

Production mathématique, enseignement et communication*

GERT SCHUBRING**

Résumé

Dans une note parue dans le volume 4 (1998) de la Revue d'histoire des mathématiques, Bruno Belhoste avait discuté le rôle de l'enseignement pour le développement des mathématiques et l'importance plus ou moins grande accordée à cette dimension dans les recherches sur l'histoire des mathématiques. La présente note prolonge cette contribution méthodologique en généralisant, en particulier, la notion d'enseignement compris comme élément de communication inhérent à tous les processus de production.

Mots-clé: *histoire des mathématiques; épistémologie; enseignement des mathématiques.*

Resumo

Num texto publicado no volume 4 (1998) da *Revue d'histoire des mathématiques*, Bruno Belhoste discutiu o papel do ensino no desenvolvimento da Matemática e a importância dada a esta dimensão nas pesquisas sobre história da Matemática. O presente trabalho dá continuidade a essa contribuição metodológica generalizando, particularmente, a noção de ensino entendida como elemento de comunicação inerente a todo processo de produção do saber.

Palavras-chave: *história da matemática; epistemologia; ensino de matemática.*

Abstract

*In a text published in volume 4 (1998) of *Revue d'histoire des mathématiques*, Bruno Belhoste discussed the role of teaching in the development of Mathematics and the importance given to that dimension in research on the history of Mathematics. The present article takes up that methodological contribution, generalizing, in particular, the notion of teaching understood as an element of communication inherent in every process of knowledge production.*

Key-words: *history of mathematics; epistemology; mathematics teaching.*

* Este artigo foi originariamente publicado na *Revue d'histoire des mathématiques*, da Société Mathématique de France, v. 7, pp. 295-305, 2001.

** Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld. Allemagne.
E-mail: gert.schubring@uni-bielefeld.de

Dans sa contribution au volume 4 de la *Revue d'histoire des mathématiques*, Bruno Belhoste questionne l'"indifférence", toujours majoritaire dans les travaux d'histoire des mathématiques, par rapport au rôle de l'enseignement dans le développement historique des mathématiques. Il y voit le signe d'un "préjugé" nourri par "une conception idéaliste et rétrospective du développement de la discipline" (Belhoste 1998, p. 289). Comme j'appartiens moi-même aux "rares (...) historiens des mathématiques" qui accordent à l'enseignement "toute l'importance qu'il mérite", il est évident que je n'ai pas seulement des sympathies pour le programme proposé par Belhoste visant à réévaluer le rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques, mais je souhaite fortement que ce programme soit reçu et appliqué à de nombreuses études de cas. Belhoste a raison de constater le retard pris par l'histoire des mathématiques sur l'histoire des sciences en ce qui concerne l'intégration des approches sociologiques, par exemple. Si j'entreprends quand-même de commenter sa note, c'est pour proposer une autre approche qui rejoint ses préoccupations et intentions.

Dans sa troisième partie, intitulée "pratiques d'enseignement et pratiques de recherche", Belhoste énonce une thèse apparemment forte sur le rôle de l'enseignement: "les institutions et représentations structurant le champ disciplinaire *déterminent* en effet des pratiques, c'est-à-dire des modes de travail, qui modèlent l'activité mathématique" (id., *ibid.*, p. 298; mes italiques).

Les exemples donnés pour illustrer cette thèse forte ne suffiront pas, à mon avis, pour convaincre un "internaliste" de ce que l'activité mathématique est déterminée par l'enseignement. Tout au plus concéderait-il une certaine "influence". Même l'exemple des fonctions elliptiques ne révèle que des différences de style personnel et ne renvoie pas vraiment à des déterminations structurelles ou fonctionnelles (id., *ibid.*, pp. 300-301). Peut-être, en dépit de son caractère fort, cette thèse est-elle encore trop restrictive; il existe des études de cas qui montrent comment la production mathématique change en relation avec les restructurations des institutionalisations (Gispert 1991).

Dans l'exposé de son cadre programmatique, Belhoste (1998, p. 289) dénonce avec raison "l'idée fausse que la production mathématique peut être séparée *a priori* par l'historien des conditions de sa reproduction". Il critique aussi la vision traditionnelle selon laquelle la "sphère de la production théorique (...) serait entièrement autonome" (*ibid.*). Il me

semble cependant qu'il n'y aura que peu d'historiens des mathématiques qui refuseront de souscrire à ces deux assertions, prises dans leur généralité, sans pour autant changer leurs pratiques de recherche.

Il nous faut donc définir une approche qui évite toute séparation entre production et reproduction, tant dans ses principes méthodologiques que dans les pratiques qui en découlent. Il importe de partir d'un cadre théorique dont les catégories mêmes l'interdisent. Or, en alignant production avec "invention" et enseignement avec "socialisation" ou "divulgaration" ou "réception" (Belhoste, 1998, pp. 289 et 290), on va tout droit vers une séparation. De telles identifications impliquent presque inéluctablement une hiérarchie entre invention et transmission, attribuant à la recherche un aspect premier, original, et à l'enseignement un rôle secondaire, dérivé. Certes, depuis Thomas Kuhn, il est commun d'associer la fonction d'enseignement à la seule phase de "science normale" (ibid., p. 290), mais je voudrais mettre en cause ce consensus.

Willem Kuyk, auteur de *Complementarity in Mathematics* (1977), dénonce cette vue traditionnelle qui attribue un rôle secondaire à l'enseignement. Pour ce, il utilise l'image très parlante de la relation entre stalactites et stalagmites: l'enseignement ne saurait se restreindre au rôle de stalagmites recevant de temps en temps quelques gouttes des stalactites au-dessus d'eux, c'est-à-dire des vraies mathématiques, et croissant de manière infime au fur et mesure que les stalactites les nourrissent (Schubring 1981, p. 32).

Ainsi, on pourrait dire que le défi essentiel pour l'historiographie des mathématiques est de comprendre la production mathématique dans toute sa complexité. Une première approche phénoménologique montre déjà qu'enseignement et invention ne peuvent être séparés quant à la production et qu'ils interagissent d'une manière qui dépend de la situation socio-culturelle. L'évaluation du premier projet historique visant à élaborer des "livres élémentaires", publié par Destutt de Tracy en 1801, en fournit un exemple. Afin de réaliser ce projet entrepris dès 1794 avec un élan encore révolutionnaire et visant à tirer les éléments des sciences dans leur état le plus récent, le Parlement de la République avait fait appel aux savants et au public pour qu'ils contribuent ainsi à répandre les Lumières dans les écoles primaires. Ce premier projet, lancé par un concours public, avait échoué pour plusieurs raisons (id., 1999), dont celle invoquée par Destutt de Tracy: composer un livre d'enseignement implique souvent des tâches de recherche.

Souvent, en rendant compte d'un fait, on s'aperçoit qu'il exige de nouvelles observations, et, mieux examiné, il se présente sous un tout autre aspect: d'autres fois, ce sont les principes eux-mêmes qui sont à refaire, ou, pour les lier entre eux, il y a beaucoup de lacunes à remplir; en un mot, il ne s'agit pas seulement d'exposer la vérité, mais de la découvrir. (Destutt de Tracy 1801, pp. 4-5)

Tout le développement depuis l'instauration d'un système d'éducation publique en France a confirmé et même approfondi ce lien indissociable entre l'enseignement et l'invention. Les recherches suivies et toujours plus profondes sur les concepts de l'analyse, à l'origine desquelles on trouve les cours à l'École polytechnique, confirment ce lien. L'exemple des progrès conceptuels obtenus par Cauchy, après que le gouverneur l'avait introduit par force à la fin de 1815 comme professeur à l'École, est révélateur. Comme il n'avait pas travaillé sur les fondements lors de sa brève carrière d'ingénieur ni pendant la période suivante de chercheur indépendant, il suivit, dans son premier cours de l'hiver 1815/1816, les modèles établis,¹ puis, après des mois consacrés à la réflexion sur le cours d'analyse, son enseignement, en hiver 1816/1817, témoigne d'un changement conceptuel profond.

De même Dedekind, dans la préface de son fameux livre *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), dit avoir noté l'absence d'un fondement rigoureux de l'arithmétique des ses premiers cours d'analyse à l'École polytechnique de Zürich en 1858 (Dedekind, 1969, p. 3). Belhoste (1998, p. 300) mentionne un autre exemple fameux: le travail de Bourbaki débuta par le projet de composition d'un manuel d'analyse plus moderne que celui de Goursat. On sait comment leurs traités destinés à l'enseignement ont contribué de façon décisive à transformer les mathématiques contemporaines.

Comment analyser plus méthodiquement et plus systématiquement la production mathématique, entendue dans ce sens plus large? Selon les exemples présentés par Belhoste dans ses première et seconde parties, le développement des mathématiques se déroule, du moins pour des périodes très étendues, dans des cadres culturels particuliers définis par les États-nations. Or, simplement décrire, juxtaposer ou confronter ce

1 Voir les registres de l'instruction de l'École polytechnique publiés par Christian Gilain (1989, pp. 47-49).

développement pour quelques pays particuliers, choisis en fonction de leur prépondérance à une certaine période, n'est pas satisfaisant. Si l'on ne veut pas se restreindre à des descriptions superficielles des faits, mais que l'on souhaite aller au-delà des premières impressions que fournit cette confrontation, on arrivera sans doute à des conceptions plus fécondes à condition de se servir d'instruments d'analyse adéquats. Ceux-ci devront permettre d'étudier les structures pertinentes du fonctionnement des mathématiques dans des situations culturellement variées et dans des cadres temporels dépassant les seuls XVIII^e et XIX^e siècles. L'histoire des mathématiques ne dispose pas actuellement de tels outils. Pour radicaliser conceptuellement une approche, restreinte aujourd'hui à la simple description phénoménologique, il importe à la discipline de renoncer à son "autarcie" et de s'ouvrir à des recherches véritablement interdisciplinaires. Il est grand temps que l'histoire des mathématiques se rende compte des progrès et des changements qui sont intervenus dans une de ses disciplines "mères", l'histoire proprement dite, et s'approprie les nouvelles approches qui ont vu le jour en histoire des sciences, sa discipline voisine.

Afin de "pousser plus loin", je voudrais présenter une conception que j'avais déjà proposée, au moins partiellement, en 1993 dans le cadre du congrès L'Europe mathématique (Schubring 1996) et qu'il convient de développer ici.² Radicalisant donc les conséquences tirées des observations empiriques sur des différences entre les mathématiques dans certains pays, on peut affirmer qu'il n'y avait pas au départ de communauté mathématique internationale, mais plutôt des communautés mathématiques spécifiques pour des cultures, resp. pour des États et des nations.

La question qui me servira de point de départ est la suivante: quelles sont les unités les plus élémentaires menant à une compréhension commune et partagée du savoir? Pour y répondre, je m'appuierai sur la

2 Il est peut-être aussi à propos de mentionner ici des erreurs dans le texte imprimé: après les dernières épreuves (apparemment), un des éditeurs a remplacé (sans me contacter) là, où je parle des réformes initiées par Félix Klein, "Meran reforms", qui se réfère à la ville de Meran où se tenait le congrès important de 1905, par "Méray reforms", faisant allusion au mathématicien français Charles Méray qui n'avait rien à faire avec les réformes de Klein (Schubring 1996, p. 376). De même, "École normale of the year III" fut remplacée par «École normale supérieure, founded in the year III» stipulant une continuité non existante avec l'ENS établie en 1810 (ibid., p. 378).

théorie sociologique de la science établie par les sociologues allemands Niklas Luhmann et Rudolf Stichweh dans leur théorie des systèmes. Selon cette théorie, c'est la communication qui constitue l'acte élémentaire de la science. C'est sur elle que s'appuient non seulement l'enseignement et l'apprentissage, mais aussi l'invention scientifiques. Cette dernière est toujours un acte de communication avec un public déterminé.

Afin que la communication réussisse, il faut pouvoir s'appuyer sur une langue commune et une culture partagée. Celles-ci seraient donc l'unité élémentaire que nous cherchons. En même temps que les États modernes établissent des germes de systèmes d'éducation publique, les nations naissantes ont commencé à constituer des limites, en restreignant la communication "primaire" à ces unités élémentaires (tandis que pour, disons, l'Europe de l'Ouest avant l'an 1500, le latin comme *lingua franca* et la religion catholique facilitaient la dissémination d'une culture largement partagée). L'existence d'un système général d'éducation spécifique à chaque État a certainement eu pour effet de renforcer les limites imposées à la communication avec l'extérieur. À l'intérieur d'un même système, les processus d'éducation et de socialisation s'étendant sur de multiples années vont amener les jeunes à partager un certain nombre de significations et aussi de valeurs culturelles et sociales. Au sein de l'unité de base ainsi constituée, la communication pourra réussir sans beaucoup de problèmes. Mais tout effort d'aller au-delà de ces bornes nécessitera, pour réussir, de nouvelles interactions et "négociations" portant sur les significations. Pour se faire comprendre et être compris, les interlocuteurs doivent être d'accord sur les significations.

Il y a, dans presque toute culture, un élément fondamental parfois négligé par l'historiographie des mathématiques: la religion. Avant l'émergence des nations modernes, en l'absence d'un système d'éducation général, formant et socialisant les nouvelles générations selon les normes et valeurs reçues, c'étaient les institutions religieuses qui organisaient les relations entre les individus et leur État. Et même dans les nations modernes, il persistait un lien étroit entre l'État et l'Église. Aujourd'hui, alors que domine une impression de sécularisation profonde, la culture reste imprégnée d'éléments de textes sacrés et d'images religieuses, qui fonctionnent encore comme un fond commun de communication. Il y a aussi des résurgences d'activités religieuses, orchestrées par des autorités d'État.

Cet élément culturel récurrent est d'une importance primordiale pour l'histoire des mathématiques, car les diverses religions ont attribué

à celles-ci des valeurs sociales et des fonctions bien différentes; même les diverses croyances chrétiennes montrent des caractéristiques variées. Les fonctions attribuées aux mathématiques se traduisent par des manières et types différents de production scientifique.

Ces normes et valeurs culturelles ou sociales, ces processus d'attribution de sens à des notions au sein de la communauté respective peuvent se "condenser", se constituer et s'exprimer dans et par une épistémologie commune: une épistémologie qui peut aussi se spécialiser pour des disciplines où elle règle les modes de recherche et de travail, la façon de résoudre des problèmes. Piaget et Garcla (1989) ont élaboré très clairement la nature indissociable du lien entre l'épistémologie d'une discipline scientifique et son enracinement socio-culturel (bien que pour eux, contrairement à mon avis, ce cadre épistémique constitue un "facteur endogène": du fait de leur polémique contre T. Kuhn, ils apprécient sa notion du paradigme comme étant seulement "social" et la relèguent au deuxième rang, derrière l'épistémique; cette dépréciation est aussi due à la conception générale de Piaget selon laquelle tous les mécanismes cognitifs fonctionnent universellement, indépendamment des sociétés et des cultures):

Pour nous, à chaque moment historique et dans chaque société, prédomine un certain cadre épistémique, produit des paradigmes sociaux et qui est la source d'un nouveau paradigme épistémique. Une fois constitué un certain cadre épistémique, il devient impossible de dissocier la contribution provenant de la composante sociale de celle qui est intrinsèque au système cognitif. Ainsi constitué, le cadre épistémique commence à agir comme une idéologie qui conditionne le développement ultérieur de la science. (Piaget et Garcla, 1989, pp. 282-283)

En effet, si les mathématiques furent promues, protégées ou institutionnalisées par certains États, c'est aussi parce que l'idéologie véhiculée par la religion dominante leur attribuait des fonctions à mettre au service de l'État. On peut citer quelques exemples:

- en Chine, le Confucianisme attribuait aux mathématiques une fonction utilitaire, sans lien avec les "vraies" valeurs religieuses;
- dans les États arabo-islamiques, les mathématiques avaient une fonction auxiliaire dans la formation des mufti et des khadi, les experts de la foi et de la loi;

- selon la conception dite aristotélicienne des Jésuites, les mathématiques, en tant que discipline philosophique, avaient une fonction propédeutique dans leur système d'éducation largement répandu;
- dans la religion protestante-luthérienne, les mathématiques formaient l'esprit et encourageaient l'industrie. Cette importante fonction prolongeait ainsi les conceptions et pratiques des humanistes.

J'en arrive à une deuxième application de la théorie des systèmes: une société, ou un État, est constituée d'une pluralité de sous-systèmes, qui interagissent entre eux, leurs interactions étant déterminées par les fonctions que les sous-systèmes exercent par rapport aux autres sous-systèmes ou par rapport au système entier. Il est donc évident qu'on ne saurait analyser la production mathématique sans éclairer la fonction que les mathématiques exercent par rapport à d'autres sous-systèmes dans une période, une culture et un État donnés.

En effet, quelque soit le niveau d'activité mathématique considéré, il n'y a jamais eu d'autonomie des mathématiques. En voici quelques exemples:

- Dans l'enseignement secondaire, les mathématiques ne sont qu'une des disciplines concurrentes. Leur fonction, toujours propédeutique, dans le "concert" de l'éducation générale dépend des valeurs attribuées au système d'éducation en général et de la vision ou "idéologie" concernant l'apport potentiel des mathématiques à l'éducation en particulier (Schubring, 1984).
- Dans l'enseignement supérieur, la place des mathématiques doit toujours être négociée avec d'autres disciplines. Au sein de sous-systèmes (poly-) techniques, c'était évidemment toujours une fonction ou propédeutique ou auxiliaire qui déterminait aussi l'orientation de la production mathématique, s'il y avait lieu. En Allemagne, au sein de sous-systèmes universitaires, l'illusion d'une certaine autonomie peut naître à partir des réformes prussiennes, après 1810, à cause de la formation des professeurs de mathématiques pour les *Gymnasien*. Même dans le cas de cette innovation (qui s'est répandue relativement tard à d'autres pays),³ l'apparente autonomie devait être

3 Les premiers processus de réception ont eu lieu après 1848 dans d'autres États allemands (Bavière, Autriche, etc.). Belhoste néglige cette diffusion du modèle prussien de recherche et son mélange avec des systèmes traditionnels, voir catholiques, lorsqu'il

partagée avec d'autres disciplines, de préférence d'abord avec la physique, soit parce que le système d'éducation ne tolérait pas de professeurs qualifiés pour une seule discipline, soit que ce système n'accordait pas aux mathématiques un nombre suffisant d'heures pour élever l'instruction mathématique au statut d'une profession. Non seulement ces liens canoniques à d'autres disciplines influaient sur les directions que suivent les productions, mais ces orientations dépendaient aussi de l'esprit de la formation imposé par les règlements des concours, examens, etc., établis par le système dans sa totalité. C'est en évoquant "l'opposition fondamentale (...) entre mathématiques pures et mathématiques appliquées" que Belhoste (1998, pp. 296-297) aborde le plus explicitement "des régimes différents selon les lieux et les époques"; mais même pour cette dimension caractéristique de la production, il restreint l'effet à "l'image des mathématiques" et à "l'activité d'enseignement" (ibid., p. 296).

- Même pour les Académies, qui constituent souvent les institutions ayant le niveau le plus élevé d'activité mathématique, il faut noter qu'avant 1800 elles ne se consacraient pas à la recherche, mais plutôt à des activités d'expertise scientifique et technologique au service de l'État. Des lieux de recherche réelle ne furent créés qu'assez récemment: Princeton: Institute for Advanced Study (1930), Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA, 1952), Bures-sur- Yvette: Institut des hautes études scientifiques (IHES, 1958), Bonn : Max-Planck-Institut für Mathematik (1981).

En ce qui concerne ces conceptions d'analyse fonctionnelle par systèmes, j'ai moi-même écrit, il y a deux ans, une histoire institutionnelle des mathématiques du XVIII^e siècle, pour le volume V de l'*Enciclopedia Italiana* sur l'histoire des sciences de ce siècle, et j'espère qu'elle ne tardera pas à être publiée.

attribue généralement aux "universités allemandes" ce qui est spécifique aux universités prussiennes (Belhoste, 1998, p. 295). (Schubring, 1991), et qu'il affirme que des séminaires pédagogiques se sont transformés en séminaires de recherche dans des cas non-prussiens, qui fonctionnaient encore longtemps comme des institutions pédagogiques, comme Fribourg, Giessen, Göttingen, etc. (Belhoste, 1998, pp. 301-302).

Pour conclure, j'aimerais proposer moi-même un sujet de recherche: s'attacher aux différences entre les communautés mathématiques nationales peut surprendre aujourd'hui, alors qu'on a l'impression d'être en présence d'une seule communauté mathématique internationale et globale, dont on croit pouvoir projeter l'existence sur des périodes antérieures. En réalité, l'émergence d'une telle communauté internationale constitue un processus assez récent et insuffisamment étudié. Ce processus est certainement lié à l'institution des congrès internationaux de mathématiques et à l'émigration massive de mathématiciens fuyant les dictatures établies en Europe entre les deux guerres mondiales. Un congrès international, "Mathematics Unbound: The evolution of an international mathematical community, 1800-1945", qui eut lieu en juin 1999 à Charlottesville (USA) et dont les Actes vont paraître, a commencé à aborder des dimensions de cette internationalisation. Il est prometteur de poursuivre la recherche sur des processus qui ont réussi à franchir les bornes de la communication "primaire", du moins pour certains secteurs.

Références

- BELHOSTE, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques*, n. 4, pp. 289-304.
- DEDEKIND, R. (1969). Was sind und was sollen die Zahlen? 2. unveränd. Nachdr. d. 10. Aufl., Stetigkeit und irrationale Zahlen, 2. unveränd. Nachdr. d. 7. Aufl. Braunschweig, Vieweg.
- DESTUTT DE TRACY, A. (1801). *Projet d'éléments d'idéologie*, v. 1, Paris.
- GILAIN, C. (1989). Cauchy et le Cours d'analyse de l'École polytechnique, *Bulletin de la Société des amis de la bibliothèque de l'École polytechnique*, 5, juillet.
- GISPERT, H. (1991). "Features of the French mathematics' development and the higher education institutions (1860-1900)". In: SCHUBRING, G. (éd.). 'Einsamkeit und Freiheit' neu besichtigt. Stuttgart, Franz Steiner Verlag, pp. 198-213.
- KUYK, W. (1977). *Complementarity in Mathematics: a First Introduction to the Foundations of Mathematics and its History*. Dordrecht, Reidel.
- LUHMANN, N. (1990). *Die Wissenschaft der Gesellschaft*. Frankfurt am Main, Suhrkamp.

- PIAGET, J. et GARCIA, R. (1989). *Psychogenesis and History of Science*. New York, Columbia Univ. Press.
- SCHUBRING, G. (1981). Gegenständliche und soziale Momente des Wissens als Kategorien für Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik-Didaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, n. 2, pp. 1-34.
- _____ (1984). Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, particulièrement en France et en Prusse. *Recherches en didactique des mathématiques*, n. 5, pp. 343-385.
- _____ (1991). "Spezialschulmodell versus Universitätsmodell: Die Institutionalisierung von Forschung". In: SCHUBRING, G. (éd.). *'Einsamkeit und Freiheit' neu besichtigt*. Stuttgart, Franz Steiner Verlag, pp. 276-326.
- _____ (1996). "Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in 19th century Europe". In: GOLDSTEIN, C.; GRAY, J. et RITTER, J. (éd.). *L'Europe mathématique - Mythes, histoires, identités*. Paris, Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme.
- _____ (1997). *Analysis of Historical Textbooks in Mathematics. Lecture Notes*. Departamento de Matemática. Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Second, revised edition, 1999).
- _____ (à paraître). Mathematics between Propaedeutics and Professional Use: A Comparison of Institutional Developments. *Enciclopedia Italiana*, v. 5 - La Scienza del' 700; part 4.2. Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Rome.
- STICHWEH, R. (1984). *Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen: Physik in Deutschland 1740-1890*. Frankfurt am Main, Suhrkamp.

Recebido em mar./2001; aprovado em abr./2001