psicología. La otra, si bien consideraba fundamental el aprendizaje de las estructuras matemáticas, inició tímidamente una línea de trabajo, que llamaremos "semántica" – entendiendo por semántica todo aquello que tiene que ver con la construcción de significado que hace el alumno –, que pretendía resolver una de las grandes dificultades del aprendizaje de las matemáticas: su nivel de abstracción y generalización. Esta forma de entender la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas consideraba imprescindible presentar contextos variados que diesen sentido al concepto; oponiéndose a las versiones más formalistas de la matemática moderna, las cuales pretendían presentarlos de la manera más general posible y separados de los contextos que les daban sentido, para así evitar las dificultades de comprensión que la presentación contextualizada pudiese producir.

En el inicio de esta tímida línea semántica, además de las ideas de Piaget, las ideas de Bruner y Dienes tuvieron mucha influencia. Bruner se preocupó de estudiar el concepto de representación cognitiva. Según Bruner hay tres tipos de representaciones: 1) La representación enactiva es un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada. Como ejemplo de representación enactiva tenemos el caso del niño que cuando deja caer un sonajero imita el movimiento del sonajero con la mano, indicando así que recuerda el objeto con relación a la acción que se realiza sobre el mismo. 2) La representación icónica consiste en recrear mentalmente una situación anterior; por ejemplo, si en un viaje hemos visitado un lugar que nos ha gustado, podemos recrear sus imágenes. 3) La representación simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite representar las situaciones mediante símbolos.

Bruner propuso que los conceptos se enseñasen siguiendo estas tres fases:

> (...) Por tanto, la clave para la enseñanza parecía ser el presentar los conceptos de forma que respondiesen de manera directa a los modos hipotéticos de representación. La forma en que los seres humanos se representaban mentalmente los actos, los objetos y las ideas, se podía traducir a formas de presentar los conceptos en el aula. Y, aunque algunos estudiantes podían estar "preparados" para una representación puramente simbólica, parecía prudente, no obstante, presentar también por lo menos el modo icónico, de forma que los estudiantes dispusiesen de imágenes de reserva si les fallaban las manipulaciones simbólicas(...). (Resnick y Ford, 1990, p. 141)

Dienes se preocupó del aprendizaje de los conceptos matemáticos y diseñó una serie de secuencias didácticas regidas por los siguientes principios:

> 1) Principio dinámico: Deben incluirse actividades prácticas o mentales que provean de la necesaria experiencia fundamental.

> 2) Principio de constructividad: Esencialmente implica la inducción desde lo particular a lo general (en contraste con el análisis que va de lo general a lo particular). 3) Principio de variabilidad matemática: Debe variarse la estructura matemática a partir de la cual el nuevo concepto o proceso se desarrolla para permitir que se distingan claramente todas las características matemáticas implicadas. 4) Principio de variabilidad perceptiva: Debe variarse suficientemente el marco de experiencia a partir del cual se desarrollan ideas y procesos al objeto de prevenir su fijación en un conjunto o conjuntos particulares de experiencias, esto es, debe propiciarse la abstracción. (Macnab y Cummine, 1992, p. 52)

El principio de variabilidad perceptiva es importante porque si no se ponen ejemplos concretos variados de un concepto nos podemos encontrar con que los alumnos tomen como atributos relevantes del concepto aquellos que no lo son. Las variaciones matemáticas clarifican hasta qué punto se puede generalizar un concepto extendiéndolo a otros contextos. De acuerdo con este principio, por ejemplo, el aprendizaje-enseñanza del valor posicional no se ha de limitar al contexto de la base 10, sino que se ha de ampliar a otras bases, para que los alumnos comprendan que el valor posicional de una cifra no depende del hecho de trabajar en base diez, puesto que en otras bases las cifras también tienen un valor posicional.

Los partidarios de esta reforma decían que la enseñanza de las matemáticas debía de tener en cuenta el desarrollo de las capacidades intelectuales de los alumnos, y que se tenía que ir de la acción a la abstracción, de acuerdo con lo que postulaban Piaget, Lovell, Bruner, Dienes, etc. Todos estos autores coincidían en que, para poner de manifiesto las estructuras subyacentes de las matemáticas, el alumno tenía que pasar por tres fases: 1) Fase de manipulación: los conceptos tienen su origen en las acciones realizadas sobre los objetos. 2) Fase de representación: aquello que se ha comprendido se ha de poder explicar oralmente y se ha de saber representar icónicamente, y 3) Fase simbólica: esta etapa es la más reflexiva y la que posibilita el paso efectivo a la abstracción; aquello que se ha comprendido se ha de saber trabajar con símbolos sin un referente concreto.

Estas ideas se concretaron en la producción y utilización de diferentes materiales (los bloques lógicos y los bloques multibase de Dienes entre otros) que fueron muy importantes durante los años 75-80 y que aún son usados actualmente. Sin embargo, pronto aparecieron los críticos, entre los que hay que destacar a Freudenthal (1983), a este punto de vista. Su crítica consistía en poner en cuestión que la vía indicada fuese ir de las estructuras matemáticas a las situaciones que las ejemplifican. Frente a este punto de vista, Freudenthal desarrolla lo que conocemos por "fenomenología didáctica". Lo que una fenomenología didáctica permite es precisamente preparar y organizar el camino contrario: se parte de los "phenomena" que solicitan ser organizados y entonces la tarea consiste en enseñar al estudiante a manipular los medios de su organización. Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los "phenomena" tanto del mundo real como del mundo imaginario. Así los números organizan el "phenomenon" de la cantidad, las figuras geométricas organizan el "phenomenon" del contorno, forma, etc.

5) Se puede considerar que el pensamiento matemático no informa de las cosas como los árboles, sillas, etc porque lo que hace es informar sobre aquello que nosotros ponemos (ya sabemos) en las cosas como los árboles, sillas, etc. Por ejemplo, los juicios sintéticos a priori basados en el apriorismo kantiano.

Kant intentó una síntesis entre las tradiciones racionalistas y las empiristas. Estaba de acuerdo con Hume y otros empiristas en la idea de que nuestro conocimiento de la naturaleza depende de la experiencia y que no se descubre razonando sobre nuestras ideas innatas. Ahora bien, consideró que el escepticismo de Hume era consecuencia inevitable de su adhesión al principio empirista, que intentaba extraer todo el conocimiento de la experiencia. Su solución consistió en dar la vuelta a la relación de las personas con el mundo real. En lugar de suponer que los objetos existen independientemente de nosotros, y preguntarnos después cómo podemos conocerlos, Kant sostenía que nuestras actividades cognitivas eran parcialmente constitutivas de los objetos de los cuales tenemos experiencia. Mantenía, además, que es precisamente nuestra propia participación en la construcción de los objetos de percepción lo que hace posible que conozcamos. Al explicar como nuestra actividad cognitiva es constitutiva de los fenómenos que experimentamos, Kant subscribió en parte el enfoque racionalista. Afirmaba que nuestra capacidad de percibir y de pensar sobre la naturaleza dependía de conceptos o categorías del entendimiento que nosotros aportamos a la experiencia, categorías que poseemos de manera innata. Estas categorías se han de aplicar al *input* sensorial que recibimos, para constituir nuestro mundo de experiencia. Para tener experiencia de un objeto, el intelecto ha de aplicar las categorías a nuestros *inputs* sensoriales.

Kant mantenía que los objetos que causan las experiencias sensoriales (que llama "cosas en si") son incognoscible para nosotros; por tanto, no tiene sentido investigar qué son. Por otra parte, los objetos de la experiencia fenoménica, los que se construyen aplicando las categorías a los estímulos sensoriales, están dentro de nuestro dominio de conocimientos. Debido a que estos objetos se han construido de acuerdo con nuestras categorías, podemos estar seguros que se adapten a ellas. Por ejemplo, debido a que construimos el mundo de manera que cada suceso tenga una causa, sabemos con certeza que todo suceso tiene una causa. Normalmente se utilizan los términos "noúmeno" para referirse a la "cosa en si" y "fenómeno" para referirse a la "cosa en mi". De la obra de Kant, nos interesa constatar que: 1) El mundo de los noúmenos queda despojado de las categorías, 2) Las categorías las aporta el sujeto, 3) Las categorías son innatas y 4) el mundo fenoménico deja de ser concebido como la representación pasiva de la realidad exterior y, en su lugar, es visto como una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales.

El punto de vista kantiano permite una alternativa ontológica al platonismo: "el constructivismo". Para Kant, las matemáticas son el resultado de una construcción *a priori*, que las personas imponemos a la realidad física, y algunos de sus resultados son sintéticos *a priori* (verdades necesarias no tautológicas). O sea, incluso antes de la experiencia, algunos juicios matemáticos nos permiten conocer como han de ser las cosas en la naturaleza. Para Kant, algunos axiomas de la geometría eran sintéticos *a priori*.

La aparición de las geometrías no euclídeas tiró por tierra la suposición que las categorías *a priori* del espacio que él consideraba eran necesarias. Este hecho tuvo diversas consecuencias. La primera fue abandonar el apriorismo kantiano del espacio, pero manteniendo el apriorismo temporal. Este fue el punto de vista adoptado por el intuicionismo de Brouwer:

> *Aunque la posición del intuicionismo parecía débil después de este período (siglo XIX) de desarrollo matemático, se ha recuperado abandonando el apriorismo kantiano del espacio, pero adhiriéndose más resueltamente al apriorismo del tiempo. Este neointuicionismo considera el desmembrarse de los momentos vitales en partes cualitativamente distintas – que solamente pueden ser reunidas si han sido previamente separadas por el tiempo – como el hecho primigenio del entendimiento humano; y considera el despojar este desmembramiento de todo contenido sentimental en orden a intuir la simple unidad de dos como hecho primigenio del pensar científico.* (Brouwer apud Dou, 1970, p. 116)

La matemática intuicionista parte de los números naturales, los cuales considera construidos a partir del apriorismo temporal del ser humano.

El principio de construcción o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático, afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo de construcciones mentales. Una definición perfecta, sin ambigüedad, de qué es lo que constituye una construcción mental como construcción matemática, no se puede dar, pues la intuición de lo que es esa construcción matemática mental es irreducible a otros conceptos más primitivos. Estas construcciones mentales son verdaderas porque son lo que nosotros ponemos en las cosas, pero no implican verdad alguna sobre el mundo si lo consideramos independiente de la experiencia humana.

Según el intuicionismo, los números naturales se construyen inmediatamente en la mente del matemático y su verdad se basa directamente en la evidencia de la intuición. A partir de los números naturales los intuicionistas no tienen problemas para construir los racionales. Ahora bien, la necesidad de sujetarse a definiciones estrictamente constructivas excluye la posibilidad de manejar conjuntos infinitos como globalmente existentes en matemáticas, pues ello supondría una infinidad de construcciones parciales y totalmente acabadas en nuestra mente en un tiempo finito. Para el intuicionista existen únicamente conjuntos finitos, el infinito potencial o conjunto de los números naturales y aquellos que mediante una correspondencia biyectiva sean equinumerables con el conjunto de los naturales, lo cual excluye las definiciones de número real de Weierstrass, Dedekind y Cantor.

Para la mayoría de los matemáticos, el aspecto inaceptable del intuicionismo es la mutilación que realiza de la matemática. No obstante, el debate sobre algunos aspectos de la teoría de conjuntos – y en especial sobre el axioma de elección – está produciendo un renacido interés por las ideas constructivistas. Este interés ha sido impulsado en gran medida por Errett Bishop. El trabajo de E. Bishop pone en relieve que los métodos constructivistas pueden ser tan beneficiosos como los formalistas para el desarrollo de las matemáticas. La principal diferencia entre E. Bishop y Brouwer es que el primero no rechaza la teoría de conjuntos de Cantor, sino que intenta modificarla para dotarla de validez constructivista. Según esto, el axioma de elección, que fue el más criticado de la teoría de conjuntos de Cantor por Brouwer y sus seguidores, es ahora totalmente aceptado. Según E. Bishop, tan pronto se viesen claramente las ventajas de su programa, las matemáticas modernas dejarían de existir y pasarían a ser parte de las matemáticas constructivistas, y la razón es que, a fin de cuentas, en matemática aplicada lo importante es encontrar la solución a cierto problema y no sólo saber su existencia.

La principal repercusión del punto de vista constructivista, propuesto inicialmente por Kant y asumido posteriormente por el intuicionismo, es la aparición de una alternativa ontológica al platonismo. Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son construcciones mentales materializadas en signos. Otra repercusión importante es la constatación de que el mundo fenoménico es una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales. Cómo se realiza esta construcción se convierte en una sugerente agenda de investigación, tanto para la psicología como para la didáctica de las matemáticas.

Respuestas actuales

6) Se puede buscar una síntesis entre el punto de vista que considera que las matemáticas son un modo de pensar que no depende de las cosas de nuestra experiencia y el punto de vista que considera que sí dependen de ellas. Estas síntesis excluyen recurrir a mundos platónicos.

7) La primera síntesis pone el acento en el punto de vista que considera que las matemáticas son un modo de pensar que depende de las cosas de nuestra experiencia y propone una alternativa más sofisticada de la que propuso Mill. En esta versión (débil), no se dice que las matemáticas dependen de las "cosas" de nuestra experiencia como los árboles, sillas, etc., como lo hacen las otras ciencias experimentales (versión fuerte), sino que las matemáticas es una ciencia que presenta las mismas características que las ciencias empíricas. Esta última tesis recibe el nombre de "cuasi-empirismo" o falibilismo y se debe a Lakatos.

Lakatos considera que el problema de los fundamentos de las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del siglo XX es un capítulo del problema del fundamento del conocimiento en general; por consiguiente, es desde esta perspectiva que tiene que examinarse. Las dos posturas dadas al problema del conocimiento son: 1) el dogmatismo que defiende la posibilidad del conocimiento y cuya tarea consiste en encontrar un fundamento "infalible" sobre el cual construir con certeza todas las verdades; 2) el escepticismo que considera imposible el conocimiento porque no puede evitarse el regreso al infinito. De estas dos posturas, Lakatos considera que el escepticismo ha ido ganando terreno en las ciencias empíricas; pero que no ha podido penetrar en el área de la matemática, que permanece como baluarte del dogmatismo. Siempre que el dogmatismo matemático de la época entraba en "crisis", una nueva versión suministraba de nuevo genuino rigor y fundamentos últimos, restaurando con ello la imagen autoritaria, infalible e irrefutable de las matemáticas. Las filosofías logicista y formalista de las matemáticas, dice Lakatos, constituyen los últimos eslabones de la larga cadena de filosofías dogmáticas de las matemáticas. Uno de los objetivos de la obra de Lakatos es poner fin al refugio matemático del dogmatismo.

Los dos teoremas de Gödel, para Lakatos, significan el fracaso del ideal de infalibilidad de la matemática que persiguen tanto el logicismo como el formalismo. Para no caer en el escepticismo, Lakatos se propone seguir a Popper:

> El falibilismo crítico de Popper toma en serio el regreso infinito en las pruebas y definiciones; no se hace ilusiones acerca de su "detención"; acepta la crítica escéptica de toda inyección de verdad infalible. En su planteamiento no hay fundamentos del conocimiento,

> ni en la cúspide ni en la base de las teorías, pero puede haber inyecciones de verdad tentativas e inyecciones de significado tentativas en cualquier punto. (Lakatos 1981, pp. 23-24.)

Pero, a diferencia de Popper, que no era falibilista en matemáticas y lógica, Lakatos se propone aplicarlo a la matemática.

Según el nivel en el que se inyecta el valor de verdad y el significado de los términos, las teorías pueden ser, según Lakatos, euclídeas o empiristas. Mientras que el Programa Euclídeo los pone en la cúspide, el Programa Empirista los pone en la base. De estos dos, al primero lo denomina Programa de Trivialización del Conocimiento, en cuanto que las teorías están formadas por axiomas infalibles que constan de términos primitivos perfectamente conocidos, y el tipo de prueba que emplea para demostrar los teoremas garantiza la verdad y la transmite de arriba-abajo:

> Puesto que el Programa Euclídeo implica que todo conocimiento puede deducirse de una conjunción de proposiciones trivialmente verdaderas que constan sólo de términos cargados de significado trivial, lo llamaré el Programa de la Trivialización del Conocimiento. (Id., ibid., p. 17)

Dos tipos de Programas Euclídeos o de Programas de la Trivialización del Conocimiento son: el programa "logicista" y el programa "formalista" de la matemática. Su fin es fundamentar la matemática frente a la crítica escéptica. La pretensión de verdad infalible la realizan a costa de la trivialización del contenido. Ahora bien, este intento choca con los dos teoremas de Gödel, que ponen de manifiesto, según Lakatos, que el regreso al infinito en pruebas y definiciones no puede detenerse.

Una vez admitida la derrota del dogmatismo Lakatos se pregunta, ¿no conduce esto a la derrota escéptica? y su respuesta es: "Pero ello no lleva necesariamente al escepticismo matemático: sólo obliga a admitir la falibilidad de una especulación audaz" (Lakatos, 1981, p. 39). Su propósito es mostrar que la matemática es conjetural, pero sin que signifique necesariamente abandonar la razón por completo. La matemática no puede seguir sosteniendo su certeza sobre la trivialidad de su contenido, como ha pretendido el Positivismo Lógico, sino que consiste en conjeturas audaces y profundas, a costa de su falibilidad. Puesto que el regreso al infinito imposibilita la fundamentación de la matemática, Lakatos propone sustituir esta tarea fundamentalista por el problema del avance del conocimiento. Pero ¿Cómo sabemos que avanzamos? Afirma: lo conjeturamos.

Lakatos considera que los dos teoremas de Gödel propiciaron un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática. En el "nuevo campo falibilista", Lakatos incluye a Russell, que en 1924 dice que la lógica y matemática son aceptadas, igual que la electrodinámica de Maxwell, por sus consecuencias observadas; a Church, que en 1939 sostiene la imposibilidad de tener fiabilidad de la consistencia del sistema formal de Russell o Zermelo; a Gödel, que en 1944 dice que la crítica de fundamentos lleva al abandono de su certeza absoluta; a Carnap, que en 1958 encuentra una cierta semejanza entre la física y la matemática en cuanto a su falta de certeza absoluta; a Quine, que en 1958 constata el carácter evaluativo de los datos empíricos también en las matemáticas; a Rosser, que en 1953 se une a Gödel, manifestando nuestra inseguridad de que un sistema formal esté libre de contradicciones; Weyl, que en 1949 propone el parangón de la matemática con la física; Mostowski, que en 1955 toma el teorema de Gödel como corroborador de la caracterización de la matemática como una ciencia natural más, con el mismo método que ésta, la experiencia; Kalmar, que en 1967 afirma que la matemática tiene que ser, como el resto de las ciencias, contrastada en la práctica. Para Lakatos queda invalidada la demarcación logicista de las ciencias sostenida por el Positivismo Lógico entre las ciencias naturales – a posteriori, empíricas y falibles – y la matemática – *a priori*, tautológica e infalible.

En su libro *Pruebas y refutaciones* Lakatos (1978) presenta un choque de opiniones, razonamientos y refutaciones entre un profesor y sus alumnos. En lugar de presentar el producto de la actividad matemática, presenta el desarrollo de la actividad matemática a partir de un problema y una conjetura. En *Pruebas y refutaciones* Lakatos se vale de la historia para intentar convencer al lector de que las matemáticas, lo mismo que las ciencias naturales, son falibles y no indubitables; que también crecen gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión. Se parte de un problema o una conjetura, y se buscan simultáneamente demostraciones y contraejemplos. Las nuevas demostraciones explican los contraejemplos viejos, los contraejemplos nuevos minan y socavan las demostraciones anteriores. Para Lakatos, en este contexto de matemática informal, "demostración" no significa un procedimiento mecánico que lleve a la verdad desde las hipótesis a las conclusiones en irrompible encadenamiento. Significa más bien explicaciones, justificaciones, elaboraciones que hacen la conjetura más plausible, más convincente, al tiempo que va adquiriendo mayor detalle y precisión bajo la presión de los contraejemplos. Cada paso de la demostración es por sí mismo materia criticable, crítica que puede ser mero escepticismo o puede consistir en la producción de un contraejemplo a un razonamiento particular. Lakatos llama "contraejemplos locales" a los ejemplos que ponen en tela de juicio pasos concretos del razonamiento; los ejemplos que contradicen no el razonamiento, sino sus conclusiones, son contraejemplos globales.

Lakatos aplicó su análisis epistemológico no a las matemáticas formalizadas, sino a las matemáticas "informales", las matemáticas en proceso de crecimiento y de descubrimiento, que es, obviamente, lo que matemáticos y estudiantes de matemáticas conocen por matemáticas. Lakatos señala que su teoría es cuasi-empirista (no pura y simplemente empirista) porque los falsadores potenciales y los enunciados básicos de las matemáticas, a diferencia de los de la ciencia natural, no son, ciertamente, enunciados singulares espacio-temporales. Para Lakatos los falsadores potenciales de las teorías matemáticas formalizadas son teorías informales. Dicho con otras palabras, ante la cuestión de si aceptar o rechazar un sistema de axiomas que se nos proponga para la teoría de conjuntos tomaremos nuestra decisión dependiendo de la medida en que el sistema formal reproduzca o se conforme a la teoría matemática que inicialmente tuviéramos en mente. Evidentemente, Lakatos tiene plena conciencia de que podemos también optar por modificar nuestra teoría informal, y que la decisión de cuál haya de ser el camino a tomar puede ser cuestión compleja y controvertida. Llegados a este punto, Lakatos se encuentra cara a cara con el problema principal, ¿Cuáles son los "objetos" de las teorías matemáticas "informales"? Cuando hablamos de triángulos, números, etc., sin referencia a ningún sistema de definiciones y axiomas, ¿de qué clases de entidades estamos hablando? Tal como señalan Davis y Hersh (1988) Lakatos deja sin responder a esta pregunta.

La principal repercusión del punto de vista de Lakatos en la enseñanza de las matemáticas fue poner en primer plano la resolución de problemas. Tal como hemos comentado en el punto anterior la aplicación concreta de las matemáticas modernas como reforma didáctica fue un fracaso. Como alternativa al formalismo en que había degenerado la introducción de las matemáticas modernas, surgieron, tanto en España como en otros países, diferentes grupos de renovación que profundizaron en la línea semántica. Estos grupos proponían una alternativa basada en: 1) enseñar las matemáticas a partir de la resolución de problemas y 2) hacer ver a los alumnos que las matemáticas se podían aplicar a situaciones de la vida real. Para estos grupos, la obra de Lakatos era la justificación teórica de algo que habían constatado en su práctica: la necesidad de pasar de enseñar teorías matemáticas acabadas a enseñar a "hacer matemáticas". Desde esta perspectiva, en la enseñanza de las matemáticas escolares se debía poner el enfoque en la resolución de problemas.

Si bien la obra de Lakatos fue uno de los principales referentes epistemológicos del punto de vista que considera que la esencia de las matemáticas es la resolución de problemas, otros autores ayudaron a desarrollarlo. Entre estos autores destaca Polya. Para Polya (1965), la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal. Ahora bien ¿Por qué es tan difícil, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas? Los trabajos de Schoenfeld (1985) tienen por objetivo explicar la conducta real de los resolutores reales de problemas. Schoenfeld propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: 1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, 2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles, 3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles y 4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

Cada uno de estos cuatro componentes explica las limitaciones, y por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los resolutores reales. Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas, no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla, se señala la ausencia de un buen control o gestor de los recursos disponibles. Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que el resolutor no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de recursos cognitivos como explicación al intento fallido en la resolución. Por otro lado, puede que todo lo anterior esté presente en la mente del resolutor, pero sus creencias de lo que es resolver problemas en matemáticas o de la propia concepción sobre la matemática hagan que no progrese en la resolución. La explicación para este fallo, la contempla Schoenfeld en el cuarto elemento del marco teórico, las creencias. Por último están las heurísticas. La mayor parte de las veces se carece de ellas. Se dispone de conocimientos específicos del tema o dominio matemático del problema, incluso de un buen control, pero falla el conocimiento de reglas para superar las dificultades en la tarea de resolución. Las heurísticas son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas; son como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución. Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de heurísticas. Entre las más importantes cabría citar: 1) Buscar un problema relacionado, 2) Resolver un problema similar más sencillo, 3) Dividir el problema en partes, 4) Considerar un caso particular, 5) Hacer una tabla, 6) Buscar regularidades, 7) Empezar el problema desde atrás y 8) Variar las condiciones del problema.

Guzmán (1991), partiendo de las ideas de Polya y los trabajos de Mason, Burton y Stacey, (1988) y de los trabajos de Schoenfeld ha elaborado un modelo para la resolución de problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática, a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces. Consta de las fases siguientes: 1) Familiarízación con el problema, 2) Búsqueda de estrategias 3) Ejecución de la estrategia y 4) Revisión del proceso y extracción de consecuencias.

Los intentos prácticos de poner la resolución de problemas como eje de la enseñanza de las matemáticas escolares tuvieron que responder a la pregunta ¿Qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas? Cabe al menos tres interpretaciones: 1) Enseñar para resolver problemas, 2) Enseñar sobre la resolución de problemas y 3) Enseñar vía la resolución de problemas.

De entrada, podemos considerar que enseñar para resolver problemas consiste en proponer al alumno la resolución de una serie de problemas, que tiene que resolver como resultado de su actividad. Los principales argumentos a favor de este tipo de enseñanza-aprendizaje son: 1) el alumno, resolviendo problemas aprende a "hacer" matemáticas y de esta manera las vive como un proceso más que como un producto terminado, 2) la resolución de problemas es una actividad que puede motivar más fácilmente a los alumnos que la clase expositiva tradicional y 3) la actividad de resolución de problemas es intrínsecamente gratificante para los alumnos. Las asignaturas que se plantean enseñar a resolver problemas por ósmosis están basadas en la suposición de que la forma fundamental de aprender a resolver problemas es resolver muchos problemas y que, al hacerlo, se aprenden las técnicas, los métodos o las herramientas heurísticas que están implícitas en ellos. La organización de la enseñanza consiste básicamente en la elaboración de una colección de problemas que contenga implícitamente lo que se quiere enseñar y en el establecimiento de una secuencia adecuada de presentación a los alumnos. Uno de los pocos resultados que están claros de la investigación de la resolución de problemas es que intentar resolver muchos problemas es esencial para poder resolver problemas.

La segunda interpretación considera que no basta con resolver problemas sino que hay que reflexionar sobre las heurísticas y destrezas que permiten resolver problemas. La diferencia con respecto al primer punto de vista es que el primero no contempla la resolución de problemas como algo específico, que para su desarrollo necesite de consideraciones especiales. La novedad del segundo punto de vista está en considerar que para conseguir que el alumno adquiera esta habilidad es necesario considerar como parte del currículum la reflexión sobre las técnicas que permiten resolver problemas. Desde este punto de vista, los problemas se eligen de manera que la aplicación a ellos de una herramienta heurística concreta resulte ser paradigma, tanto del modo de funcionamiento de la herramienta heurística en cuestión, como de los rasgos del problema que inducen a pensar en el uso de dicha herramienta heurística. La idea es situar al alumnado en presencia de un resolutor competente que explicita el proceso de resolución para que éste interiorice y aplique las técnicas heurísticas a nuevos problemas. Una de las funciones del profesorado en este modelo es la de actuar como modelo de resolutor de tres maneras distintas: recorriendo el proceso de resolución paso a paso de un problema preparado previamente, embarcándose en procesos de resolución a partir de ideas propuestas por los alumnos y alumnas, y resolviendo problemas cuya solución no se ha preparado previamente.

Una variante de esta segunda interpretación consiste en diseñar las actividades de manera que los alumnos no tengan que ser capaces simplemente de observar y analizar conductas competentes para intentar imitarlas, sino que deben de observar y analizar también la conducta de sus compañeros para cooperar con ellos.

Como síntesis de los dos puntos de vista anteriores se puede decir que el objetivo de que el alumno aprenda a resolver problemas solamente se podrá conseguir mediante una actividad autorreguladora de resolución de problemas, mediatizada por la relación con el profesor y los otros compañeros.

La tercera opción consiste en enseñar vía la resolución de problemas. Desde este punto de vista, hemos de entender los procesos de enseñanza como la presentación de secuencias de actividades que tienen por objetivo, en el tiempo y con los medios disponibles, la emergencia y organización de objetos matemáticos. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

Es importante remarcar que la opción que propone las bases psicopedagógicas del currículum del estado español (Coll 1989) ha resuelto en parte la polémica entre las tres interpretaciones anteriores al reconocer que aprender no consiste en acumular información ni tampoco únicamente en investigar y solucionar problemas. Un aprendizaje significativo y funcional requiere, al mismo tiempo, la adquisición de conceptos y de procedimientos. Por este motivo, la resolución de problemas se ha de incorporar como uno de los procedimientos que hay que enseñar a los alumnos. La opción constructivista considera que el alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje; él es quien construye el conocimiento y nadie lo puede sustituir en esta labor. Pero este protagonismo no se ha de interpretar tanto en términos de descubrimiento o de invención sino partiendo de la base que es el alumno quien construye significados, y da sentido a lo que aprende, y nadie, ni tan solo el profesor, lo puede sustituir en esta labor. Por lo tanto, la enseñanza basada en la resolución de problemas no es la única manera con la que un profesor puede conseguir un aprendizaje significativo. Por ejemplo, Ausubel ya hizo observar que el descubrimiento no era la única manera que tenía el profesor para conseguir la motivación de los alumnos, la seguridad en si mismos y el deseo de aprender, ya que una enseñanza expositiva bien hecha era igualmente capaz de interesar y de inspirar a los alumnos.

8) La segunda síntesis es la propuesta de Piaget. Ésta pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia, que no depende de las "cosas".

Para la epistemología genética, la esencia del pensamiento matemático es la universalidad y la necesidad, y cualquier sujeto, como resultado del proceso evolutivo de especie, está biológicamente preparado para desarrollar un pensamiento matemático universal y necesario. La epistemología genética de Piaget, igual que la filosofía kantiana, pretende ser una síntesis entre el empirismo y el racionalismo. Piaget considera que las proposiciones de las matemáticas son verdades necesarias, mientras que las de las ciencias de la naturaleza dependen de la experiencia. Ahora bien, Piaget pretende aportar la explicación psicológica adecuada para mostrar como las proposiciones lógico-matemáticas son adquiridas también a partir de la experiencia sin que esta génesis empírica comprometa su valor universal y necesario. Piaget considera que no es cierto que la actividad cognitiva del sujeto extraiga los universales de la experiencia a partir de la abstracción por comparación (punto de vista empirista) ni tampoco lo es que el conocimiento universal y necesario sea el resultado de la actividad constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento en virtud de ideas innatas o bien de estructuras *a priori* presentes desde el principio en cualquier sujeto (punto de vista racionalista). Piaget considera que las estructuras de conocimiento que hacen que las proposiciones de las matemáticas sean verdades necesarias son el resultado de un proceso, que comienza con la etapa sensomotriz y acaba en la etapa del pensamiento formal, que tiene por objetivo la adaptación del sujeto al mundo que le rodea.

Piaget (1979) diferencia la construcción matemática del descubrimiento y de la invención, y dice que el conocimiento matemático es una construcción que no es una invención ni un descubrimiento. Pero que, en cierta manera, esta construcción tiene algo de descubrimiento, ya que, como resultado de un proceso evolutivo de la especie, todos estamos en condiciones de construir el mismo conocimiento; y también hay algo de invención porque las construcciones matemáticas pueden ir en direcciones muy diferentes.

Piaget fue uno de los psicólogos que más claramente puso de manifiesto las limitaciones del punto de vista que considera que generalizamos como resultado de un proceso de comparación. Piaget considera que la abstracción es la facultad que nos permite construir los conceptos, pero no considera que ésta construcción sea sólo el resultado de la comparación, sino que cree que nuestras acciones son muy importantes para abstraer los conceptos. En función de las experiencias que intervienen en la formación de un concepto, Piaget distingue la abstracción simple o empírica de la abstracción reflexiva o lógico-matemática. En la abstracción simple, todo lo que la persona hace es centrarse en una propiedad determinada del objeto, ignorando las otras; extrae la información de los propios objetos. Reconocer determinados atributos o propiedades supone abstraer de los objetos unas cualidades que los diferencien de los otros. La abstracción reflexiva extrae sus informaciones de la coordinación de las acciones que el sujeto realiza sobre el objeto. Ni las acciones ni la coordinación tienen su origen en el objeto, que tiene un papel de soporte. La abstracción reflexiva implica la construcción de relaciones entre los objetos. El resultado de esta abstracción se trata de una verdadera construcción de la mente más que de una centración en algo que ya existe en los objetos. En la abstracción reflexiva, aquello que se abstrae no es lo observable, aquello que ya existe en los objetos, sino que se descubren propiedades a partir, no de los objetos, sino de las acciones (reunir, separar, ordenar, etc.) que se efectúan con ellos. Estos dos tipos de abstracciones funcionan de manera coordinada en la mayoría de las situaciones en las que generalizamos, aunque de cara a su estudio y análisis conviene tratarlas separadamente. Piaget considera que el conocimiento lógico-matemático surge a partir de la abstracción reflexiva, mientras que el conocimiento físico o biológico surge de la abstracción empírica. Esta manera de entender el proceso de abstracción permite explicar la construcción de los objetos matemáticos. Las ideas de Piaget han tenido mucha influencia en los trabajos de Dubinsky (1991 y 1996) y Dörfler (1991) y en general sobre las investigaciones que estudian el pensamiento matemático avanzado.

Piaget considera que el aprendizaje es constructivo, para él comprender es inventar, es construcción realizada por uno mismo. Aunque podemos ayudar a los alumnos a adquirir conceptos matemáticos por medio de materiales didácticos y de preguntas y explicaciones de los profesores, sólo por su propio esfuerzo pueden comprender verdaderamente. Con este punto de vista coinciden muchos otros psicólogos y hoy en día podemos hablar de una concepción constructivista del proceso de enseñanza y aprendizaje que tiene a Piaget como uno de sus principales referentes. Este tipo de constructivismo psicológico no tiene en cuenta la especificidad del contenido a enseñar – sirve tanto para enseñar historia como para enseñar matemáticas – y en el que, a pesar de contemplar aspectos sociales e institucionales, prima la construcción individual del sujeto.

9) La tercera síntesis es la propuesta por la actual ciencia cognitiva de las matemáticas basada en el reconocimiento de la importancia que tiene nuestro cuerpo sobre nuestra mente y en el pensamiento metafórico. Esta también pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia, que no depende de las "cosas".

La nueva disciplina, llamada "Ciencia Cognitiva de la Matemática" (Lakoff y Núñez, 2000, Núñez 2000), tiene por objetivo estudiar, de manera empírica y multidisciplinar, las ideas matemáticas como una materia científica. El fondo teórico de esta nueva ciencia está basado en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, y en los relativamente recientes hallazgos en lingüística cognitiva. Su tesis afirma que el origen de las estructuras matemáticas de las personas hay que buscarlo en los mecanismos cognoscitivos cotidianos como son los esquemas de las imágenes y el pensamiento metafórico.

Según este punto de vista la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones ni en mundos trascendentes platónicos. Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Debido a su origen, común a todas las personas, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son el producto de convenciones completamente sociales y culturales (aunque las dimensiones socio-históricas juegan papeles importantes en la formación y desarrollo de estas ideas). Al igual que la teoría de Piaget, esta nueva ciencia afirma que las matemáticas son el resultado de la experiencia humana pero no es el resultado de puras convenciones sociales, ya que por razones de tipo evolutivo todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas.

Recientemente la ciencia cognitiva no dualista ha realizado importantes avances en la comprensión del funcionamiento de la mente y más en concreto sobre nuestra comprensión de las matemáticas. Estos son: 1) *La importancia que tiene el cuerpo sobre la mente*. La naturaleza y dinámica de nuestros cuerpos, nuestros cerebros, y nuestro funcionamiento de todos los días tiene una importancia fundamental en la estructura de la razón humana, la cual incluye el pensamiento matemático. 2) *El papel del conocimiento inconsciente*. La mayoría de los procesos cognitivos son inconscientes en el sentido de que no son accesibles a nuestra introspección consciente. Nosotros no podemos llegar directamente por medio de la introspección a nuestros sistemas conceptuales y a nuestros procesos cognitivos de nivel inferior. Esto incluye una gran parte del pensamiento matemático, y 3) *El pensamiento metafórico*. La mayor parte de los seres humanos conceptúan conceptos abstractos en términos concretos y usan la estructura inferencial y unos modos de razonar conectados con nuestro sistema motórico y sensorial. El mecanismo cognitivo que permite que lo abstracto se comprende en términos de lo concreto es la metáfora conceptual. El pensamiento matemático también hace uso de la metáfora conceptual, como cuando nosotros conceptuamos números como puntos en una línea, o espacio como conjunto de puntos.

Este punto de vista considera que la actual investigación en neuropsicología ha demostrado que todos los individuos de la especie Homo Sapiens nacen con la capacidad de distinguir entre un número muy pequeño de objetos y sucesos – por ejemplo la subitización es un proceso que nos permite ver que un conjunto tiene 3 o 4 elementos sin necesidad de contarlos – y con la de efectuar cálculos aritméticos muy simples con números muy pequeños. Estos hallazgos son importantes para la comprensión de los rudimentos biológicos de aritmética básica. Sin embargo, ellos nos dicen muy poco sobre la complejidad de las matemáticas ya que estas van mucho más allá de la aritmética y requieren un aparato cognitivo enorme que va más allá del de los bebés y animales, o de la que un adulto normal sin una instrucción específica puede hacer.

A la pregunta ¿Cuáles son las capacidades cognitivas, basadas en la importancia del cuerpo sobre la mente, que permiten a una persona pasar de las habilidades numéricas básicas innatas a un entender profundo y rico de, por ejemplo, las matemáticas de una licenciatura universitaria de una facultad de ciencias? Lakoff y Nuñez responden que éstas no son independientes del aparato cognitivo usado fuera de matemática. Según estos autores, la estructura cognitiva necesaria para la matemática avanzada usa el mismo aparato conceptual que el pensamiento cotidiano en las situaciones ordinarias no matemáticas, esto es: esquemas de la imagen, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y la metáfora conceptual. De ellos, es el pensamiento metafórico el más importante para la construcción de las matemáticas.

Este punto de vista es en cierta forma apriorístico ya que considera que la actividad constitutiva del sujeto en el acto de comprensión matemática lleva a verdades consideradas necesarias para cualquier sujeto normal. Por una parte, considera probado por la actual neuropsicología que todos los individuos de la especie Homo Sapiens nacen con la capacidad de distinguir entre un número muy pequeño de objetos y sucesos, y, por otra parte, considera que casi todos los sujetos tienen la capacidad de llegar a comprender las verdades matemáticas, puesto que estas se basan en unos procesos cognitivos básicos y comunes a todos los miembros de la especie. De todas maneras es un tipo de apriorismo relativamente débil.

En nuestra opinión, la principal aportación de este punto de vista a la educación matemática consiste en señalar la importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción de las matemáticas. Desde que Lakoff y Johnson pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido (Lakoff y Johnson 1991), el papel del pensamiento metafórico en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia en la investigación en didáctica de las matemáticas (v. g. English, 1997; Font 2000 y 2001; Acevedo, Font y Giménez, 2002; Lakoff y Núñez, 1998 y 2000; Núñez 2000; Núñez y Lakoff, 1998; Pimm, 1990; Van Dormolen, 1991).

Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite la transfusión de propiedades del dominio de partida dentro del domino de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se transpongan una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Las investigaciones sobre el pensamiento metafórico han detectado diferentes clases de metáforas. Hay una primera clase de tipo extramatemático, por ejemplo "una función es una máquina", que sirven para explicar o interpretar situaciones matemáticas en términos de situaciones reales. Uno de los ejemplos más notables de este tipo es la del "contenedor", usada para estructurar la teoría de clases, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana. En las aulas, además de las metáforas extramatemáticas, son frecuentes también las matemáticas, las cuales permiten estructurar partes del conocimiento matemático a partir de otras partes de las matemáticas que ya son conocidas. Ejemplos de este tipo son "los números reales son los puntos de una recta", "los números complejos son vectores", "las funciones de proporcionalidad son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc.

El uso de metáforas plantea algunas dificultades. En efecto, puede ocurrir, por ejemplo, que el alumno, en lugar de entender que una función se puede entender a partir de comprender el funcionamiento de una máquina, tome la expresión "una función es una máquina" de manera literal, es decir: que piense que una función realmente es una máquina. Dicho con otras palabras: la expresión anterior tiene un significado literal, pero también tiene un segundo significado, que es el que queremos que entienda el alumno; es decir, queremos que el alumno estructure su conocimiento sobre funciones a partir de su conocimiento sobre las máquinas, no que piense que una función es una máquina. Para que el alumno comprenda que no debe tomar la expresión "una función es una máquina" de manera literal, se ha de producir un conflicto entre el significado literal de la expresión y el contexto en el que se usa. La existencia de este conflicto es lo que hace que el alumno busque un significado diferente del literal. Esta dificultad es fácil que se produzca ya que el profesor en muchos casos usa metáforas sin ser consciente de que lo hace, es decir realiza un uso incontrolado de la metáfora. Ahora bien, las dificultades relacionadas con el pensamiento metafórico no se pueden reducir a la dificultad causada por el significado literal de la metáfora; ya que incluso cuando se hace un uso correcto de la metáfora y se estructura un campo de conocimiento en términos de otro ya conocido, se corre el peligro de trasladar relaciones que no son válidas.

10) La cuarta síntesis tiene un fuerte componente pragmático y pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia que sí depende de las "cosas", ya que postula que las matemáticas son un producto histórico que se consideran universales y necesarias porque han resultado útiles para organizar nuestro conocimiento de las "cosas" de nuestra experiencia.

Para algunos sociólogos, la idea de que las matemáticas puedan variar igual que varía la organización social no es admisible. Por ejemplo Stark (1963) considera que es evidente que no puede haber más que una ciencia de los números, idéntica por siempre a sí misma. Uno de los primeros sociólogos que se opuso a este punto de vista fue Splenger en el primer capítulo "El sentido de los números" de su obra *La decadencia de Occidente* publicada en 1918. En este capítulo Splenger expone tres ideas que, con el tiempo, han ido adquiriendo una gran importancia y que parece ser que tuvieron un gran impacto sobre Wittgenstein. La primera es la distinción entre la actividad matemática y su producto:

> Mas no debe confundirse la matemática considerada como la facultad de pensar prácticamente los números, con el concepto mucho más estrecho de la matemática como "teoría" de los números desarrollada en forma hablada o escrita. Ni la matemática escrita ni la filosofía explicada en libros teóricos representan todo el caudal de intuiciones y pensamientos matemáticos y filosóficos que atesora una cultura. (Spengler, 1958, pp. 92-93)

La segunda es el cuestionamiento de la división entre síntesis *a priori* y síntesis *a posteriori*. La tercera es que cada cultura genera su matemática:

> En vano aplicaremos nosotros, los occidentales, nuestro propio concepto científico del número, violentamente, al objeto de que se ocupaban los matemáticos de Atenas y Bagdad; es lo cierto que el tema, el propósito y el método de la ciencia que en estas ciudades llevaba el mismo nombre, eran muy diferentes de los de nuestra matemática. "No hay una matemática; hay muchas matemáticas". (Id., ibid., p. 96)

La obra de Splenger tuvo una fuerte influencia sobre Wittgenstein. Este filósofo en su trabajo *Observaciones sobre los Fundamentos de Matemática* (1987) sostiene que la actividad matemática consiste en juegos del lenguaje. Éstos no son juegos en el sentido trivial, sino prácticas sometidas a reglas. Wittgenstein defiende que nosotros seguimos a menudo reglas en el razonamiento matemático debido a la costumbre, no debido a necesidad lógica. Para Wittgenstein, la verdad, certeza o "necesidad" matemática no es más que el "estar de acuerdo" con el resultado de seguir una regla que forma parte de un juego de lenguaje que se pone en funcionamiento en determinadas prácticas sociales. No es un "acuerdo de opiniones" arbitrarias es un "acuerdo" de prácticas sometidas a reglas. La contribución de Wittgenstein es señalar que lo importante es lo que los matemáticos hacen en la práctica, y no los resultados de esta práctica.

La visión de las matemáticas de Wittgenstein se basa en una concepción pragmatista del significado. Para él, el significado es el uso y se opone a la visión referencial del significado. El punto de vista referencial se puede formular así: "algo" representa "algo". Desde este punto de vista un signo matemático representa un objeto matemático. Este punto de vista relega al usuario de las matemáticas y las contempla como "conocimiento sin sujeto cognoscente" ya que lo que interesa son los productos de la actividad matemática y no las prácticas de los matemáticos. Los estudios sobre la actividad matemática de tipo naturalista (v. g. Kitcher 1984; Kitcher y Aspray 1988) y los histórico-sociales (Wittgenstein 1987; Ernest 1998; Restivo 1992) desarrollados en los últimos años han desplazado el centro de interés desde las teorías matemáticas como productos acabados hacia la actividad matemática entendida como una práctica social en un doble sentido: por un lado, en cuanto es aprendida de otras personas, y por otro, porque está formada por reglas que se siguen habitualmente.

Los estudios naturalistas y los histórico-sociales sobre las matemáticas han puesto de manifiesto que la significación no se agota en el plano semántico ya que hay que considerar al usuario. La contemplación del usuario conlleva la dimensión pragmática de la representación. Los orígenes de esta dimensión pragmática se pueden encontrar en la semiótica de Peirce, la cual estudia la relación entre un interpretante y los signos en el marco de una teoría comprehensiva de éstos. El punto de vista pragmático se puede formular así: "algo" representa "algo" para "alguien". Esto nos lleva a la dimensión intencional de la representación, ya que la producción o la interpretación de un signo como representante de un objeto se realiza por medio de un interpretante. El estudio del componente intencional requiere la introducción del sujeto como término irreducible de significación. Desde esta perspectiva, el significado no es inherente al objeto sino que se construye en el proceso de interpretación de manera no arbitraria ya que está vehiculado por la intersubjetividad. El hecho de considerar al interpretante permite postular una teoría de la significación de los objetos matemáticos compatible con la máxima pragmática de Peirce para captar el significado de las ideas que utilizamos: *"consideremos los efectos prácticos que creemos que podrían producirse por el objeto de nuestra concepción. La concepción de todos los efectos es la concepción completa del objeto (CP, 5.402)"* (apud Ibarra y Mormann, 1997, p. 277).

Esta manera de entender el significado se basa en la suposición que los sistemas matemáticos de signos ostensivos que se manipulan en el aula adquieren significado para los alumnos al ser usados en el aula. Desde este punto de vista, diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión y el significado, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona. Dicho de otra manera: optar por una visión pragmática del significado implica focalizar el interés en las prácticas públicas y dejar en segundo plano el interés por los procesos mentales de las personas – que como mucho se pueden considerar prácticas privadas. Desde este punto de vista, la objetividad se entiende como la intersubjetividad que resulta de una construcción social. El conocimiento se entiende como un producto de las instituciones de la sociedad y, a pesar de la objetividad que lo caracteriza, no por eso adquiere un *status* ontológico diferente de la actividad humana que lo ha producido.

La interpretación pragmatista del significado choca con el problema de "la objetividad de la teoría". Si no se puede explicar desde un punto de vista pragmatista "la objetividad de la teoría", su interpretación del significado resulta ser muy limitada. La explicación desde un punto de vista pragmatista de "la objetividad de la teoría" es un tema complejo porque la objetividad (certeza o verdad necesaria) es un objetivo que las ciencias pretenden conseguir haciendo abstracción de los utilizadores. La aceptación de la explicación pragmatista de "la objetividad de la teoría" sólo es posible si previamente se ha puesto entre paréntesis como mínimo: 1) la suposición que la ciencia nos ofrece copias cada vez mejores de una realidad que tiene sus propias determinaciones, 2) la teoría referencial del significado y 3) la suposición que la actividad constitutiva del sujeto lleva a verdades necesarias. El cuestionamiento de estas tres suposiciones es el resultado de un largo proceso que ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia desde el estudio de las teorías al análisis de las prácticas.

Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división entre el "contexto de justificación" y "el contexto de descubrimiento", propuesta por el positivismo lógico. En la superación de esta división han tenido un papel destacado el libro de Kuhn *La estructura de las revoluciones científicas* publicado en 1962 (Kuhn, 1981) y el artículo de Quine

"Naturalización de la epistemología" publicado en 1969 (Quine 1974). El primero, que se puede considerar una de las bases del punto de vista llamado "socio-histórico" atrajo la atención de los filósofos de la ciencia sobre el desarrollo histórico de las teorías científicas, mientras que el segundo, que está en la base de lo que se ha venido llamar "naturalismo" en la filosofía de la ciencia, postula que no es posible disponer en filosofía de ninguna posición ventajosa desde la que puedan realizarse hallazgos *a priori*. Quine en 1950 (Quine 1986) consideró que no hay posible distinción entre verdades de hecho, susceptibles de ser demostradas por la experiencia y verdades de la lógica y de las matemáticas que, al no decir nada de los hechos, no tienen que ser verificadas por la observación. Los enunciados, tanto si son analíticos como si son sintéticos, forman parte de una teoría que debe ser confirmada globalmente por la experiencia.

Los planteamientos que presentan un fuerte componente pragmatista explican la producción y la evolución del conocimiento matemático a partir de las "cosas" de nuestra experiencia, no de una manera simple como la de Mill sino que intentan explicar esta dependencia de una manera más compleja en la que las instituciones sociales juegan un papel fundamental. Para ello es necesario ir más allá de un estudio de los resultados de la actividad matemática, tras los productos hay que estudiar los actos de producción. Una característica común a todos los partidarios de este punto de vista es la aceptación del falibilismo de las matemáticas.

Estos puntos de vista están de acuerdo con la visión falibilista de las matemáticas propuesta por Lakatos. Aunque no queda suficientemente explícito en sus *Pruebas y Refutaciones* (Lakatos 1978) que este autor considere que las matemáticas proceden por negociación, o que la heurística sea la esencia de las matemáticas en lugar de los resultados, estos autores así lo han considerado y han interpretado que Lakatos propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación. Están de acuerdo con él en que las matemáticas son falibles, pero no en que las matemáticas y el conocimiento científico en general evolucione por pruebas y refutaciones hacia la verdad tal como propone Popper.

Entre las contribuciones más recientes a este punto de vista destaca la propuesta de Kitcher. Un punto de vista intermedio entre Piaget y el pragmatismo es el de Kitcher. Este autor sostiene (Kitcher 1984) que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a objetos cualesquiera. El *input* original es empírico y útil y, luego, la capacidad humana de realizar acciones operatorias hace las matemáticas herméticas a la influencia empírica o pragmática cotidiana. Para Kitcher, los nuevos resultados matemáticos obedecen a la necesidad de resolver problemas que se plantea la comunidad matemática del caso. Para Kitcher la materia última de las matemáticas es la forma en la cual los seres humanos estructuramos el mundo, realizando manipulaciones físicas o a través de las operaciones del pensamiento. Las matemáticas son como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual le atribuimos poderes de actuación que van más allá de los que tenemos – por ejemplo, recorrer la secuencia de los números naturales – con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar el ambiente que nos rodea.

Este sujeto ideal es esencial para poder dar cuenta de gran parte de las matemáticas que se han producido. Ahora bien, la introducción de este sujeto ideal conlleva el peligro de hacer pensar que las matemáticas puedan desarrollarse a partir de estipulaciones arbitrarias de esos poderes y que, por tanto, generen conceptos matemáticos carentes de significado o de utilidad. Kitcher considera que este peligro se evita por la actuación conjunta de dos factores. Uno es la comunidad matemática y el otro es que las acciones nuevas que establecemos como realizables no son acciones arbitrarias sino aquellas que extienden acciones que en un nivel inferior nos habíamos visto capaces de realizar o que habíamos establecido que eran realizables. Kitcher considera por una parte que la matemática es la ciencia de las operaciones humanas, y por otra que su evolución y racionalidad solo se puede establecer de manera histórica a través de la evolución misma de las comunidades matemáticas, al igual que en las otras ciencias naturales. Para Kitcher la verdad en matemáticas es lo que establece en cada momento la evolución histórica.

Otro punto de vista que pone el acento en los aspectos sociales es el de Bloor (1998). Bloor parte del punto de vista propuesto por Mill y analiza la crítica que le hizo Frege. A continuación expone la teoría de

Mill modificada por factores sociales que él considera que superan la crítica de Frege. Para Bloor, la lógica de Mill aporta la idea fundamental de que las situaciones físicas sirven de modelos para los pasos que se dan en el razonamiento matemático (una idea desarrollada posteriormente por la didáctica de las matemáticas). Pero este análisis no da la sensación de ser correcto, hay algo que le falta. Las objeciones de Frege hacen ver cuál es ese ingrediente ausente: la teoría de Mill no hace justicia a la objetividad del conocimiento matemático, no da cuenta de la naturaleza ineluctable de sus deducciones, no explica por qué las conclusiones matemáticas dan esa sensación de no poder ser distintas de las que son. Para Bloor el componente sociológico explica cómo se dota de un aura de autoridad a las matemáticas.

Entre los enfoques que ofrecen una visión social de las matemáticas destaca el "constructivismo social". Ernest (1998) explica la actividad matemática a partir del constructivismo social. Este punto de vista filosófico aplicado a las matemáticas se basa en: 1) La lógica del descubrimiento matemático propuesta por Lakatos basada en la prueba y la refutación. Ernest interpreta que en *Pruebas y Refutaciones* (Lakatos 1978) este autor propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación. 2) Los trabajos de Wittgenstein (1983 y 1987). Ernest recoge de este autor la certeza y la necesidad de las matemáticas derivan de la aceptación de unas "reglas de juego" que se encuentran en una "forma de vida" socialmente preexistente. 3) La interpretación de la objetividad como intersubjetividad. El conocimiento objetivo se entiende como un conocimiento social, cultural, público y colectivo y no como un conocimiento personal, privado o construcción individual ni tampoco como un conocimiento externo, absoluto o trascendente. Dicho de otra manera, no se considera que la intervención constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento lleve a verdades necesarias ni que la objetividad dependa de la adecuación isomórfica del conocimiento a un mundo trascendente. 4) La interpretación de las matemáticas como algo básicamente conversacional. El constructivismo social entiende las matemáticas como algo básicamente lingüístico, textual y semiótico, pero inmerso en el mundo social de la interacción humana.

El constructivismo social de Ernest no pone en cuestión la existencia del mundo de la vida (tanto el físico como el social) ya que presupone su existencia tal como nos lo sugiere nuestro sentido común. No necesita partir de un sujeto que experimenta estas dos esferas de la realidad sino que parte de una intersubjetividad histórica previa que ordena y da significado al mundo de la vida del sujeto. En cambio el constructivismo radical (Von Glasersfeld 1995) toma como punto de partida la experiencia del sujeto ya que sus dos principios básicos son: 1) el conocimiento es activamente construido por el sujeto y 2) la función de la cognición es organizar nuestro mundo de experiencias y no descubrir una realidad trascendente. El constructivismo radical, si bien propone un punto de vista de tipo constructivista-pragmático que puede llegar a ser compatible con el constructivismo social, corre el peligro de caer en el solipsismo tal como argumentan sus críticos.

Otra de las líneas de investigación que, a nuestro parecer, también se puede englobar en este paradigma pragmático-constructivista son los estudios de tipo antropológico que han puesto de manifiesto el hecho de que las diferentes sociedades han generado diferentes clases de matemáticas. Si al el cuestionamiento de la distinción analítico-sintético, ya apuntada por Splenger pero argumentada fundamentalmente por Quine, le sumamos que cada cultura genera su matemática, hay que matizar la suposición que considera que las matemáticas dependen de la experiencia de la manera siguiente: las diferentes sociedades han fundado sus respectivas matemáticas sobre la experiencia, pero en una experiencia que resulta de seleccionar ciertos hechos según criterios mudables, una experiencia a la que se dota de significados, conexiones y usos que también son variables.

Para Bishop (1999), existen seis actividades sociales esenciales que constituyen el fundamento para el desarrollo de las matemáticas propias de cada cultura: "todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas, como respuesta a las 'demandas' del entorno experimentadas a través de estas actividades" (p. 83).

Estas son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Bishop considera que, si bien todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas como respuesta a las demandas del entorno experimentadas a través de estas actividades, como resultado de ciertos desarrollos intraculturales y también de la interacción y el conflicto entre culturas diferentes, han surgido las "Matemáticas", la disciplina internacionalizada que conocemos hoy y que tiene su principal foco de crecimiento en la tecnología.

Para Bishop las Matemáticas, además de ser una clase determinada de tecnología simbólica, también es portadora, y al mismo tiempo producto, de unos valores determinados. Estos son: racionalismo, objetivismo, control, progreso, apertura y misterio. Este punto de vista antropológico ha mostrado interés en la investigación de los problemas que tienen las personas que aprenden matemáticas en situaciones de "conflicto cultural", es decir, donde su cultura propia difiere marcadamente de la cultura de la escuela. Por ejemplo, poblaciones indígenas que están en una situación minoritaria o bien inmigrantes recientes en sociedades occidentales europeas.

Los puntos de vista anteriormente comentados, al destacar el papel que la negociación de los significados juega en la construcción personal, han producido una ampliación (o desplazamiento) del punto de vista constructivista hacia consideraciones de tipo social e institucional. Los puntos de vista pragmático-constructivistas parten de una comunidad pre-dada en la que se forma el sujeto. El proceso de incorporación del sujeto a esta comunidad lo hace partícipe de una intersubjetividad. Una caracterización que puede ser aceptada, por su generalidad, por las diferentes variantes pragmático-constructivistas es la siguiente: *el sujeto, que se ha formado como sujeto dentro de una comunidad y que, por tanto, es partícipe de una intersubjetividad, a partir de sus acciones y operaciones sobre el medio físico y social (normalmente realizadas en instituciones), construye un objeto (sistema organizado de objetos) matemático personal, que se puede representar en el mundo material por diferentes sistemas de signos sujetos a unas determinadas reglas (sintácticas, semánticas y pragmáticas) vehiculadas por el lenguaje y consensuadas por la intersubjetividad (objeto institucional)*. Desde esta perspectiva la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno a ser, parafraseando a Heidegger, un alumno-en-una-institución.

El paso de considerar el "alumno" a considerar " el "alumno-en-una-institución" obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos. El constructivismo psicológico, y en general todas las investigaciones realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas desde el enfoque cognitivo, se han centrado en los objetos personales. En el otro extremo tenemos la antropología cognitiva propuesta por

Chevallard y sus colaboradores (Chevallard 1992 y 1999, Chevallard, Bosch y Gascón 1977) en la que prima el aspecto institucional y el sujeto se considera un simple "corte institucional":

> Lo que vemos como un individuo concreto no es más que "un corte institucional" de la persona, es decir aquello que la institución en la que nos situamos, y desde donde miramos a la persona en cuestión, nos permite percibir en un momento dado. (Bosch 1994, p. 10)

Entre estos dos extremos tenemos diferentes teorías que intentan explicar la dialéctica personal-institucional sin olvidar ninguno de los dos polos. Entre estas teorías destaca la teoría de los objetos personales e institucionales (Godino y Batanero, 1994; Font, 2000) la cual postula unas entidades mentales que no nos alejan de las prácticas que se observan en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen en el curso de una interacción en el marco de una institución.

La crítica que se hace a los puntos de vista constructivistas-pragmatistas es que caen en un cierto relativismo ya sea éste social o histórico. Ahora bien, el énfasis en lo social les lleva a postular una aproximación a las matemáticas que obliga a superar los puntos de vista apriorísticos sobre las matemáticas.

Referencias

ACEVEDO, A.; FONT, V. y GIMÉNEZ, J. (en prensa). Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. *Proceedings CIEAEM54*.

BISHOP, A. (1999). *Enculturación matemática*. Barcelona, Paidós.

BLOOR, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social*. Barcelona, Gedisa

BOSCH, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Barcelona, Universitat Autónoma de Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 12, n. 1, pp. 73-112.

______ (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, ICE-Horsori.

COLL, C. (1989). *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori*. Barcelona, Departament d'Ensenyament de la Generalitat.

DAVIS, P. y HERSH, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona, Labor-MEC.

DÖRFLER, W. (1991). "Forms and Means of Generalization in Mathematics". In: BISHOP, A. J.; MELLIN-OLSEN, S. y VAN DORMOLEN, J. (eds.). *Knowledge: its Growth Through Teaching*. Dordrecht, Kluwer A. P.

DOU, A. (1970). *Fundamentos de matemáticas*. Barcelona, Labor

DUBINSKY, E. (1991). "Reflective Abstracción in Advanced Mathematical Thinking". In: TALL, D. (ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Kluwer A. P.

______ (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, v. 8, n. 3, pp. 25-41.

ENGLISH, L. D. (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*. Hillsdale, N. J., Erlbaum.

ERNEST, P. (1998). Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics. In: ALSINA, C. et alii (eds.). *ICME 8 (1996). Selected Lectures*. Sevilha, S.A.E.M. Thales.

FONT, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simboliques a partir de graphiques. Aplicacions a les derivades.* Tesis doctoral. Barcelona, Universitat de Barcelona.

______ (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*, v. 6, n. 2, pp. 180-200.

______ (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, v. 7, n. 2, pp. 127-170.

FONT, V. y PERAIRE, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, v. 13, n. 2, pp. 55-67.

FREGE, G. (1998). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Madrid, Tecnos.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of matehematical structures*. Dordrecht, Reidel.

GÖDEL, K. (1994). *Ensayos inéditos*. Barcelona, Mondadori.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 14, n. 3, pp. 325-355.

GUZMÁN, M. de (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona, Labor

HEIDEGGER, M. (1975). *La pregunta por la cosa*. Buenos Aires, Alfa

IBARRA, A. y MORMANN, T. (1997). *Representaciones en la ciencia. De la invariancia estructural a la significatividad pragmática*. Barcelona, Ediciones del bronce.

KITCHER, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford, Oxford University Press.

KITCHER, P. y ASPRAY, W. (eds) (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis, University of Minnesota Press.

KUHN, T. (1981). *La estructura de las revoluciones científicas*. Madrid, Fondo de Cultura Económica.

LAKATOS, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid, Alianza Editorial.

LAKATOS, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid, Alianza Editorial.

LAKOFF, G. e JOHNSON, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid, Cátedra.

LAKOFF, G. y NÚÑEZ, R. (1998). "Conceptual metaphor in mathematics". In: KOENIG, J. P. (ed.). *Discourse and Cognition: Bridging the Gap*. Stanford, CSLI/Cambridge.

_____ (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, Basic Books.

MACNAB, D. S. y CUMMINE J. A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. Madrid, Visor.

MASON, J.; BURTON, L. y STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. M.E.C. Madrid, Labor.

MOSTERÍN, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona, Ariel

NÚÑEZ, J. M. y FONT, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las Matemáticas. Una aproximación histórica. *Revista de Educación*, n. 306, pp. 293-314.

NÚÑEZ, R. (2000). "Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics". In: NAKAORA, T. y KOYAMA, M. (eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. V. 1, pp. 3-22. Hiroshima, Hiroshima University.

NÚÑEZ, R. y LAKOFF, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ξ-∂ continuity. *Mathematical Cognition,* v. 4, n. 2, pp. 85-101.

OMNÈS, R. (2000). *Filosofía de la ciencia contemporánea*. Barcelona, Idea Books.

PENROSE, R. (1989). *La nueva mente del emperador*. Barcelona, Grijalbo Mondadori.

PIAGET, J. (1979). "Los problemas principales de la epistemología de la matemática". In: PIAGET, J. (comp.). *Epistemología de la matemática*. Buenos Aires, Paidós.

PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, MEC/Morata.

POLYA, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problema?*. México, Trillas.

QUINE, W. V. O. (1974). *La relatividad ontológica y otros ensayos*. Madrid, Revista de Occidente.

_____ (1986). *Los métodos de la lógica*. Barcelona, Planeta-De Agostini.

REICHENBACH, H. (1951). *The Rise of Scientific Philosophy*. Berkeley, University of California Press.

RESNICK, L. B. y FORD, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona, Paidós/MEC.

RESTIVO, S. (1992). *Mathematics in Society and History*. Dordrecht, Kluwer.

RUSSELL, B. (1988). *Introducción a la filosofía matemática*. Barcelona, Paidós.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York, Academic Press.

SPENGLER, O. (1958). *La decadencia de Occidente*. Madrid, Espasa Calpe.

STARK, W. (1963). *Sociología del conocimiento: el pensamiento Sociológico en la Historia de las Ideas*. Madrid, Morata.

VAN DORMOLEN, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. In: BISHOP, A. J. y MELLING OLSEN, S. (eds.). *Knowledge: its Growth Through Teaching*. Dordrecht, Kluwer.

VON GLASERSFELD, E. (1995). *Radical Constrctivism. A Way of Knowing and Learning*. London, The Falmer Press.

WITTGENSTEIN, L. (1983). *Investigacions Filosòfiques*. Barcelona, Laia.

_____ (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid, Alianza Editorial.

Recebido em nov./2000; aprovado em fev./2001