

Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques*

BRUNO BELHOSTE**

Résumé

Dans cette communication je voudrais défendre le point de vue selon lequel la mise en commun du savoir mathématique, c'est-à-dire sa socialisation au sein de communautés de spécialistes et de communautés d'utilisateurs, qu'elles soient savantes ou de métier, voire même dans l'ensemble du corps social, constitue un aspect essentiel de l'activité mathématique, partie intégrante de l'activité d'invention. Que, de manière générale, il n'existe pas de sphère de la production théorique qui serait entièrement autonome, mais plutôt des activités intellectuelles engagées dans des contextes spécifiques qui déterminent les conditions de leur développement.

Mots-clé: *histoire des mathématiques; épistémologie; enseignement des mathématiques.*

Resumo

Neste artigo procura-se mostrar como a socialização do saber matemático constitui um aspecto essencial da atividade matemática, representando parte integrante de sua atividade de invenção. Mais, ainda, que não existe uma esfera de produção teórica inteiramente autônoma, mas atividades intelectuais engajadas em contextos específicos, que determinam as condições de seu desenvolvimento.

Palavras-chave: *história da matemática; epistemologia; ensino de matemática.*

Abstract

The aim of the present article is to show how the socialization of mathematical knowledge constitutes an essential aspect of mathematical activity, representing an integral part of its activity of invention. Furthermore, it argues that a theoretical production sphere which is completely autonomous does not exist; rather, there are intellectual activities engaged in specific contexts, which determine the conditions of its development.

Key-words: *history of mathematics; epistemology; mathematics teaching.*

* Este texto foi publicado originalmente na *Revue d'histoire des mathématiques*, da Société Mathématique de France, v. 4, pp. 289-304, 1998.

** INRP – Service d'histoire de l'éducation. Paris. E-mail: belhoste@inrp.fr

De nombreux travaux d'histoire des mathématiques abordent le thème de l'enseignement, et ceci sous les angles les plus divers: études institutionnelles, analyses de cours et de traités didactiques, biographies de mathématiciens, etc. Mais rares sont les historiens des mathématiques qui lui accordent toute l'importance qu'il mérite. C'est que la plupart ils considèrent encore la communication, la transmission et la vulgarisation du savoir mathématique comme des activités secondaires et périphériques.

Sous cette indifférence se cache en fait l'idée fautive que la production mathématique peut être séparée *a priori* par l'historien des conditions de sa reproduction.

Contre ce préjugé, je voudrais défendre le point de vue selon lequel la mise en commun du savoir mathématique, c'est-à-dire sa socialisation au sein de communautés de spécialistes et de communautés d'utilisateurs, qu'elles soient savantes ou de métier, voire même dans l'ensemble du corps social, constitue un aspect essentiel de l'activité mathématique, partie intégrante de l'activité d'invention. Que, de manière générale, il n'existe pas de sphère de la production théorique qui serait entièrement autonome, mais plutôt des activités intellectuelles engagées dans des contextes spécifiques qui déterminent les conditions de leur développement. C'est pourquoi l'étude de la circulation des textes et des pratiques dans le temps et l'espace social et géographique me paraît au cœur du travail de l'historien. Mais cette approche, aujourd'hui banale en histoire des sciences, reste trop peu répandue en histoire des mathématiques, où domine encore une conception idéaliste et rétrospective du développement de la discipline.

L'enseignement constitue lui-même une modalité particulière de la socialisation du savoir dans laquelle le récepteur est en situation d'apprentissage, ce qui implique une mise en forme didactique et l'invention d'activités spécifiques. Du fait de son degré élevé de formalisation et d'institutionnalisation, il joue un rôle décisif non seulement dans la diffusion du savoir et sa transmission intergénérationnelle mais aussi dans sa constitution en science normale, définie au sens de T. Kuhn par des représentations, des valeurs et des pratiques partagées. Son importance est d'autant plus grande en mathématiques qu'il s'agit dans ce cas d'un savoir d'expert, produit par des spécialistes mais qui intéresse un large spectre d'utilisateurs, voire qui intervient dans la formation initiale et générale des élites instruites, d'où la nécessité pour ceux qui l'enseignent de le "transposer" pour l'adapter à ces nouveaux publics. C'est pourquoi

je voudrais plaider pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques.

Mon ambition dans cette note, compte tenu de ces remarques, n'est pas de dresser un bilan critique des travaux historiques déjà entrepris sur ce sujet – dont un certain nombre sont cités dans la bibliographie –, mais plutôt d'indiquer dans quelles directions la recherche devrait, à mon avis, se développer en priorité au cours des prochaines années. Je retiendrai pour cela trois thèmes principaux, qui définissent chacun une orientation de recherche, en me limitant à l'Europe moderne et contemporaine et principalement aux XVIII^e et XIX^e siècles que je connais le mieux. Pour la même raison, je m'appuierai exclusivement sur les cas français, allemand et, dans une moindre mesure, anglais, pour illustrer mon propos. Le premier thème, déjà bien étudié, relève de l'histoire institutionnelle: il concerne le rôle joué par l'enseignement dans l'organisation du champ disciplinaire, la professionnalisation du milieu mathématique et la standardisation des carrières. Le second thème porte sur l'étude des représentations qui régulent l'activité didactique en mathématiques, contribuant ainsi à structurer l'ensemble du champ disciplinaire et à y orienter le travail intellectuel. Comme troisième et dernier thème, je retiendrai la contribution des activités didactiques au développement et à la diffusion des pratiques mathématiques elles-mêmes.¹

Un monde de professeurs

Les mathématiciens, dans leur très grande majorité, sont aujourd'hui des enseignants. Le déroulement des carrières et l'organisation des activités s'effectuent principalement dans un cadre universitaire ou scolaire. L'opinion publique perçoit d'ailleurs les mathématiques avant tout comme une discipline d'enseignement. Pour les mathématiciens en revanche, l'activité de recherche est l'élément primordial qui définit leur identité professionnelle. C'est dire qu'au yeux des pairs, enseigner les mathématiques ne suffit pas pour être mathématicien, il faut encore et surtout produire des résultats mathématiques. Ce point de vue aujourd'hui dominant ne s'est pourtant imposé qu'assez récemment: vers la fin du XIX^e siècle en Europe, pas avant.

¹ Je tiens à remercier Hélène Gispert pour m'avoir aidé, par ses remarques critiques, à améliorer la version initiale de cette note.

L'idée anachronique n'en prévaut pas moins encore que, partout et de tout temps, la condition nécessaire et suffisante pour mériter le titre de mathématicien est d'avoir contribué au progrès des mathématiques. Qu'Archimède, Descartes, Euler et Hilbert soient tous également des mathématiciens paraît en effet une évidence, mais en dirait-on autant de tel maître d'arithmétique du XVII^e siècle ou de tel professeur de mathématiques du XIX^e siècle ?

Pourtant, si l'on considère le statut de mathématicien non comme une catégorie anhistorique, mais comme une construction sociale ayant une histoire, rien n'autorise, par exemple, à définir Descartes comme un mathématicien – ce serait plutôt un philosophe – et à exclure Louis Richard, le professeur de Galois et Hermite au lycée Louis-le-Grand. En réalité c'est bien principalement par l'enseignement que l'activité mathématique se professionnalise en Europe pour donner naissance à la figure moderne du mathématicien. Analyser ce processus est source de nouvelles questions: quelles sont les relations entre la dynamique des institutions scolaires et l'évolution du statut des mathématiciens? Comment, en particulier, la différenciation des formes d'enseignement influe sur la structuration du milieu mathématique et l'organisation du champ disciplinaire? Et quel effet cette prise en compte du contexte scolaire a-t-elle sur la périodisation de l'histoire des mathématiques en général? Dans les universités médiévales, le *quadrivium* (arithmétique, géométrie, musique et astronomie) occupe une place marginale et l'on ignore d'ailleurs quels sont les régents qui l'enseignaient aux artiens. Il semble qu'il faille plutôt chercher du côté des maîtres d'algorisme et d'abaque qui apparaissent au XIV^e siècle en Italie, en France et en Allemagne les premiers exemples en Occident d'une communauté de mathématiciens enseignants. À Florence et dans d'autres villes italiennes, il existe ainsi de nombreuses écoles où l'on enseigne aux futurs marchands l'arithmétique commerciale. Mais c'est surtout à partir du XVI^e siècle que l'enseignement mathématique se développe en Europe. L'apparition de nouvelles techniques militaires, en particulier l'artillerie, la fortification bastionnée et la cartographie, ainsi que le développement de marines de guerre suscitent une forte demande de formation en mathématiques. Devenues un élément de la culture aristocratique liée à la guerre, celles-ci sont enseignées principalement par des maîtres privés de mathématiques. En rapport à ces nouveaux besoins, sont créées également des chaires de mathématiques dans les universités et les collèges. Par exemple, un corps

de professeurs de mathématiques se met progressivement en place dans les collèges jésuites à partir de la fin du XVI^e siècle.

La contribution de tous ces enseignants au progrès des mathématiques est restée en général modeste. Les mathématiciens créateurs, ceux dont l'histoire des mathématiques a retenu le nom, sont pour la plupart des hommes de cour ou de cabinet entrés au service des princes, puis intégrés aux institutions académiques. Euler, au XVIII^e siècle, en est l'exemple emblématique. Les professeurs constituent néanmoins un milieu de réception et une chambre d'écho pour les travaux de recherche dont on ne saurait sous-estimer l'importance. Il reste aux historiens, dans la mesure où les sources le permettent, à explorer plus systématiquement ces milieux mal connus, à repérer les hommes, à en reconstituer les réseaux et les carrières, à en évaluer les savoirs, les enseignements et les productions.

La période entre 1770 et 1820 marque un tournant majeur dans l'émergence d'un statut de mathématicien professionnel, en même temps que la recherche mathématique s'implante dans les institutions d'enseignement. Une nouvelle figure émerge alors, celle du mathématicien professeur, d'abord en France puis partout en Europe. Deux raisons fondamentales expliquent à mon avis cette mutation: d'une part, les États prennent en charge la formation des spécialistes dont ils ont besoin, en particulier des spécialistes militaires, et consacrent les mathématiques, élément traditionnel de leur culture professionnelle, comme discipline d'excellence; les maîtres de mathématiques se trouvent ainsi peu à peu intégrés dans un système de formation des élites administratives; d'autre part, la crise du modèle humaniste de culture scolaire mis en place au XVI^e siècle favorise l'introduction des mathématiques comme élément fondamental de la formation intellectuelle et morale dans l'enseignement de niveau secondaire; la création d'un enseignement secondaire de mathématiques entraîne celle d'un corps enseignant dont l'État doit assurer la formation et l'encadrement.

En France, les examinateurs qui interrogent les candidats à l'admission dans les corps de l'artillerie, du génie et de la marine militaires sont au XVIII^e siècle des mathématiciens membres de l'Académie des sciences. En amont de l'examen, des préparations sont créées dans des collèges d'élite, ouvrant des carrières à des professeurs de mathématiques. En aval de l'examen, des écoles d'ingénieurs sont établies, accordant la première place à l'enseignement des mathématiques. La plus illustre est l'École de Mézières, où Gaspard Monge commence à la fois sa carrière de

professeur et de mathématicien. L'École polytechnique, fondée pendant la Révolution, hérite de l'expérience accumulée dans ces écoles. L'enseignement des mathématiques y est assuré par les plus grands mathématiciens du moment: Lagrange, Monge, plus tard Fourier, Poisson, Cauchy, Liouville et beaucoup d'autres. Mais ces figures prestigieuses ne sont pas isolées. Elles couronnent au XIX^e siècle un corps fonctionnarisé de professeurs de mathématiques qui enseignent dans les lycées. En Allemagne, la réforme humboldtienne d'inspiration néo-humaniste accorde, sur le modèle français, une place importante aux mathématiques dans l'enseignement des Gymnasien. Il en résulte, comme en France, une réorganisation du milieu mathématique autour de l'activité enseignante, mais selon des modalités toutes différentes. Alors qu'en France la presque totalité des mathématiciens du XIX^e siècle est formée à l'École polytechnique, qui est une école d'ingénieurs, et que l'École normale, où se forment les professeurs de lycées, ignore les activités de recherche, en Allemagne, les universités associent organiquement la formation des professeurs des *Gymnasien* et les activités de recherche en mathématiques.

C'est une des raisons pour lesquelles le milieu mathématique au XIX^e siècle est structuré de manière très différente dans les deux pays. En France, il est polarisé selon un axe allant des ingénieurs polytechniciens aux professeurs agrégés de l'Université. Les premiers sont hégémoniques à l'Académie des sciences et dans les hauts établissements parisiens d'enseignement et de recherche tandis que les seconds sont implantés presque exclusivement dans les lycées et les facultés de province. La domination des polytechniciens se traduit par le contrôle qu'ils exercent sur l'enseignement des mathématiques de niveaux secondaire et supérieur tant par l'intermédiaire de l'examen d'admission à l'École polytechnique que directement au Conseil de l'instruction publique et à l'inspection générale. Il faut attendre le développement de l'enseignement supérieur, à partir de la fin des années 1870, pour que la situation se transforme progressivement: les enseignants des nouvelles universités, formés pour la plupart à l'École normale supérieure, s'imposent progressivement comme les nouveaux leaders du milieu mathématique, tant dans l'enseignement que dans la recherche, tandis que recule l'influence des polytechniciens.

En Allemagne, malgré des différences entre les États et une hiérarchisation des postes, le milieu mathématique formé dans les universités semble plus homogène, permettant une circulation des hommes

et des idées entre les *Gymnasien*, les *Technische Hochschulen* et les universités. À tous les niveaux, le contact avec la recherche est une condition pour entrer et progresser dans la profession enseignante. Les carrières mathématiques en Allemagne peuvent ainsi se développer dans un espace moins cloisonné et centralisé qu'en France. Quant à l'Angleterre du XIX^e siècle, ou n'existent ni réseau national d'établissements secondaires, ni système d'écoles d'ingénieurs, elle offre encore un cas différent de structuration du milieu mathématique, à caractère essentiellement bipolaire, avec un pôle universitaire à Cambridge et un pôle londonien où se développent des enseignements à visée utilitaire.

Ces quelques éléments montrent l'intérêt qu'il y aurait à étudier la structuration des milieux mathématiques dans les différents environnements nationaux en prenant en compte non seulement les mathématiciens, productifs mais aussi l'ensemble des enseignants de mathématiques quel que soit le niveau où ils enseignent. Ce travail, à peine commencé, passe à la fois par l'analyse structurelle des différents segments du milieu professionnel, par exemple celui des professeurs des classes préparatoires en France, ou celui des professeurs des *Technische Hochschulen* en Allemagne, et par l'analyse prosopographique des populations concernées, permettant la reconstitution systématique des formations et des carrières.

Enseignement et représentation des mathématiques

Une pareille étude sociographique ne prendrait cependant tout son sens qu'associée à l'analyse du champ mathématique, au sens de Pierre Bourdieu, c'est-à-dire de l'espace des positions dans lequel se déploient les carrières et les intérêts des mathématiciens. Ce champ, qui est lui-même un produit historique, peut être décrit aussi bien au point de vue de ses institutions qu'au point de vue des représentations collectives qui y régulent le travail intellectuel. Dans les deux cas, le rôle de l'enseignement est fondamental, surtout aux XIX^e et XX^e siècles.

Je n'insisterai pas ici sur les institutions. J'ai déjà évoqué plus haut le rôle bien connu des établissements d'enseignement dans l'organisation du milieu mathématique. Mais, comme on l'a déjà vu, il n'existe pas de modèle unique: non seulement les relations institutionnelles entre enseignement et recherche ont évolué considérablement entre le début du XIX^e siècle et aujourd'hui, mais encore la situation est très différente

selon les pays et les établissements. À l'École polytechnique, c'est seulement dans les premières années après la fondation qu'enseignement et recherche sont associés organiquement. Lagrange et Monge donnent des leçons aux élèves les plus avancés où ils présentent des travaux et résultats inédits, le premier sur la théorie des fonctions analytiques, le second sur la géométrie infinitésimale et les élèves eux-mêmes sont invités à entreprendre des recherches originales. Plus tard, en revanche, la recherche est bannie de l'École, les leçons devant suivre strictement un programme défini à l'avance. C'est dans le choix des principes et des méthodes que le professeur peut introduire des innovations. Mais les difficultés rencontrées par Cauchy dans son enseignement montrent le peu de liberté dont dispose dorénavant le professeur. En fait, l'École polytechnique cesse progressivement d'être un lieu de recherche entre 1805 et 1830.

À Cambridge, l'enseignement des mathématiques est conçu comme le moyen d'une éducation "libérale", préparatoire aux études spécialisées de droit et de médecine. Le système très conservateur des examens (le *mathematical Tripos*) ne laisse aucune place à la recherche qui reste donc nettement séparée de l'enseignement. Dans les universités allemandes, en revanche, la recherche est considérée comme une activité normale des professeurs, à laquelle sont associés les étudiants les plus avancés engagés dans la préparation d'un doctorat. Ainsi se développent au XIX^e siècle des traditions de recherche dans chaque université où s'illustrent de grands mathématiciens: Jacobi à Königsberg; Weierstrass, Kummer et Kronecker à Berlin; Gauss, Dirichlet, Riemann et Clebsch à Goettingen. F. Klein, à la fin du siècle, pousse le modèle à son apogée en faisant de Goettingen un centre d'enseignement et de recherche de rayonnement international.

Plus que sur le rôle des établissements d'enseignement, je voudrais insister sur la façon dont l'activité didactique contribue à modeler les représentations mathématiques elles-mêmes. Par exemple, la distinction entre l'élémentaire et le supérieur qui structure d'une certaine manière le savoir mathématique renvoie directement à l'enseignement. En France, le corpus des mathématiques élémentaires, constitué au XVIII^e siècle et révisé pendant la Révolution, est enseigné au lycée: il comprend jusqu'à la fin du XIX^e siècle l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie dites élémentaires, à l'exclusion des méthodes de transformation qui caractérisent la "géométrie moderne" et des méthodes infinitésimales du calcul différentiel et intégral. Il faut attendre les réformes de l'enseignement secondaire du début du XX^e siècle pour que ces frontières jusqu'alors

intangibles soient remises en cause, avec l'introduction dans les programmes des notions de fonction numérique et de transformation géométrique.

L'opposition fondamentale pour l'image des mathématiques aux XIX^e et XX^e siècles entre mathématiques pures et mathématiques appliquées est elle-même partiellement instituée par l'activité d'enseignement. L'origine en remonte au dernier tiers du XVIII^e siècle. À l'École polytechnique, les enseignements de mathématiques sont divisées entre une partie pure – analyse et géométrie descriptive –, et une partie appliquée – géométrie analytique et mécanique rationnelle pour l'analyse, dessin d'ingénieur pour la géométrie descriptive. En aval, les enseignements considérés comme appliqués à l'École polytechnique, s'appliquent à leur tour aux diverses spécialités d'ingénieurs, sous la forme de cours sur la résistance des matériaux, le dessin des fortifications, la science des machines, etc., dans les "écoles d'application", telles que l'École des ponts et chaussées et l'École de l'artillerie et du génie. Dans les universités allemandes du XIX^e siècle, en revanche, les mathématiques que l'on doit enseigner sont celles que l'on considère comme pures, conformément à l'idéal spirituel de la *Bildung*, l'enseignement des mathématiques appliquées étant réservé aux *Technische Hochschulen*. Il existe ainsi, dans le partage entre le pur et l'appliqué, des régimes différents selon les lieux et les époques. L'enseignement à Cambridge montre d'ailleurs que ce partage ne s'est pas imposé partout au XIX^e siècle: tout en étant conçu comme une formation générale de l'esprit, les mathématiques enseignées y sont orientées vers les mathématiques mixtes et la philosophie naturelle.

Je prendrai comme troisième exemple illustrant le rôle joué par l'activité didactique dans les représentations structurantes des mathématiques, l'image de la rigueur telle qu'elle est construite et véhiculée par l'enseignement au cours du XIX^e siècle. L'exposé euclidien de la géométrie, en particulier sous la forme donnée à des fins d'enseignement par Legendre à la fin du XVIII^e siècle, représente longtemps le principal modèle d'une mathématique démonstrative rigoureuse. C'est en référence à ce modèle, et en opposition à la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, que Cauchy élabore à l'École polytechnique sa propre version du cours d'analyse. La rigueur est pour lui une exigence non seulement mathématique mais aussi didactique et idéologique. Très critique vis-à-vis des procédés d'extension des définitions

et des résultats par continuité et analogie formelle, tout en restant fidèle au projet polytechnique d'un enseignement des généralités en vue des applications, Cauchy est toujours soucieux de définir les conditions d'application des méthodes générales qu'il expose aux élèves. Il ne cherche cependant jamais à substituer aux représentations géométriques sous-jacentes un socle qui serait plus rigoureux pour fonder l'analyse. Mis en œuvre dans un cadre didactique très différent, l'idéal de rigueur en analyse promu dans la deuxième moitié du siècle en Allemagne, en particulier par Weierstrass, se traduit en revanche par un rejet de l'intuition géométrique comme fondement du numérique, attitude qui renvoie elle-même au statut marginal de la géométrie à l'Université de Berlin.

Les avantages respectifs de l'approche analytique et de l'approche géométrique en mathématiques sont d'ailleurs pendant longtemps un topos de la mathématique scolaire, illustré par le débat qui fait rage à Cambridge dans la première moitié du XIX^e siècle. La prééminence de la géométrie y trouvait sa raison d'être dans le respect des classiques, Euclide et Newton – la notion de classique renvoyant elle-même à l'idée d'une norme scolaire. Les jeunes turcs de l'Analytical Society, Babbage et Peacock, parviennent à introduire dans le *mathematical Tripos* les notations différentielles et l'analyse telles qu'on les enseigne à l'École polytechnique pendant les années 1820. Mais la supériorité qu'aurait la géométrie comme discipline de l'esprit, selon Whewell et d'autres mathématiciens de Cambridge, explique son retour en force dans le *Tripos* à partir du milieu du siècle.

Pratiques d'enseignement et pratiques de recherche

Une meilleure prise en compte des différents contextes d'enseignement devrait éclairer d'un jour nouveau des thèmes classiques de l'histoire des mathématiques, comme ceux des relations entre domaine pur et domaine appliqué ou du développement de la rigueur en mathématiques évoqués dans la partie précédente. Elle devrait contribuer en particulier à mieux distinguer dans l'analyse de la production mathématique ce qui relève des effets de champ, c'est-à-dire des modes d'organisation et de représentation de la discipline à un moment et en un lieu donné, du travail propre à chaque mathématicien.

Les institutions et représentations structurant le champ disciplinaire déterminent en effet des pratiques, c'est-à-dire des modes de travail, qui

modèlent l'activité mathématique. L'étude de ces pratiques est évidemment décisive pour l'historien des mathématiques. Elle est aujourd'hui à peine commencée. Compte tenu du rôle joué par l'activité didactique dans le champ disciplinaire des mathématiques, on ne s'étonnera pas de voir les pratiques d'enseignement agir sur et interférer avec les pratiques de recherche. Je prendrai trois exemples pour illustrer cette interaction: les pratiques relatives à la rédaction et la résolution des problèmes, les pratiques relatives à la préparation des cours, enfin les pratiques relatives au travail mathématique collectif.

Une façon de définir aujourd'hui l'activité mathématique est de la considérer comme une activité de résolution de problèmes. Sans vouloir discuter ici ce point de vue, je relève qu'il définit assez exactement ce qu'on attend en général d'un élève ou étudiant de mathématiques: savoir résoudre des problèmes posés par l'enseignant ou l'examineur. La résolution de problèmes est donc à la fois une activité didactique et une activité savante. Quel rapport peut-on établir entre l'une et l'autre? S'il n'existe évidemment pas de réponse valable en tout lieu et en tout temps, on peut repérer des cas où la pratique scolaire du problème a exercé une notable influence sur la pratique de recherche elle-même. Je prendrai comme exemple une fois encore les débuts de l'École polytechnique.

Dans sa pédagogie héritée des traditions de Mézeries, Monge accordait la première place à la résolution de problèmes. En géométrie descriptive, le principal travail des élèves consistait à donner la solution graphique de problèmes de géométrie (construction de surfaces, d'intersections de surfaces, de plans tangents, etc.), en s'inspirant des épures dont Monge avait fait graver le modèle. Les problèmes posés par ces constructions graphiques à la règle et au compas, qu'ils devaient traiter en parallèle par les moyens de l'analyse, sont devenus eux-mêmes objet de recherche et de méditation mathématique pour de jeunes géomètres comme Brianchon, Poncelet ou Chasles. Ils sont ainsi à l'origine, pour une part au moins, du développement de la "géométrie moderne" du XIX^e siècle.

Cet exemple montre comment la pratique du problème en situation didactique peut donner naissance à une pratique du problème en situation de recherche. Mais la question est rendue plus complexe du fait qu'il existe des pratiques du problème mathématique en d'autres situations, par exemple en situation ludique. La vaste littérature mathématique sur les problèmes de géométrie du triangle ou d'arithmétique élémentaire au XIX^e siècle, produite principalement par des professeurs, montre la

difficulté des classements trop exclusifs: s'agit-il dans ce cas de problèmes didactiques, de problèmes ludiques, de problèmes savants? En revanche, le lien entre la pratique scolaire et la pratique savante du problème mathématique apparaît clairement dans les activités d'initiation à la recherche. C'est vrai lorsque l'on examine les premiers travaux de mathématiciens du XIX^e siècle, c'est vrai plus encore lorsque l'on considère les sujets de recherche soumis aux doctorants dans les universités du XX^e siècle. On peut supposer non seulement que la pratique didactique du problème a été souvent réinvestie par les mathématiciens dans leur activité de recherche, mais encore qu'à chaque époque, les différences dans les sujets, les styles et les modalités du problème didactique ont influé directement sur les pratiques de recherche elles-mêmes.

Si l'impact sur la recherche de la pratique du problème en situation didactique n'a jamais été étudié à ma connaissance, celui des enseignements magistraux intéresse depuis longtemps les historiens des mathématiques qui y trouvent une source privilégiée et souvent inédite pour étudier les œuvres des mathématiciens. Le point qui m'intéresse ici concerne plutôt la spécificité du cours magistral comme activité mathématique et ce qu'elle implique pour le travail de recherche. En général, l'objectif d'un cours est moins d'exposer des résultats originaux que de donner la meilleure présentation au point de vue didactique de résultats connus. Plutôt qu'à découvrir, le travail créatif consiste ici à mettre en ordre, à clarifier, à simplifier. Ce travail peut aboutir parfois à l'invention de nouveaux concepts, de nouvelles méthodes, de nouvelles théories, mais surtout il contribue puissamment à organiser le savoir mathématique en imposant des choix: quelles sont les connaissances prérequisées, quels sont parmi les résultats ceux qui sont jugés essentiels, ceux qui sont accessoires, ceux qu'il suffit de renvoyer en exercices d'application? Ces choix impliquent en effet non seulement une opinion sur la valeur didactique de tel ou tel mode d'exposition mais aussi une vision de la nature et de la structure du savoir mathématique. De manière générale, le cours magistral ouvre ainsi souvent la voie à la rédaction du traité de mathématiques, comme le montrent de nombreux exemples depuis Lagrange jusqu'à Bourbaki. Le cas Bourbaki est particulièrement éclairant puisque l'idée originale, consistant à remplacer par un nouveau cours le traité d'analyse de Goursat utilisé dans l'enseignement supérieur français depuis le début du XX^e siècle aboutit au projet grandiose d'écrire des *Eléments* qui fixeraient les bases de la mathématique moderne.

Prenons, pour illustrer le propos, la théorie des fonctions elliptiques telle qu'elle est présentée au XIX^e siècle. Dans les années 1820, ni Legendre, ni Abel, ni Jacobi n'en donnent d'exposé didactique. Le premier à l'enseigner est Jacobi, en 1835: c'est à cette occasion qu'il prend les fonctions θ , définies par des séries de Fourier, comme point de départ de la théorie. En 1848, Hermite donne à son tour un cours au Collège de France sur les fonctions elliptiques: l'étude de ces fonctions y est fondée, pour la première fois, sur la théorie des fonctions de variable complexe: développée par Cauchy. Puis Riemann, dans ses leçons sur les fonctions elliptiques données à Goettingen sept ans plus tard, en 1855-56, adopte un point de vue géométrique: les fonctions elliptiques y sont considérées, comme des fonctions paramétrant une surface de Riemann à deux feuillettes et quatre points de ramification. Enfin Weierstrass introduit sa célèbre fonction \wp comme élément fondamental de la théorie des fonctions elliptiques dans ses leçons données à Berlin en 1863. À chaque fois, on voit que le mode d'exposition adopté par le professeur pour introduire la théorie des fonctions elliptiques dépend de la conception générale de l'analyse qu'il veut promouvoir à travers son enseignement magistral.

La préparation du cours est en général une activité solitaire, mais sa rédaction est souvent collective: non seulement le professeur peut tenir compte des observations de ses auditeurs, mais il lui arrive de laisser à un élève le soin de le rédiger pour le publier, selon une pratique universitaire communément admise. Cette collaboration entre maîtres et élèves dans la rédaction des leçons illustre la dimension collective de l'activité didactique. Dans quelle mesure cette pratique de travail est-elle passée de l'enseignement à la recherche? Y répondre contribuerait, je pense, à mieux comprendre la genèse et le fonctionnement des écoles mathématiques aux XIX^e et XX^e siècles. Prenons l'exemple déjà cité de l'École de Monge en géométrie. À l'origine de cette école mathématique se trouve l'enseignement de Monge lui-même. Dès 1794, celui-ci organise en séminaire de recherche la petite école où sont formés les moniteurs qui encadreront les élèves de l'École polytechnique (les "chefs de brigade"), parmi lesquels Malus, Biot et Lancret. Au cours des années suivantes, il encourage les élèves à entreprendre des travaux mathématiques personnels, à confronter et à échanger leurs résultats, comme en témoigne la partie mathématique de la *Correspondance sur l'École polytechnique* éditée par Hachette. Pour Monge, la meilleure pédagogie est celle qui incite les

élèves à produire ensemble un travail créatif. Néanmoins, les études ne sont pas organisées à l'École polytechnique pour permettre le développement d'une telle activité collective de recherche. Celle-ci s'étiole après la retraite de Monge en 1809 et disparaît lorsque l'École est réorganisée en 1816.

En revanche la création, sur le modèle des séminaires de philologie, de séminaires mathématiques dans les universités allemandes institutionnalise le travail collectif de recherche. À l'origine, le séminaire fonctionne comme une préparation à l'enseignement secondaire: sous la direction du professeur, les étudiants présentent des leçons en se critiquant mutuellement. Mais les sujets ne se limitent pas aux questions enseignées au *Gymnasium*. Les étudiants doivent aussi présenter des travaux personnels. Le séminaire pédagogique devient ainsi en même temps un séminaire de recherche. C'est Jacobi, en collaboration avec Franz Neumann, qui crée le premier séminaire de mathématiques et physique à l'Université de Königsberg en 1835. Le modèle se diffuse progressivement dans les autres universités allemandes, à Fribourg, Göttingen, Munich, Breslau, Heidelberg, Tübingen, Giessen, Berlin, etc. Ce sont ces séminaires qui donnent corps aux différentes écoles de recherche qui caractérisent l'activité mathématique en Allemagne au XIX^e siècle.

L'importance de l'enseignement pour l'histoire des mathématiques ne se limite évidemment pas aux seuls thèmes que j'ai retenus pour cette note. Parmi les nombreuses autres orientations de recherche possibles, j'en évoquerai pour conclure deux qui me paraissent aussi prometteuses. La première concerne la place de l'enseignement des mathématiques dans le développement des domaines de recherche et la constitution des spécialités, depuis l'algèbre en Europe à la fin du Moyen Âge jusqu'à "l'algèbre moderne" des années 1920, en passant par le calcul infinitésimal au début du XVIII^e siècle, la géométrie descriptive entre 1760 et 1810, la cinématique entre 1830 et 1860 et l'analyse réelle à la fin du XIX^e siècle, pour prendre quelques exemples au hasard. Non que les historiens qui se sont intéressés déjà à ces questions aient négligé l'enseignement – ne serait-ce que comme une source, à travers les cours, les manuels et les traités –, mais rares sont ceux qui ont été jusqu'à le considérer comme un moteur du développement disciplinaire. La deuxième orientation que je retiendrai ici concerne l'influence exercée par l'enseignement mathématique hors du milieu mathématique lui-même, par exemple sur les modes de pensée et de travail des marchands, des ingénieurs ou des

artistes, ou, plus généralement encore, sur la culture intellectuelle des élites instruites. S'ouvre là un vaste champ de recherche, qui dépasse d'ailleurs l'histoire des mathématiques *stricto sensu* pour toucher l'histoire des cultures professionnelles et des cultures savantes. Les quelques pistes évoquées dans cette note voudraient en tout cas convaincre que l'enseignement ne doit pas constituer seulement pour l'historien des mathématiques une source où puiser une documentation ou un décor à planter pour un scénario, mais bien un élément à part entière de sa problématique.

Bibliographie²

- BEAUJOUAN, G. (1991). *Par raison de nombres: l'art du calcul et les savoirs scientifiques médiévaux (Variorum, Collected Studies Series CS 344)*. Aldershot, Ashgate.
- BECHER, H. W. (1980). William Whewell and Cambridge Mathematics, *Historical Studies in the Physical Sciences*, n. 11, pp. 1-48.
- BELHOSTE, B. (1995). *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels réunis et présentés par Bruno Belhoste. Tome 1, 1789-1914*. Paris, Institut National de Recherche Pédagogique et Éditions Économica.
- BIAGIOLI, M. (1989). The Social Status of Italian Mathematicians, 1450-1600. *History of Science*, n. 27, pp. 41-95.
- BIERMANN, K.-R. (1973). *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1933: Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung*. Berlin, Akademie-Verlag (rééd. 1988).
- CROMBIE, A. C. (1977). "Mathematics and Platonism in the Sixteenth-Century Italian Universities and in Jesuit Education Policy". In: MAEYAMA, Y. et SALTZER, G. (éds.). *PRIS-MATA, Naturwissenschaftsgeschichtliche Studien (Festschrift für Willy Hartner)*. Wiesbaden, Franz Steiner Verlag, pp.63-94.

2 Faute de pouvoir citer tous les travaux abordant de pres ou de loin l'histoire de l'enseignement des mathématiques, je n'ai retenu dans cette bibliographie très sélective que quelques ouvrages et articles récents dont la lecture a inspiré tout particulièrement la rédaction de cette note.

- DHOMBRES, J. (1985). French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy. *Historia Scientiarum*, n. 28, pp. 91-137.
- DHOMBRES, J. (1992) L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge, édition annotée des cours avec introductions et annexes sous la direction de Jean Dhombres. Paris, Dunod.
- DURAND-RICHARD, M.-J. (1996). "L'école algébrique anglaise et les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance". In: GOLDSTEIN, C.; GRAY, J. et RITTER, J. (éds.). *L'Europe mathématique. Histoires, Mythes, Identités*. Paris, Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, pp. 447-477.
- FEINGOLD, M. (1984). *The Mathematician's Apprenticeship Science, Universities and Society in England, 1560-1640*. Cambridge, Cambridge University Press.
- GASCOIGNE, J. (1984). Mathematics and Meritocracy: The Emergence of the Cambridge Mathematical Tripos. *Social Studies of Science*, n. 14, pp. 547-584.
- GISPERT, H. (1991). La France mathématique. La Société mathématique de France (1872-1914). Paris, Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques et Société Mathématique de France. *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*.
- JAHNKE, H. N. (1990). *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*. Göttingen, Van-denhoek & Ruprecht.
- PYENSON, L. (1983). *Neohumanism and the Persistence of Pure Mathematics in Wilhelminian Germany*. Philadelphia, American Philosophical Association.
- RICE, A. (1996). Mathematics in the Metropolis: A Survey of Victorian London. *Historia Mathematica*, n. 23, pp.376-417.
- RICHARDS, J. L. (1988). *Mathematical Visions. The Pursuit of Geometry in Victorian England*. Boston, Academic Press.
- ROWE, D. E. (1989). Klein, Hilbert and the Göttingen Mathematical Tradition. *Osiris*, 2nd series, n. 5, pp. 186-213.
- SAKAROVITCH, J. (1998). *Épures d'architecture. De la coupe des pierres à la géométrie descriptive, XVI^e-XIX^e siècles*. Basel, Birkhäuser Verlag.

- SCHUBRING, G. (1981). Mathematics and Teacher Training: Plans for a Polytechnic in Berlin. *Historical Studies in the Physical Sciences*, n. 12, pp. 161-194.
- SCHUBRING, G. (1983). *Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert. Studien und Materialien zum Prozess der Professionalisierung in Preussen (1810- 1870)*. Weinheim/Basel, Beltz.
- _____ (1985). Die Entwicklung des mathematischen Seminars der Universität Bonn, 1864-1929. *Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, n. 87, pp. 139-163.
- _____ (1989). "Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: the Role and Impact of Felix Klein". In: ROWE, D. and McCLEARY, J. (eds.). *The History of Modern Mathematics*. 2 v. Boston, Academic Press.
- TATON, R. (dir.) (1964). *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII^e siècle*. Paris, Hermann.
- VAN EGMONT, W. (1980). Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abacus Manuscripts and Printed Books to 1600. *Supplemento agli Annali del l'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, Firenze.

Recebido em mar./2001; aprovado em maio/2001