Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico

MICHAEL OTTE*

Resumo

Piaget caracteriza o desenvolvimento histórico da Geometria como uma sucessão de três períodos de pensamento: *intrafigural, interfigural* e, finalmente, *transfigural* ou *estrutural*. Discutimos um exemplo para ilustrar a concepção de Piaget de desenvolvimento geométrico e fornecer uma interpretação particular dela. O exemple envolve o Teorema de Euler, que afirma que os pontos concorrentes das mediatrizes, das medianas e das alturas de um triângulo qualquer são colineares. Queremos mostrar que uma melhor compreensão da concepção de Piaget pode ser atingida se a atividade matemática for concebida essencialmente como construção de provas. Nesse contexto, a crítica de Rotman a Piaget é apresentada e discutida. Rotman argumentou que a caracterização de Piaget sobre a Matemática e sua criação é limitada pela sua compreensão equivocada "da natureza e do status da prova" (Rotman 1977, p. 151). Segundo Rotman, que se concentra nos aspectos semióticos e sociais da Matemática: "O erro central do estruturalismo de Piaget é a idéia de que é possível explicar a origem e a natureza da Matemática independentemente das questões de justificativas não-estruturais, de como as afirmações matemáticas são validadas" (ibid., p. 144). Rotman parece não compreender que provas e justificativas sempre dependem de contextos estruturais e que os significados objetivos de sinais matemáticos são apenas determinações estruturais. Nenhum sinal isolado pode ser, intrinsecamente, um sinal. Nosso objetivo, então, é mostrar que pode haver mérito em uma tentativa de combinar as abordagens de Piaget e Rotman.

Palavras-chave: prova; estruturalismo; representações; complementariedade.

Abstract

Piaget characterizes the historical development of geometry as a succession of three periods of thought: intrafigural, interfigural, and finally, transfigural or structural. We discuss an example to illustrate Piaget's conception of geometrical development and to provide a particular interpretation of it. The example concerns Euler's theorem, according to which the concurrent points of the perpendicular bisectors, the medians and the altitudes of any triangle are collinear. What we want to show is that by conceiving mathematical activity as essentially constructing proofs one might better understand Piaget's conception. In this context, Rotman's criticism of Piaget is presented and discussed. Rotman

* Universidade de Birlefeld / PUC-SP. E-mail: michaelontra@aol.com

argued that Piaget's characterization of mathematics and its creation is limited by his misunderstanding of "the nature and status of proof" (Rotman 1977, 151). Rotman, who concentrates on the semiotic and social aspects of mathematics, continued, "The central error of Piaget's structuralism is the belief that it is possible to explain the origin and nature of mathematics independently of the non-structural justificatory questions of how mathematical assertions are validated." (Rotman 1977, 144). Rotman completely misses the point that proof and justification always depend on structural contexts as represented by signs and language, and that the objective meanings of mathematical signs are nothing but structural determinations. No isolated sign can be intrinsically a sign. Thus, our aim is to show that it may be worthwhile trying to combine the approaches of Piaget and Rotman.
Key-words: *proof; structuralism; represntation; complementarity.*

Parte I

Piaget caracteriza o desenvolvimento histórico da Geometria como uma sucessão de três períodos de pensamento: *intrafigural, interfigural* e, finalmente, *transfigural* ou *estrutural.* Descrevendo as três etapas do desenvolvimento, Piaget escreve:

> A Geometria começa com Euclides – um período durante o qual o objeto de estudo relaciona-se às propriedades geométricas de figuras e sólidos vistos como relações internas entre elementos dessas figuras e desses sólidos. Nenhuma consideração é feita para o espaço como tal, ou consequentemente, para transformações dessas figuras dentro de um espaço que as contenha. Chamaremos esse o período *intrafigural* – uma expressão usada na Psicologia para referir-se ao desenvolvimento de conceitos geométricos pela criança.
>
> O período seguinte é caracterizado por esforços para buscar relacionamentos existentes entre figuras. Isso se manifesta especificamente na procura de transformações que fazem correspondências, de várias formas, entre as figuras. Entretanto, essas transformações ainda não estão subordinadas a conjuntos estruturados. Esse é o período no qual a Geometria Projetiva predomina. Nós chamaremos esse o período *interfigural*.
>
> Em seguida, um terceiro período que nós chamaremos *transfigural, é* caracterizado pelo predomínio das estruturas. O trabalho mais característico desse período é o Programa de Erlangen de Felix Klein. (Piaget e Garcia, 1989, p. 109)

Discutiremos primeiramente um exemplo para ilustrar a concepção de Piaget do desenvolvimento geométrico e para fornecer uma interpretação dela. O exemplo trata do Teorema de Euler, que afirma que os pontos concorrentes das mediatrizes, das medianas e das alturas de qualquer triângulo são colineares.

Teorema 1 (Euler, 1748): O ortocentro O, o baricentro G e o circuncentro M de qualquer triângulo são colineares. A reta que passa por estes pontos é denominada reta de Euler do triângulo. O baricentro divide a distância do ortocentro ao circuncentro na razão 2:1.

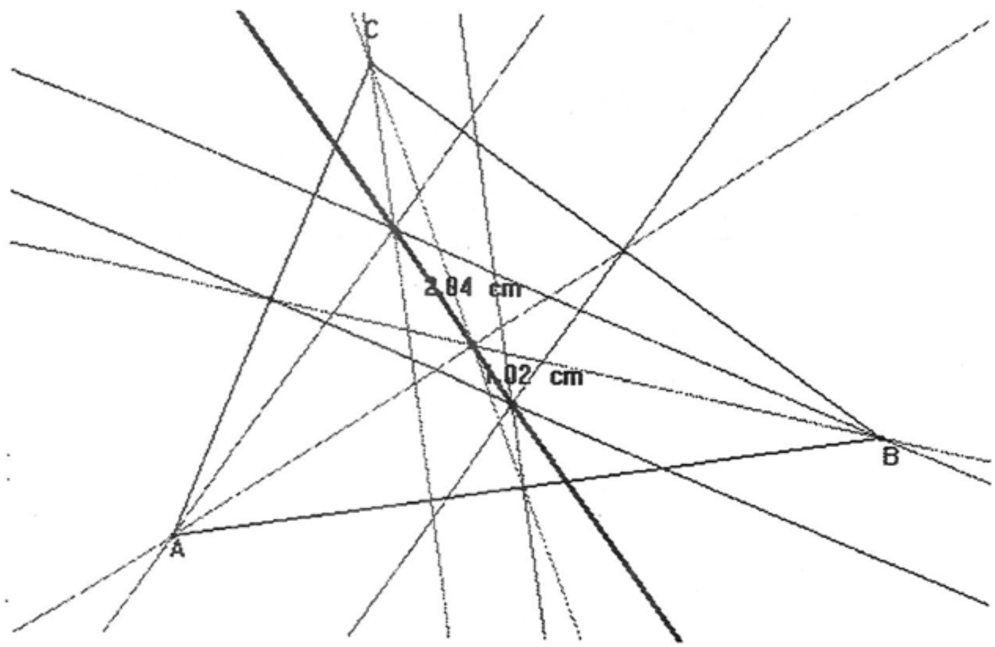

Figura 1 – o teorema ilustrado

Por meio de uma análise das provas desse teorema apresentadas em livros didáticos de Geometria Elementar (veja, por exemplo, Coxeter e Greitzer, 1967, p. 18ss), é possível que surja a idéia de que o teorema não trata as relações entre diferentes propriedades de um único triângulo, mas sim de uma afirmação sobre a relação entre a mesma propriedade (a posição do ortocentro) de dois triângulos diferentes (o triângulo original e o triângulo formado quando os pontos médios dos lados do triângulo original são ligados). Desta maneira, nós prosseguimos do intrafigural à perspectiva interfigural (Figura 2).

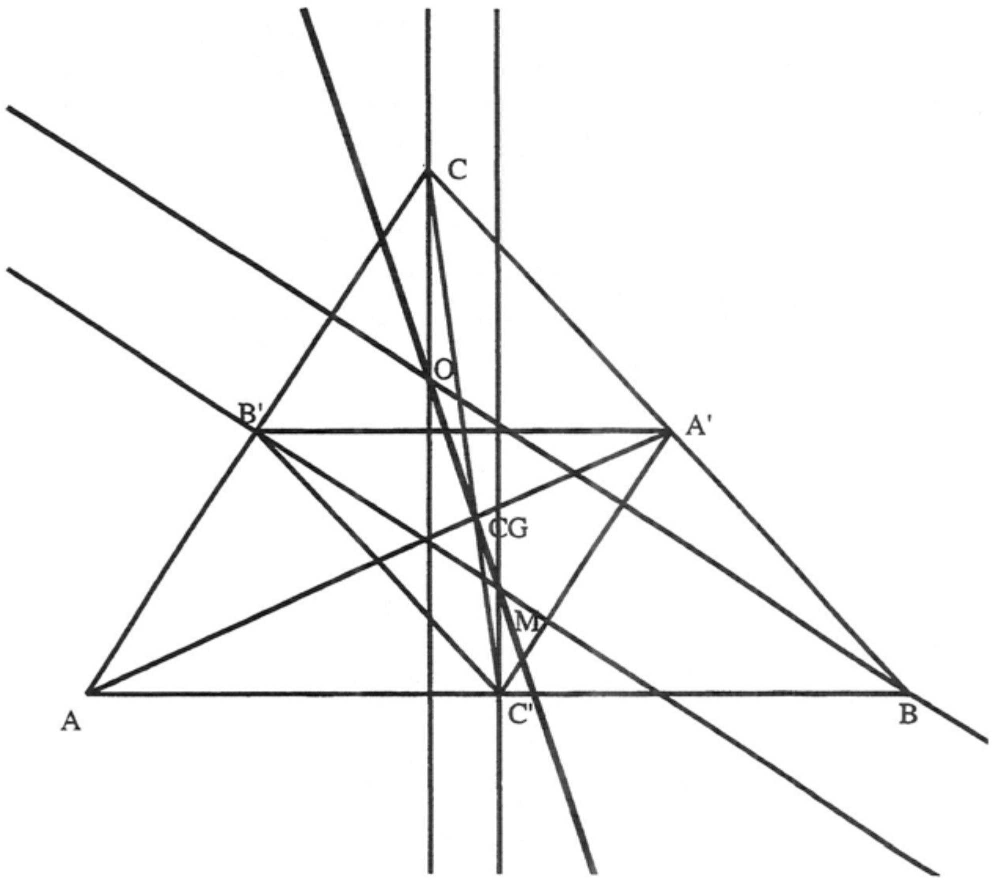

Figura 2

Estes dois triângulos são relacionados um ao outro por meio de uma rotação de 180 graus sobre o baricentro do triângulo dado e de uma redução do triângulo transformado com fator de 0.5, usando o baricentro como centro. Assim, o ponto-imagem X' de qualquer ponto X do plano sobre esta transformação encontra-se na linha que contém X e o baricentro (o centro da transformação): o baricentro é localizado entre os pontos X' e X e a distância entre o baricentro e ponto X' é a metade da distância entre o baricentro e ponto X. Nós chamaremos, para conveniência, tal transformação de DST.

Deixe-nos refletir sobre o que aconteceu. O argumento de nossa prova transformacional apóia-se numa analogia ou algum princípio da continuidade de acordo com os quais coisas semelhantes nas informações dadas se transformam em outras coisas semelhantes. Tal ponto de vista abre imediatamente as portas para mais generalizações. Enquanto as provas sintéticas ou "Euclidianas" tradicionais usam todas as afirmações do teorema de forma complexa e engenhosa (ver a prova alternativa apresentada na Figura 8), o que não é o caso desta nova prova. Ela pode ser considerada como um esquema geral de prova, mais do que uma prova particular. De fato, nossa perspectiva interfigural possibilita não apenas uma prova do teorema original, mas também provas de vários outros. Da mesma forma, podemos validar o teorema que afirma que o centro F do círculo de Feuerbach – ou o círculo do nove pontos – encontra-se também na linha de Euler (Figura 7), observando que F é o circuncentro do triângulo transformado A'B'C'.

Finalmente, a prova fornece também uma primeira generalização de nosso teorema original (teorema 1), porque a consideração do ponto da interseção de quaisquer cevianas do triângulo dado, e não apenas o ortocentro, conduz a um teorema similar (Figura 3).

Teorema 2 de Euler: Tome duas cevianas quaisquer e seu ponto de interseção (em consideração à clareza visual, devemos usar somente duas retas de cada tipo, pois duas já determinam os importantes pontos colineares) e construa paralelas para estas cevianas passando pelos pontos médios dos lados opostos do triângulo dado. Determine o ponto de interseção dessas retas paralelas. A reta que passa pelos dois pontos da interseção contém o baricentro do triângulo.

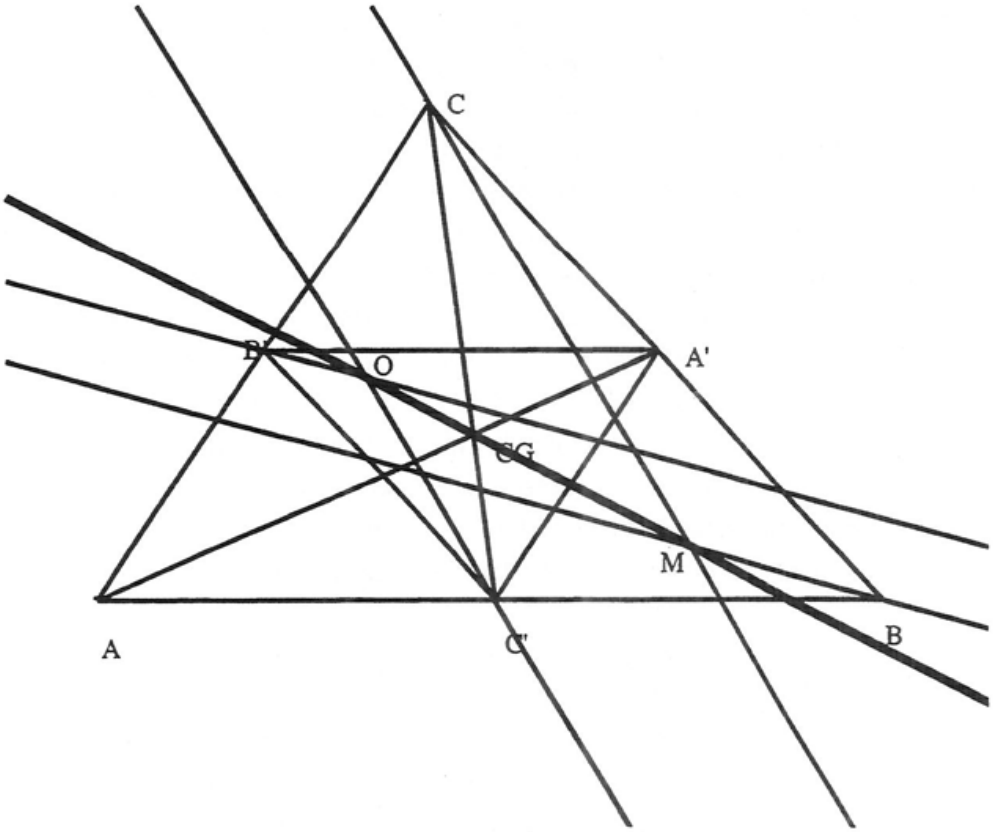

Figura 3

Olhando novamente a nossa prova, por meio de uma transformação geométrica do tipo DST percebemos que o fator 2 pode ser substituído por qualquer outro número, isto é, os dois triângulos semelhantes em questão não precisam, necessariamente, estar relacionados pela razão 2:1. Isto significa que o baricentro CG do triângulo dado, que é também o centro do DST, pode ser substituído por qualquer outro "centro de gravidade", desde que as cevianas CC' e BB' que passam por esse centro se cruzem com os lados do triângulo nos pontos C' e B' e que a reta B'C' permaneça paralela ao terceiro lado BC (Figura 4). Colocado de outra forma, os dois triângulos semelhantes devem ter lados paralelos. Não estamos, assim, olhando para uma configuração de Desargues?

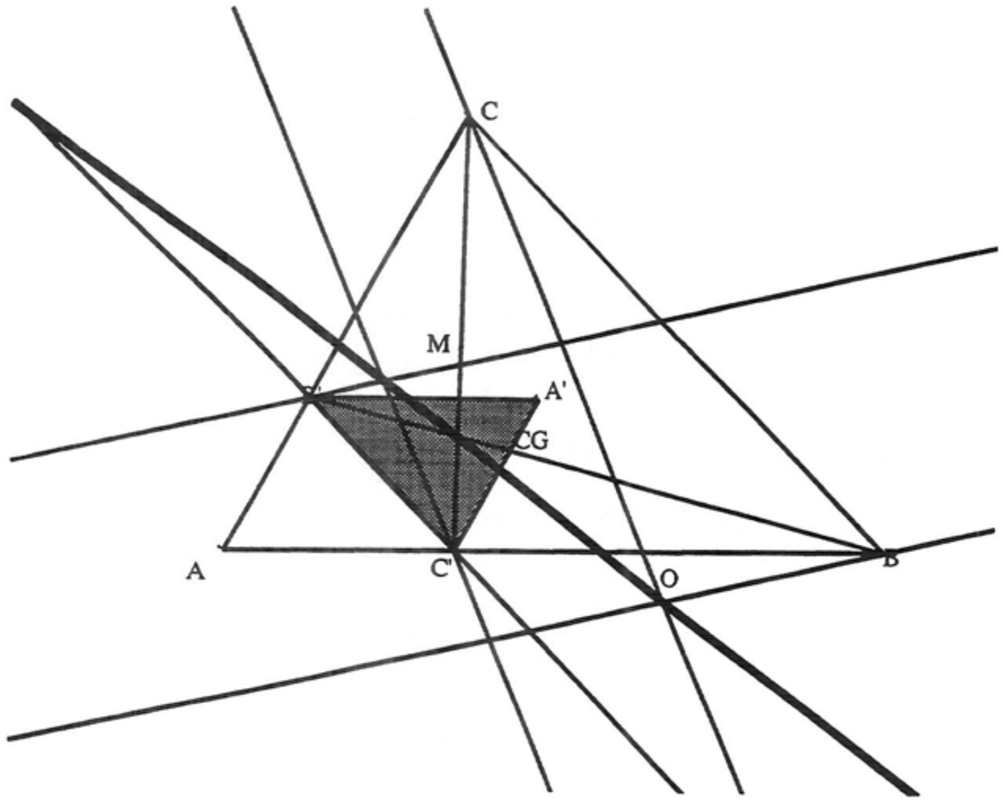

Figura 4

Nossa configuração consiste essencialmente de três pares de retas paralelas. Marque dois pontos em ambas as retas do primeiro par (C e B respectivamente C' e B'). Trace uma reta qualquer (l) passando por B e uma paralela (l') passando por B'. Trace uma reta qualquer (m) passando por C e sua paralela passando por C'. O ponto A é o ponto de interseção de l com m e ponto A' o ponto de interseção de l' e m' (Figura 5). Os pares de retas paralelas são assim determinados: AC e A'C'; AB e A'B'; BC e B'C'.

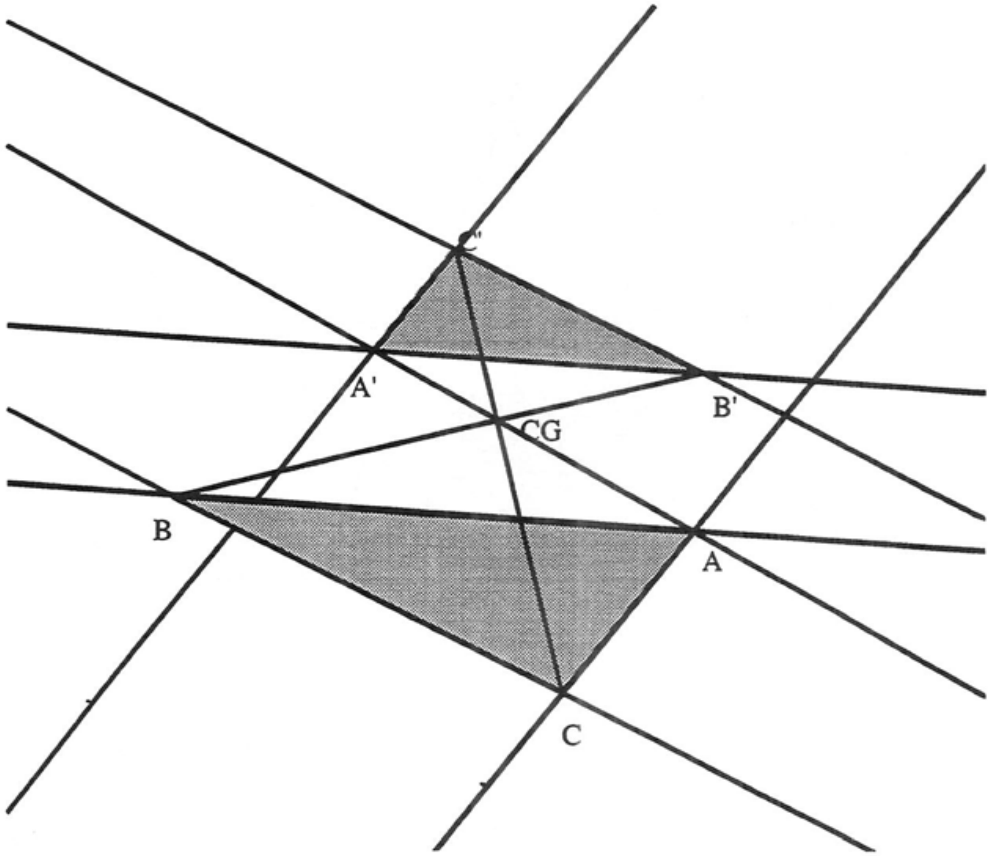

Figura 5

Chegamos assim a uma configuração de Desargues, em que os lados respectivos dos dois triângulos ABC e A'B'C' interceptam-se na reta no infinito, isto é, elas permanecem paralelas. A existência da "reta de Euler" AA' está garantida pela proposição inversa ao teorema de Desargues, que afirma que se as interseções de lados correspondentes de dois triângulos diferentes ABC e A'B'C' (ou os prolongamentos dos lados) encontram-se na mesma reta, então todas as retas passando por vértices correspondentes também passam pelo mesmo ponto CG. Em nosso caso, esta reta é a reta no infinito; porém, se o sistema de coordenadas estiver sujeito a uma transformação simples resulta na afirmação geral, generalizando mais uma vez nosso teorema original.

Nós obtemos também, interpretando a Figura 2 à luz dessas introspeções novas, uma outra prova de nosso teorema original. Os triângulos CBO e C'B'M têm lados paralelos. Se definirmos o ponto CG como a interseção das retas CC' e BB', então o teorema de Desargues diz que a reta que passa pelos terceiros vértices dos triângulos, a saber, O e M, passa também pelo ponto de interseção CG (Figura 6). Certamente, podem existir pessoas extremamente talentosas, que chegariam imediatamente a essa nova idéia da prova, encurtando assim todo esse processo de generalização. Mas não é provável que isso aconteça com muita freqüência. Nossa prova e o diagrama no qual ela foi baseada marcam uma trajetória mais natural e podem impedir essa idéia tão radical. Isso significa que existe uma lógica da abdução e da generalização, que é conectada firmemente com nossos meios cognitivos e sistemas de representação.

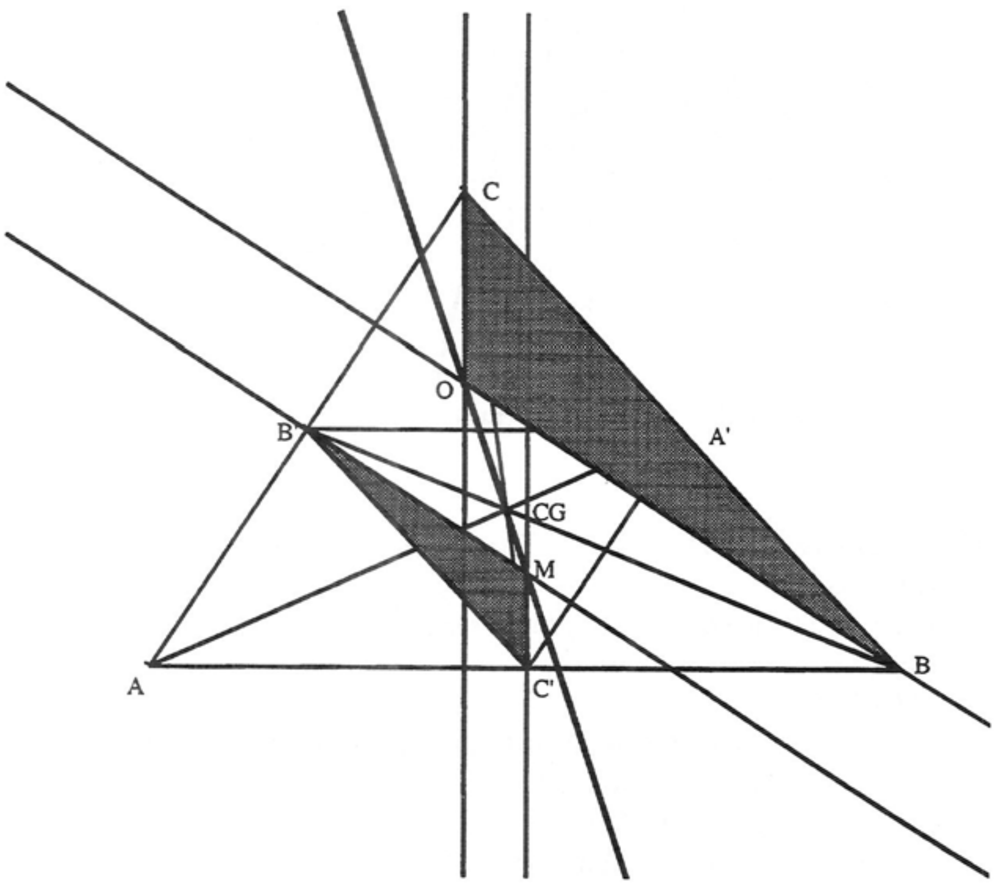

Figura 6

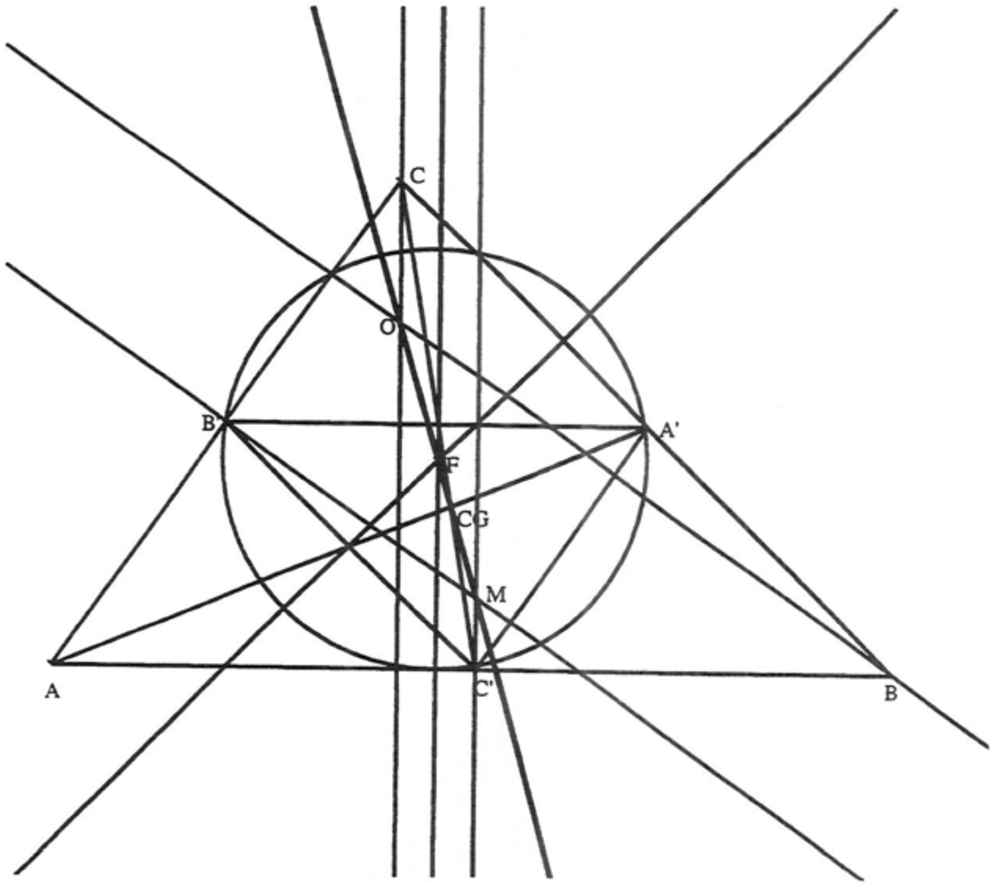

Figura 7

Prova

G é o interseção de OH com BB1. Temos que provar que:
(1) GB=2GB1.
Dado que OB1 é paralela a BH (ambas são paralela a AC por definição), provar (1) envolve demonstrar que:
(2) BH=2OB1.
Seja S a interseção da circunferência (ABC) com BO. BS é um diâmetro desta circunferência, então o ângulo BCS é 90°.
Logo, (3) SC e AH são paralelas.
BASC é inscrito, então o ângulo BAS é 90°. Assim:
(4) CH e AS são paralelas.
De (3) e (4) podemos concluir que AHCS é um paralelogramo.
Sendo B1 o ponto médio de AC, então segue que B1 é o ponto médio de HS. Portanto, OB1 é a reta que passa pelos pontos médios dos lados BS e BH do triângulo SBH. Isto implica que HB = 2OB1, que é (2).

QED (M. Radu)

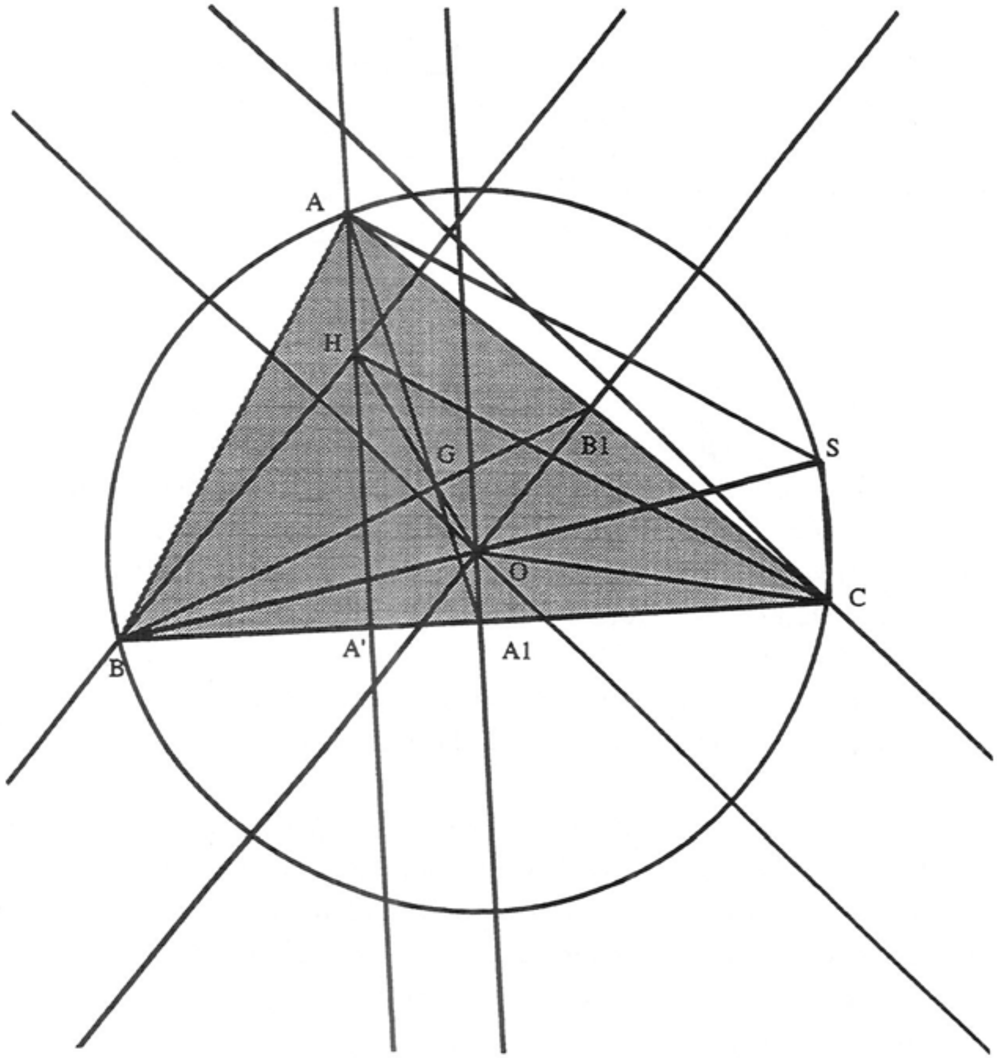

Figura 8

Parte II

Os momentos da atividade cognitiva individual permitem distinguir inteiramente *os meios* e os *objetos* dessa atividade, mas ambos fazem parte do desenvolvimento da cognição. Essa complementaridade (diferença e unidade) dos objetos e dos meios explica o surgimento e o dinamismo da Matemática Pura desde o século XVII. Essa tese parece combinar bem com a afirmação de Piaget de que a abstração reflexiva (*abstraction reflechissante*) representa o próprio mecanismo do desenvolvimento matemático, ainda que Piaget interprete a objetividade de meios cognitivos exclusivamente em termos de estrutura formal.

Segundo essa posição, não há nem fundações absolutas, nem processos universais de justificação para a Matemática. Olhando de perspetivas diferentes e examinando objetos diferentes do mesmo ponto de vista tornam-se abordagens metodologicamente não distinguíveis, assim como na fusão da Geometria Analítica com a Álgebra Linear. As aplicações lineares e as transformações das coordenadas são ambas descritas por meio das matrizes (coordenadas). Ao perceber essa simetria, nós acreditamos caracterizar o estágio transfigural de Piaget. Mas será que Piaget, ele mesmo, vê as coisas desta maneira?

Antes de entrar em uma descrição da Epistemologia Genética de Piaget, parece apropriado acrescentar várias observações.

Não é o problema nem a situação geométrica que devem ser classificados como intrafigurais, interfigurais ou transfigurais, mas sim a perspetiva adotada e os meios pelos quais eles é tratada. Certamente, a prova transfigural da Figura 6 é baseada exatamente no mesmo diagrama que as provas originais do teorema 1. É possível que essas perspetivas coexistam na maior parte da Geometria. Uma perspetiva possível a ser adotada depende, obviamente, do conhecimento prévio e da experiência matemática.

A partir disso, Piaget afirma que a evolução da atividade está baseada em uma lógica suposta. Mas que tipo da lógica é essa? A produção e a análise das provas dependem muito da maneira pela qual as coisas são representadas e das experimentações com essas representações. Fatores contingentes sempre influenciarão essa atividade experimental. Tal lógica, como exigida por Piaget, depende, conseqüentemente, de continuidade que evite aberturas grandes e pulos radicais e audazes.

Nosso compromisso é maior com o lógico do que com o figurativo e as razões básicas para que as provas lógicas sejam preferidas são consideradas muito importantes para o conhecimento matemático, resulta da importância da metáfora da máquina e também de que a lógica de primeira ordem fornece exatamente o modelo correto para nossos modernos sistemas computadorizados. A aprendizagem, o desenvolvimento e a instrução requerem, entretanto, não apenas as provas que provam, mas também as provas que possibilitam a introspeção. Consequentemente, a cognição como a metáfora da percepção é relevante e aqui, os DGS [Sistemas de Geometria Dinâmica] podem ser úteis. A percepção visual deve ser concebida, em um sentido, como uma série contínua de pequenas generalizações ou de inferências abdutivas. A percepção envolve interpretação.

> Se o objeto da percepção ou o julgamento perceptivo forem de uma natureza que não tem nenhuma relação à abdução, espera-se que o objeto da percepção esteja inteiramente livre de todas as caraterísticas das interpretações, porém ele não pode deixar de possuir tais caraterísticas se for meramente uma série contínua de abduções, executadas discretamente e conscientemente. (Peirce, 1931-1958)

Mas percepção, normalmente, não vagueia aleatoriamente porque nós percebemos primeiramente qualidades contínuas ou gerais. Vagueando, nós podemos ver um pequeno animal marrom e apenas numa segunda vista podemos identificá-lo como um coelho ou um gato, ou um esquilo, ou qualquer outro animal. Nós percebemos primeiramente o contexto geral, e determinamos os detalhes, somente mais tarde. Todos os exemplos familiares, que são apresentados com a finalidade de demonstrar os fracassos da percepção e da intuição, mostram que a percepção é relacional ou contextual (ver, por exemplo, Kline, 1985, capítulo IV). Para perceber um fato, isto é, algo invariante na variação da representação, requerer-se uma comparação (como fornecido pela medição, por exemplo). A obsessão pelos fatos descarta o figurativo e o relacional.

A percepção, embora dependa da diferença e da particularidade, é sempre dirigida para o contínuo do possível, para o geral e, assim, depende essencialmente de nossas classificações do mundo fenomenológico. A ontologia matemática, em particular, pode ser concebida simplesmente como um contínuo de possibilidades reais de relações. Dentro dessas possibilidades, as atualizadas em algum contexto e algum momento dependem de nossos objetivos e dos meios da representação e do saber.

Parte III

Piaget era um kantiano, ele acreditou no kantianismo, como afirmou freqüentemente, mas em um kantianismo

> que não é estático, isto é, as categorias não existem no início, mas sim um kantianismo dinâmico, com cada categoria levantando possibilidades novas, o que é algo completamente diferente. Eu concordo que a estrutura precedente, por sua própria existência, abre possibilidades e o papel do desenvolvimento e da construção na história da Matemática é aproveitar estas possibilidades, as converter em realidades e as realizar. (Piaget em Piattelli-Palmarini, 1980, p. 150)

Piaget perdeu, entretanto, algo mais da herança kantiana. Kant tinha percebido, no contraste com os racionalistas e os empiristas dos séculos XVII e XVIII, que não temos nenhum acesso que não seja mediado, nem para nosso mundo mental interno nem para a realidade objetiva. Kant descobriu a objetividade do sujeito. Piaget apreciou isso e sua versão "dinâmica" da epistemologia de Kant nada mais é que uma elaboração da introspecção fundamental de Kant. Nessa elaboração, Piaget concebe essa objetividade em termos da estrutura formal e da necessidade lógica. Permita-nos comentar mais a esse respeito um pouco adiante.

Kant tornou-se famoso entre os lógicos por sua afirmação de que a Matemática é (assim como a metafísica ou as ciências exatas) sintética, mesmo *a priori*. Isso significa que julgamentos matemáticos são essencialmente apodícticos, assim como a constatação dos fatos, mas em contraste a essas constatações, julgamentos matemáticos são, ao mesmo tempo, universais. Hume (1711-76), que precedeu Kant e aceitou a perspectiva comum a respeito do que faz o conhecimento *a priori*, descobriu que muito casos, cujas conexões eram consideradas supostamente como analíticas, em verdade eram sintéticas, notavelmente o exemplo da causa e do efeito. Mas Hume manteve a posição de que a Matemática Pura é analítica ou baseada em "relações das idéias" e não na realidade de fato. As afirmações matemáticas requerem, ele afirmou, "um trem do raciocínio"*, embora "para nos convencermos da proposição, na qual não há nenhuma propriedade, não possa haver nenhuma injustiça, sendo apenas necessário definir os termos e explicar que a injustiça é uma violação da propriedade" (Hume, 1977, Seção XII, Parte III, nossa tradução).

Kant, em contraposição a Hume, compreendeu que os problemas fundamentais do conhecimento matemático se apresentaram exatamente nos mesmos termos que aqueles das ciências empíricas, porque o "trem do raciocínio" citado por Hume que não deixa os julgamentos matemáticos serem óbvios, devem ser, segundo Kant, representados e exigem um esforço construtivo e uma intuição. O raciocínio matemático é, de acordo com Kant, para uma parte essencial, construtivo porque muitos predicados não podem ser ligados, como Hume tinha indicado, a um conceito, sem fornecer o contexto adicional. Por exemplo, a idéia de um triângulo não contém nela mesma o fato de que a soma de seus ângulos é igual a dois ângulos retos. Um filósofo tentaria, Kant escreve, analisar o conceito do triângulo, mas:

---

* Do inglês, *train of reasoning*.

> Ele pode analisar a concepção de uma reta, de um ângulo ou do número três por muito tempo, sem descobrir nenhuma das propriedades não presentes nessas concepções. Mas, se esta pergunta for proposta a um geômetra, ele começa imediatamente construindo um triângulo. (A 716/B744)

O que parece essencial na descrição de Kant da construção matemática é o fato de que essa construção não prossegue dos conceitos, eles mesmos, mas tem que confiar em exemplos particulares destes também. Por exemplo, quando discutimos que a reta *a* é paralela à reta *b* ou se cruza no ponto *C*, etc. Hintikka parece, até o momento, ter sido o único autor que observa esse aspecto. Ele escreve:

> (...) a caracterização de Kant da Matemática baseada no uso das construções tem que ser entendida como significando que, na Matemática, o tempo todo, são introduzidos representantes particulares de conceitos gerais e realizados argumentos em termos destes representantes particulares, os argumentos que não podem ser realizados apenas por meio de conceitos gerais. (Hintikka, 1992, p. 24)

É exatamente dessa maneira que o espaço (semiótica) e a indicação ostensiva dos pontos no espaço tornam-se importantes. Sem "aqui" e "agora" de posições espaço-temporais o problema da existência matemática não poderia ter sido resolvido e também o pensamento geométrico-relacional não teria evoluído para o estágio "transfigural" de Piaget, porque seria difícil conceber as próprias ações de um indivíduo como entidades objetivas. A Matemática, assim, prossegue tipicamente pelas construções de diagramas (algébricos ou geométricos) e pelas observações das relações nelas e não pela análise dos significados de conceitos matemáticos. A Matemática é um tipo da atividade semiótica. Esse pensamento diagramático e o uso da noção do espaço representam um estágio preliminar e penúltimo da concepção axiomática ou estrutural da Geometria. Mas Kant é ambíguo em sua concepção da Matemática.

Podemos interpretar que Kant nos descreve o método da Matemática que fornece a introspeção no caráter de provas matemáticas como conexões meramente do tipo "se então". Se o postulado das paralelas de Euclides for válido, isso quer dizer, se a reta paralela ao lado oposto do triângulo existe, então a soma dos ângulos no triângulo é de 180 graus.

Isso é exatamente o que o diagrama mostra. Por outro lado, Kant pensa que a Matemática trata de objetos que derivam sua generalidade das regras de acordo com as quais eles têm que ser construídos. Na Geometria, por exemplo, preocupamo-nos com o significado dos conceitos como o "triângulo" ou "reta" em geral, apenas a ponto de realizá-los construtivamente. Como Kant diz, "Não podemos contemplar uma reta sem desenhá-la no pensamento" (B 154), isto é, sem imaginar uma atividade. A Matemática depende de pensamento intuitivo porque é uma atividade "objetiva", uma atividade sobre objetos e não um mero cálculo.

Mas como podemos, pergunta Bolzano, construir ou imaginar uma reta infinita? Para Bolzano, a filosofia de Kant, aceita aquelas

> (...) intuições, que serão uma adição particular para as definições matemáticas dos conceitos, a serem nada mais que um objeto subordinado à definição de um conceito na Geometria, um objeto, que nossa imaginação produtiva deva adicionar à definição fornecida.

Bolzano continua, afirmando que

> (...) o que é exigido aqui pode se aplicar a muitos, mas de nenhuma maneira todos, os conceitos que pertencem à Geometria. Assim, para o exemplo, o conceito de uma reta infinita é também um conceito geométrico que, consequentemente, também tem que ser explicado geometricamente. E a imaginação produtiva certamente não pode criar um objeto que corresponda a este conceito. Não podemos desenhar uma reta infinita por meio de nenhuma imaginação, mas podemos e temos que pensar nela por meio da apenas razão. (1975, p. 76)

Bolzano, então, presume que percepção e intuição são mais limitadas do que o raciocínio conceptual. Mas, como Kant havia demonstrado, conceitos não se aplicam às coisas, mas sim a certas representações delas. De fato, devemos usar ícones para determinar as propriedades de um objeto, tal como uma reta. Tome, por exemplo, escreve Kant, "a proposição: 'Duas retas não podem delimitar um espaço e com estas sozinhas não é possível obter uma figura' e tente deduzi-la a partir das concepções da reta e do número dois" (B 65). As propriedades de objetos matemáticos, como retas, são propriedades relacionais, expressas em nosso exemplo pela afirmação de que dois pontos determinam exatamente uma reta, e devem conseqüentemente ser construídos na intuição. Uma reta infinita, ela mesma, deve ser um símbolo ou um signo e necessita um contexto para ser concebida. Uma reta infinita, ela mesma com *relatum* (referência), pode apenas ser indicada como parte de um sistema teórico ao qual ela pertence. Podemos usar esse símbolo como um índice, de referência e não de atribuição, apenas como a parte de um sistema ou de uma estrutura (talvez a estrutura de um diagrama no espaço semiótico; lembre o método de "perseguir diagrama", da Álgebra Homológica). Estruturas representam as intenções dos termos matemáticos, mas não se segue que provas sobre fatos estruturais poderiam sempre ser estabelecidas por meio de argumentos formais ou sintáticos.

As verdades matemáticas são estabelecidas por meio das provas. Mas as provas matemáticas são, de acordo com a tradição de Kant, tipos de experimentos mentais. Ian Mueller acredita que o obstáculo principal que bloqueia a interpretação de argumentos matemáticos como experimentos mentais

> (...) é a opinião de que tais argumentos não podem ser provas conclusivas. Em particular, pode ser perguntado como a consideração de um único objeto pode estabelecer uma afirmação geral sobre todos os objetos de um tipo dado. Uma parte da dificuldade é devida, na minha opinião, à falha em distinguir duas maneiras de interpretar afirmações gerais como "todos os triângulos isósceles têm seus ângulos de base iguais". Sob uma interpretação, a afirmação se refere a uma totalidade definitiva [...] e diz algo sobre cada delas. Sob a outra interpretação nenhuma totalidade definitiva é pressuposta, e a sentença tem um caráter muito mais condicional – "se um triângulo é isósceles, seus dois ângulos de base são iguais". Uma pessoa que interprete uma generalização na segunda maneira pode argumentar que a expressão "a classe de triângulos isósceles" é sem sentido porque o número de triângulos isósceles é absolutamente indeterminado. (Mueller 1969, pp. 299-300)

Isso significa que, de acordo com essa maneira de compreender, não se pode argumentar que há uma existência absoluta envolvendo nem a caracterização relacional de objetos matemáticos nem provas matemáticas. A Matemática opera apenas com existência relativa. Não é acidental que o ponto da vista da Matemática que é expresso pela fórmula em que a Matemática consiste em afirmações de tipo "se então", que a atividade matemática consiste tipicamente em estabelecer provas, correlaciona com a convicção e que não é a referência aos objetos matemáticos específicos que distingue a Matemática de outras ciências "na mesma maneira que a Botânica é distinta da Biologia Marinha pela diferença nos objetos estudados" (Putnam 1975, p. 2). A Matemática, de acordo com esse ponto de vista, é caracterizada por algum estilo do raciocínio; esse estilo do raciocínio não está conectado com uma ontologia definitiva, mas obtém sua objetividade pelas suas aplicações pretendidas.

Contudo, a Matemática é uma atividade e não há nenhuma atividade sem contexto objetivo. O conhecimento matemático visto como o conhecimento dos objetos, entretanto, depende da intuição. Na intuição, em contraste ao conhecimento discursivo, algo está imediatamente presente, o que significa que um objeto é fornecido sobre o que podemos refletir. A força da intuição pode ser vista em sua ênfase da familiaridade com o objeto, desde que um conteúdo tem que ser dado de onde podemos avançar para o conhecimento. Como Kant dita: "Na ausência da intuição todo nosso conhecimento está sem objetos, e permanece, conseqüentemente, inteiramente vazio" (A 62). "Mas pela intuição uma coisa é apenas dada para nós, não compreendida", escreve Moritz Schlick (1979, p. 146).

Essas considerações podem sugerir para uma "realista" que o objeto é ambas as coisas: o ponto da partida compreendido pela intuição e objetivo da cognição e, assim, que a problemática está situada no processo de desenvolvimento, ele mesmo, por exemplo, na relação entre o conhecimento e a aplicação do conhecimento. A intuição é, portanto, um meio e não um resultado da cognição.

Esse ponto da vista combina com o fato de que nosso acesso aos objetos está mediado por representações. Um objeto matemático ou uma relação objetiva são dados então por uma classe de representações equivalentes. Como nós vimos em nossa prova do teorema de Euler, esse tipo da objetividade se desenvolve por meio da generalização. O que se desenvolve é nossa percepção de relações objetivas dadas, mais ou menos implicitamente, por várias representações. Os objetos matemáticos não podem ser definidos nem indicados com o dedo. São universais e o universal ou o geral é, como Peirce diz, o indeterminado. É uma relação possível entre várias representações. Um conceito matemático, tal como o conceito do triângulo ou da função, não existe independentemente da totalidade de suas representações possíveis, mas também não deve ser confundido com uma representação. Uma teoria matemática não existe independentemente da totalidade de suas caracterizações axiomáticas, e no mesmo tempo, não pode ser confundida com uma delas. Um sistema formal pode ser representado de várias maneiras, e os teoremas têm que ser invariantes em seus valores da verdade apesar de mudanças da representação. Entretanto, isso não significa que, "há uma entidade hipostasiada chamada um sistema formal que exista independentemente de qualquer representação" (Curry 1970, p. 30).

Para adaptar a própria noção da atividade para tal ponto da vista é necessário compreender a atividade também como o sistema de relações dos meios-objetos e não como um mero processo. Não há nenhuma atividade sem meios e sem contexto objetivo. A cognição matemática é essencialmente cognição situada. Piaget, no contraste, concebe a atividade independentemente de qualquer domínio da objetividade e negligencia também os meios simbólicos e o papel da representação na Matemática. Existe, como ele indica, uma "autonomia radical do desenvolvimento operacional. Do nível da experiência lógico-matemática, onde os primeiros conceitos matemáticos pré-científicos aparecem (...) as operações são construídas pela abstração a partir das ações gerais do sujeito, independentemente de objetos físicos específicos e das características subjetivas das ações dos indivíduos" (Beth e Piaget 1966, p. 244).

O dinamismo de Piaget peca, nós acreditamos, por causa da sua ênfase sobre a necessidade e por causa de sua negação do contexto objetivo que resulta dessa preferência. Piaget, em um sentido, percebe a problemática do direcionamento quando usa o teorema da incompletude de Gödel para propor que as fundações do conhecimento foram encontradas no futuro, tentando definir uma lei direcional interna ou um declive da trajetória do desenvolvimento cognitivo. O teorema de Gödel, de fato, muniu Piaget de um critério interno da ordem hierárquica de estruturas ou de teorias. A rejeição de qualquer noção do contexto faz com que a "necessidade" torne-se um conceito importante, do ponto de vista de Piaget, do desenvolvimento cognitivo, em que o necessário é um resultado do desenvolvimento e não seu começo.

> A dificuldade principal da interpretação genética consiste no fato de explicar porque as construções sucedem progressivamente umas

> às outras e, em particular, porque elas conseguem formas novas. Uma estrutura mais elevada é derivada de uma estrutura mais baixa por meio da abstração dos elementos que partem do segundo, mas esta abstração supõe que esses elementos estão refletidos por meio das operações novas, que se reconstróem transpondo-as. Contudo, temos que explicar como essas operações constituem um momento novo e são determinadas pela estrutura mais baixa. A resposta é que, porque essa estrutura é limitada, suas lacunas demandam uma construção, que possa completá-las. Mas há uma infinidade das maneiras de completar uma estrutura incompleta, e temos que explicar porque uma, que parece a mais simples e o mais provável, é a escolhida. Os resultados de Gödel sugerem uma primeira resposta a essas perguntas: a construção é contínua indefinidamente porque nenhum sistema é auto-suficiente, não em relação o qualquer outro, mas porque falta a coerência interna suficiente para assegurar sua própria não-contradição. Cada sistema deve consequentemente prosseguir no sentido de que sua própria consistência pode ser reforçada. (Piaget em Beth e Piaget, 1966, pp. 274-275)

Parte IV

Existe uma crítica a Piaget que argumenta que a explanação inteiramente estruturalista de Piaget sobre o conhecimento lógico-matemático é equivocada porque ignora o papel central da prova e da comunicação na matemática. O que é discutido é que a caracterização de Piaget da Matemática e da sua criação está limitada por seu engano "da natureza e do status da prova" (Rotman, 1977, p. 151). O que Piaget parece confundir, diz-se, é a descoberta e a invenção da estrutura com prova de afirmações sobre estrutura. Brian Rotman, por exemplo, que concentra nos aspectos semióticos e sociais da Matemática, escreve:

> O que discutiremos é que a explanação inteiramente estruturalista de Piaget sobre conhecimento lógico-matemático falha porque ignora o papel central da prova na Matemática... O erro central do estruturalismo de Piaget é a idéia de que é possível explicar a origem e a natureza da Matemática independentemente das perguntas de justificativas não-estruturais sobre como as afirmações matemáticas são validadas. (Rotman, 1977, pp. 141 e 144)

Rotman nega, em princípio, que a Matemática está preocupada principalmente com a criação das estruturas. E ele lamenta que os escritos de Piaget não contenham nenhuma teoria da prova e propõe que a "necessidade", como enfatizada por Piaget, não é essencial ao desenvolvimento matemático. A substituição de uma análise de necessidade no lugar de uma discussão da prova matemática é enganadora, segundo Rotman. Rotman também critica o estruturalismo de Piaget, em que a estrutura, a prova e a afirmação estão separadas artificialmente, devido à suposição falsa que a Matemática não funciona como uma língua (p. 156). O problema, ele afirma, é que no construtivismo de Piaget é o indivíduo que constrói a matemática sem nenhuma influência do ambiente social ou da língua. "A teoria contrária mais grave, no fato, ao caso progressivo de Piaget, é uma teoria que ele conhece bem, é a reivindicação de que a origem e as leis do pensamento são produtos sociais e culturais e não, simplesmente, produtos evolucionários" (Rotman, 1977, p. 120).

A perspectiva do argumento e da prova, ao que parece, transforma inevitavelmente a Matemática em uma coleção das afirmações. A prova pertence à metamatemática e parece ser um exercício na Lógica e a Lógica não tem nada dizer sobre qualquer coisa que não seja uma afirmação.

De acordo com o consenso lingüístico, a Matemática consiste de teorias e as teorias são conjuntos de proposições, que podem ser organizados por meio de uma base axiomática, e que aparecem como meros fatos consumados não transparentes. O ensino da prova em nossas escolas trata seu problema no contexto da lógica proposicional e não da Matemática. Uma afirmação, na lógica proposicional, é algo que é verdadeiro ou falso. A lógica proposicional é construída inteiramente a partir dessa regra fundamental. Seu poder é também sua fraqueza porque não suporta suposição e experimentação. De um ponto de vista matemático, a geração de hipóteses férteis e tentativa de formulação de conjecturas (em geral, apenas parcialmente corretas) parecem mais importantes do que qualquer prova e isso exige os procedimentos que incluem a experimentação com objetos e diagramas.

A lógica proposicional não concerne aos objetos. Segundo lógicos como Frege, o julgamento, melhor que o objeto ou o conceito, é a unidade fundamental do conhecimento. "É bastante se a proposição examinada por inteiro tiver um sentido; é este que confere às suas partes, também o seu conteúdo" (Frege, 1884, § 60).

Quando, entretanto, pela concepção moderna da Axiomática, esse ponto da vista foi dirigido ao extremo pela proposta que a consistência lógica é suficiente para a existência, Frege não concordou mais, recusando-se a aceitar a interpretação formalista da axiomática de Hilbert. Mas Frege não forneceu uma solução alternativa definitiva, entretanto, e quando, em seu tratamento das classes, tentou evitar a complexidade lógica envolvida na hierarquia de tipos lógicos por meio da suposição que uma função ou um conceito proposicional de qualquer nível determina um objeto *ground-level*, nomeando sua extensão, desmoronando assim as distinções do tipo, encontrou um paradoxo. A suposição de que a extensão existe para cada fórmula é contraditória, como Russell tinha informado Frege. Os paradoxos da teoria dos conjuntos surgiram de uma combinação de duas noções incompatíveis: conjunto-como-um contra conjunto-como-muitos. Uma floresta é apenas um conjunto de árvores ou é algo mais?

Se estivermos preocupados primeira ou exclusivamente com método e prova formal, podemos enfatizar a importância de saber e de proposições, em vez de atividade e de objetividade. Para tal perspectiva, a Matemática parece não ter mudado desde os dias de Euclides e os elementos de Euclides têm, de fato, preservado seu *status* exemplar, ao menos com respeito ao método matemático. Isso é especialmente verdadeiro com respeito ao número: a prova de Euclides, por exemplo, de que a raiz quadrada de 2 não pode ser uma fração é válida exatamente na forma que Euclides lhe deu. "O método matemático, como usado atualmente, provavelmente, não pareceria estranho aos gregos" escreve Ulam (Ulam, 1969, p. 2), e ele continua, "Entretanto, os objetos a que o pensamento matemático é devotado hoje têm sido diversificados e generalizados". Segue obviamente dessas indicações, em contraste, que qualquer perspectiva genética sobre a Matemática deve se preocupar com os objetos matemáticos e com o desenvolvimento do conteúdo matemático.

Problemas, eles mesmos, entretanto, não produzem os meios para suas soluções. A Matemática Moderna, ela mesma, não obtém sua própria dinâmica em nenhuma parte pequena da aplicação de teoremas e métodos que, à primeira vista, não têm nada a fazer com os problemas em jogo. Assim, o que se constitui um objeto da Matemática é certamente condicionado por forças internas, assim como forças externas, pelos métodos assim como objetivos ou motivos da matematização. A análise da prova pode mostrar que uma prova realmente não depende, na totalidade, das características dos objetos envolvidos e assim pode conduzir a enfraquecer-se das hipóteses. A prova não se preocupa com os objetos como tal, mas sim com os relacionamentos entre certas características de objetos possíveis. A nova formulação da situação em questão pode sugerir um diferente teorema. Assim, a análise da prova conduz à reconstrução e à generalização, além das novas provas, que por sua vez, provocam uma outra generalização etc. Isso, nós já vimos na primeira parte deste artigo.

Nessa descrição, a objetividade matemática reside na organização dedutiva da Matemática. É a prova que fortalece a comunicação matemática. Mas a prova como tal não produz nenhuma dinâmica independentemente da dialética dos problemas e dos meios como exemplificados na análise da prova. Se ignorarmos os avisos de Kant em relação à atual atividade da prova e ao processo de provar, podemos ser facilmente convencidos de que a Matemática não tem nenhum objeto e de que o método dedutivo e a prova constituem suas característica essenciais. Essa visão é responsável pela impressão estática da Matemática e pelo caráter exemplar dos Elementos de Euclides. Mas mesmo a Geometria de Euclides é principalmente construtiva, e está assim a serviço da sabedoria e da inteligibilidade (Lachterman 1989, 110ss).

A Matemática, vista como uma atividade, tem mudado tremendamente, o que é indicado de forma apta, nos três níveis de Piaget. Contudo, Piaget apenas concebe a atividade matemática em termos abstratos ou formais porque parece obcecado com necessidade. Para ele, a atividade é relevante somente à medida que as ações formam estruturas, que podem ser caracterizadas formalmente. Piaget acredita

> (...) que a evidência desenvolve em paralelo com o surgimento da estrutura matemática, isto é, com o reconhecimento de relações abstratas independentemente dos objetos particulares entre os quais as relações são válidas. (Castonguay 1972, p. 87)

De acordo com Rotman, "a proposta de que uma afirmação é necessária não pode ser separada da forma pela qual a afirmação é justificada" (1977, p. 145). Piaget negaria que, de fato, ele se afasta da prova por causa dos aspectos convencionais e não lógicos que impregnam inevitavelmente o comportamento lingüístico. A ênfase que Piaget dá à necessidade está, por sua vez, influenciada por Kant, segundo Rotman. Piaget escreve sobre o sujeito epistêmico, que pode ser visto como uma mera derivada do sujeito "transcendental" de Kant e, além disso, admite que a descentralização dessa construção individual é necessária por meio da cooperação com outras.

Mas Rotman não se satisfaz com a evocação de Piaget do sujeito epistêmico.

> É igualmente razoável supor que, de fato, a coordenação dos pontos de vistas é uma questão de argumento justificado e explícito sobre entidades públicas e não, como Piaget insiste, uma questão das necessidades internas que se operam dentro de uma mente individual. (Ibid., p. 154)

Rotman preocupa-se com a concepção de Piaget da generalidade social, com a idéia de que "o que é comum a todos os sujeitos finalmente se apóia na suposição de que a Matemática resulta dos indivíduos e se torna então, em algum sentido, social" (p. 136).

Parece que existem diversos pontos diferentes envolvidos aqui.

Primeiramente, a afirmação de que a generalidade e a necessidade matemáticas são forasteiras em relação à construção individual, algo que tem que ser realizado por um esforço adicional, baseou na lógica e na língua. Nós já tratamos implicitamente dessa alegação, ao caracterizar a prova matemática como um tipo de experimento mental. Há também que se observar que nenhuma teoria social da Matemática pode ser desenvolvida sem uma exploração extensiva da interação entre a Matemática e a Tecnologia e a construção tecnológicas. Além disso, os movimentos e as ações construtivos são, por si mesmo, gerais, o que significa que não são traços específicos de indivíduos particulares. A própria ação e a mera percepção ou imaginação dessa ação ativam, por exemplo, as mesmas partes do cérebro. Existe na neurofisiologia uma teoria dos "neurônios espelhos", que têm como característica o fato de que há

> (...) uma congruência estrita entre a ação observada eficaz em provocar a resposta visual dos neurônios e a ação executada eficaz em dirigir a resposta motora. Ou seja, a ação observada executada por um outro indivíduo evoca no observador o mesmo padrão neural que ocorre durante a execução ativa dessa ação. (Gallese in Metzinger, 2000, p. 327)

Em segundo lugar, parece que Rotman acredita que a coordenação e a unificação, e não o pluralismo intelectual e a variedade das perspetivas são os objetivos mais importantes da Matemática e da Ciência. É possível, em oposição a tal visão, propor que é o pluralismo das perspectivas e não a unificação e coordenação estrita que serve como a base do progresso científico e matemático. A Matemática e a Ciência Modernas nasceram da especialização e divisão de trabalho social. A Matemática Pura, em particular, resultou de um crescimento explosivo da atividade matemática ocorrido ao redor de 1800 e isso, em suas fontes, pode sumariamente ser caracterizado pela afirmação que, pela primeira vez na história da Matemática, um grande número de conexões entre resultados e problemas aparentemente muito diferentes foram descobertos.

Entretanto, a respeito de um ponto central, Rotman está certo, ou seja, ele tem razão ao argumentar que o construtivismo não é suficiente para construir teorias matemáticas porque, para isso, sempre é necessário compreender quais representações, aparentemente diferentes, podem ter essencialmente o mesmo significado. Como um exemplo, Rotman aponta a invenção da Geometria Analítica de Descartes "que ligou áreas previamente separadas da Álgebra e da Geometria... Assim, qualquer prova do isomorfismo, por exemplo, estabelece uma relação entre duas descrições diferentes de uma estrutura" (p. 157). Nessa maneira se esclarece a tese principal de Rotman, ou seja, precisamos deixar bem claro que a construção de uma estrutura é totalmente diferente de descrever ou fazer afirmações sobre essa estrutura.

O conhecimento matemático consiste de seqüências de afirmações da forma "se então" e considera, conseqüentemente, apenas objetos no que diz respeito às conseqüências que puderam ter para o processo do raciocínio matemático. Portanto, o interesse principal da Matemática refere-se a como os objetos poderiam ser introduzidos ao raciocínio matemático ou à teoria. Objetos matemáticos são, em primeiro lugar, objetos intencionais, ou seja, objetos cujos critérios de individualidade devem ser vistos na maneira específica pela qual eles entram na teoria, por meio de determinadas representações. Dois objetos matemáticos podem ser idênticos de forma extensional, mas, ao serem apresentados diferentemente, são intencionalmente diferentes. Exatamente como outras ciências, entretanto, a Matemática tem interesse em obter introspecções objetivas, e, portanto, em objetos extensionais. É por causo disso que os teoremas matemáticos têm, via de regra, a forma de equações $A = B$. Até podem ser justamente conduzidos a definir as características essenciais de um ato da criação imaginativa exatamente nestes termos, pela indicação de que elas envolvem uma visão de um A como de um B: $A = B$, ou "todo A é B", ou "A representam B", etc.

Certamente, pode ser muito difícil provar um teorema, isto é, descobrir tal igualdade, um fato que já levou Hume a conceder que as afirmações matemáticas não são diretamente analíticas no sentido de que o predicado imediatamente flui do significado do termo sujeito e que motivou Kant a denominar a Matemática conhecimento sintético *a priori*. Essa dificuldade implica que é essencial que a Matemática consiga representar a mesma coisa sempre de novas formas. O progresso do conhecimento matemático depende, via da regra, com uma interpretação ou representação apropriada, possivelmente completamente inesperada, do problema dado. O pluralismo das perspectivas e a variedade das representações são essenciais para o desenvolvimento da Matemática, e tem sido enfatizado como uma característica da Matemática repetidas vezes (veja, por exemplo, Putnam, 1975, p. 45).

Não há uma maneira direta nem uma teoria formal – além das regras lógicas ou sintáticas – que garantam que duas representações diferentes se referem à mesma coisa. Para estabelecer estas "equações" $A = B$ se fazem necessárias uma construção e uma síntese, tais como aquelas presentes na descoberta da relação entre a eletricidade, o magnetismo e a luz, todas as quais constituem diferentes aspectos da mesma coisa, o que denominamos hoje o campo eletromagnético. Um outro exemplo é a síntese exibida na maior descoberta da Revolução Industrial, a saber, a relação entre calor e movimento, expressos no teorema da conversação da energia.

Contudo, nós devemos aceitar $A = B$ como uma relação objetiva, de início e, portanto, aceitar também a existência de objetos matemáticos, ainda que estes objetos sejam gerados pelo que Piaget denominou "abstração reflexiva". Não existe nenhuma objetividade sem objetos, embora esses objetos não sejam dados independentemente de uma representação simbólica. A caracterização de "objetos matemáticos" em termos semióticos resolve uma dificuldade observada por Piaget, a saber, a plurifuncionalidade dos objetos matemáticos, que o tinha conduzido a negar sua existência. A Matemática não consiste mais "em tipos de objetos ideais dados, de uma vez por todas por nós ou por algo fora de nós"[1] (Piaget, 1970, p. 88).

Uma "equação" representacional $A = B$ é válida e também é diferente da identidade $A = A$, além da equivalência indicada pelos sinais de igual, há algo diferente também, sugerido pelos símbolos diferentes A e B. Se queremos enfatizar este segundo aspecto, talvez deveríamos interpretar a relação entre A e B como uma transformação, e não como uma igualdade. Nosso problema da reta de Euler fornece um exemplo muito pertinente, porque a prova consiste em ver que o circuncentro M do triângulo do ABC é exatamente o ortocentro do triângulo A'B'C'. Nós compreendemos agora que a idéia da transformação neste sentido é essencial para passar do estágio intrafigural ao interfigural. Com isso, Piaget certamente concordaria. Entretanto, ele não adotaria, pelo menos segundo a crítica, o outro ponto de vista, a saber, o de considerar funções ou transformações também como igualdades ou identidades.

Indicar o papel imprescindível dessa complementaridade entre, por um lado, função ou transformação, e da relação ou lei objetiva, por outro, no desenvolvimento da cognição matemática é o propósito o mais importante deste artigo.

Essa complementaridade reflete a necessidade de duas maneiras diferentes, de acordo com as quais temos que compreender nossos conceitos – tanto de ponto da vista de atribuição quanto da referência – e é estabelecida pela complementaridade entre espaço e estrutura, que servem como metáforas cognitivas e universais.

Nessa perspectiva, Piaget parece radical demais com sua afirmação de que a própria noção do espaço pode ser reduzido à estrutura porque é uma mera construção. Referido pela teoria axiomática dos grupos, por exemplo, ele escreve:

> A lei associativa dos grupos de transformação é fundamental para a coerência do espaço, porque se os termos na teoria dos grupos variam com os trajetos percorridos para os alcançar (se eles eram concebidos como objetos intencionais, minha inserção M.O.), o espaço perderia sua coerência; o que nós teríamos seria um fluxo perpétuo, como o rio de Heraclito. (Piaget, 1970, p. 20)

1 *"(...) des sortes d'objets idéaux donnés une fois pour toutes en nous ou au dehors (...)"*

Mesmo que isto seja verdadeiro, é a coerência do espaço e a possibilidade de empregar representações indiciais e icônicas oferecidas por ele que fornece à Matemática a idéia do conhecimento objetivo, e não o contrário. A respeito do construtivismo de Piaget, Thom, por exemplo, acredita, "é enredado irremediavelmente em dificuldades ligadas ao seguinte problema: como pode a continuidade geométrica surgir de uma 'poeira' discreta de estados ou de processos psicológicos?" (apud Piattelli-Palmarini, 1980, p. 82)

A complementaridade da transformação e da relação aplica-se a todas as áreas de Educação Matemática. Os alunos, em geral, têm dificuldades com equações algébricas porque interpretaram e aprenderam o sinal da igualdade no sentido de "produção". Essa interpretação *input-output* representa uma compreensão direta da equação. O conceito da equação não foi transformado ainda em um objeto da reflexão matemática. Esse ponto de vista funcional tem uma afinidade forte com determinadas situações estandardizadas da aplicação, que poderiam ser caracterizadas como a produção de um objeto novo a partir dos objetos dados pela execução das regras dadas; ou, mais geralmente, a transformação correta de um estado inicial para um estado final desejado. Mesmo as tarefas elementares, entretanto, requerem também uma interpretação diferente de uma equação, uma interpretação que trate a equação como um conceito independente. Como, por exemplo, é possível tratar a expressão $x+3 = 8$ como uma função?

Cognitivamente, o princípio da continuidade tem sempre tido um papel importante em estabelecer essa complementaridade da relação e da transformação. Esse princípio, afinal de contas, tem sido introduzido no raciocínio matemático por pessoas como Desargues ou Poncelet, que tentaram a matematizar o desenho perspectivo. O princípio da continuidade é dependente sempre da representação em questão e ajuda na descoberta das "leis" que a governam. Não é, por exemplo, com respeito a nosso exemplo da reta de Euler, suficiente para observar que esse teorema, sendo sobre a colinearidade de três pontos, pertence no contexto da Geometria Projetiva. É necessário começar a partir da observação de diagramas concretos e a partir de alguma idéia concreta (da prova), tornando inevitável um tratamento inicial dos objetos descritos no teorema anunciado. O desenvolvimento deve ser contínuo, isto é, tem que prosseguir por etapas suficientemente pequenas e cuja escolha não parece ser totalmente determinada. Uma idéia apenas pode ser afetada por uma outra idéia quando existe uma conexão contínua entre elas. Todo raciocínio é baseado na continuidade, embora, em geral, não todas as etapas infinitesimais tenham que ser detalhadas explicitamente.

E não há nenhuma necessidade e nenhuma garantia do sucesso. Como Peirce o indica:

> O princípio da continuidade é a idéia do falibilismo objetificado. Porque o falibilismo é a doutrina que propõe que nosso conhecimento nunca é absoluto, mas sempre nada flui como era, num contínuo da incerteza e da indeterminação. E a doutrina da continuidade é a de que todas as coisas nadam assim nos contínuos. (...) Mas o falibilismo não pode ser apreciado numa maneira que se assemelha, em qualquer forma, seu significado verdadeiro até que a evolução esteja considerada. Uma vez que o princípio da continuidade é adotado, nenhum tipo da explanação das coisas pode ser satisfatório, a não ser que elas cresceram. (Peirce, 1931-1958, pp. 171-175)

Os sistemas dinâmicos da geometria (DGS) são adequados para colocar o princípio da continuidade em operação e a promover assim o crescimento de hipóteses férteis. Sistemas de representação assim como dos DGS, tendo revitalizado esse princípio, têm um papel muito importante no desenvolvimento cognitivo porque realizam uma interação íntima e indissoluta entre a observação e o raciocínio.

Parte V

Piaget indica a importância do conceito da transformação para o desenvolvimento do pensamento geométrico, e ele compreende que a algebrização da Matemática feita por Descartes representa a força essencial subjacente a esse conceito.

> Um período de trabalho longo e sem interrupções na Álgebra e no Cálculo infinitesimal foi requerido [...] para chegar finalmente numa conceituação da própria idéia da transformação geométrica sem atravessar a álgebra ou a análise. (Piaget e Garcia 1989, p. 106)

Parece que Piaget não presta nenhuma atenção, entretanto, ao fato de que pelo menos a análise infinitesimal e o conceito da função dependem essencialmente da própria idéia do espaço e do princípio da continuidade também. O conceito da função ou da transformação matemática tem uma raiz dupla, algoritmo e relação objetiva, como exemplificado pelas regularidades da natureza. Como nós indicamos na tese da última seção, essa complementaridade pode ser de uma importância fundamental para a transição aos estágios interfigural e estruturais do desenvolvimento.

Compreender funções matemáticas significa uma compreensão da complementaridade da fórmula e relação, assim como a auto-referencialidade que governa sua evolução, como se tornou aparente na definição de Cauchy de uma função contínua. Na Matemática dos séculos XVII e XVIII, não era possível representar as funções descontínuas, porque uma função era uma lei analítica. Uma curva geométrica, além disso, era denominada contínua se pudesse ser representada por uma função (analítica) (Euler, 1748, vol. II). Mas essa caracterização provou ser incoerente.

Cauchy, depois demonstrando a inconsistência desses esforços (Grattan-Guinness, 1970), revisou inteiramente a abordagem usando como base o princípio da continuidade, transformando a Matemática numa teoria extensional. Uma função, no sentido de Cauchy ou Dirichlet, pode ser vista como uma classe de equivalência de expressões analíticas ou de fórmulas, na qual a relação de equivalência é baseada no axioma do extensionalidade. Essa mudança de uma visão intencional para uma visão extensional provocado por Cauchy possibilita a identificação de conjuntos de funções usando algumas propriedade particulares, e, em geral, permite raciocinar sobre esses conjuntos sem representá-las explicitamente. Por exemplo, em vez de dar uma função linear diretamente pelo $f(x)=ax$, Cauchy prova que uma função contínua que tem a propriedade $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pode ser representada como apresentada acima (Cauchy, 1821, pp. 99-100). Esse tipo de raciocinar com o próprio objeto matemático assumiu um papel dominante na Matemática no mesmo tempo em que a prova-análise tornou-se sua base.

Ainda falando precisamente, nós não podemos operar sobre o objeto ou o conceito como tais, porque, de qualquer modo, eles têm que ser representados para se tornarem acessíveis. Um conceito não deve ser concebido como uma entidade completamente isolada e distinta num paraíso platônico; por outro lado, não pode ser seja confundido com qualquer conjunto de aplicações pretendidas. Dois predicados ou conceitos ou funções (ou funções das funções) devem ser considerados como diferentes, mesmo que possam ser aplicados exatamente à mesma classe dos objetos, porque influenciam a atividade mental diferentemente e podem conduzir a desenvolvimentos diferentes. A vista do extensional na matemática ignora esses fatos completamente.

O próprio Piaget aceita a idéia de que agregar correspondências em uma mão e as construções operacionais na outra, pode incluir dois processos "comum a todos os campos do conhecimento" (Piaget e Garcia, 1989, p. 11). Parece certamente importante estar ciente do fato de que a inovação cartesiana teve já uma natureza dupla desde seu começo, representada pela combinação do número e da variável por um lado, e do espaço e da quantidade por outro; "para a extensão na largura do comprimento e na profundidade, que constituem o espaço é claramente o mesmo que aquele que constitui o corpo", diz Descartes (Garber, 1992, p. 134). A matemática cartesiana não é algébrica em nosso sentido, não é "uma ciência da estrutura pura", mas é baseada em uma interação do número com a visualização geométrica. Essa dualidade é, em nossa visão, a base de uma compreensão apropriada do aspecto complementarista da álgebra (isto é álgebra compreensiva como um sistema que mistura aquelas duas linhas), torna-se crucial assim considerarmos relações entre corpos ou, em termos piagetianos, se passarmos do intrafigural ao interfigural.

No primeiro parágrafo da sua Geometria, Descartes descreve seu programa construtivo como segue: "Todos os problemas de geometria podem facilmente se reduzir a termos tais que há necessidade, por conseguinte, de conhecer somente o comprimento de algumas linhas retas para construi-las".[2]

A Geometria é baseada na introspecção, e esta envolve dois procedimentos, análises e sínteses. A síntese significa a construção e a construção é, como no Euclides, definida em termos dos meios da construção (régua e compasso no exemplo de Euclides ou proporcionalidade-compasso de Descartes – veja Figura 10), e não como um algoritmo ou um procedimento precisamente especificado. Consequentemente, a análise era essencial para terminar a solução de problemas matemáticos, especialmente para casos nos quais a construção falhou.

A Análise e a Geometria Analítica de Descartes, na sua totalidade, foram derivadas da sua investigação da proporcionalidade. A desco-

2 *"Tous les problèmes de géométrie peuvent facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par la suite que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire"*.

berta de uma ou de mais média-proporcionais por meio da associação apropriada de termos conhecidos com termos desconhecidos é o paradigma de descoberta e construção engenhosas em termos da representação figurativa que Descartes explica no *Regulae*, especialmente na segunda parte, começando com a Régua 14. Descartes acreditou que a aplicação de figuras para todo o tipo dos problemas seria proveitosa porque a similaridade ou a analogia como expressada na Matemática de relações proporcionais são as únicas maneiras de descobrir verdades novas.

> Se alguém é cego de nascimento, não devemos esperar, pela força do argumento, que ele tenha idéias verdadeiras das cores assim como as idéias que temos, derivadas, como elas são, dos sentidos. Mas, se alguém, em algum momento, tiver visto as cores primárias, mas não as cores secundárias ou misturadas, então, por meio de uma dedução, é possível para ele dar forma a imagens, mesmo àquelas que não viu, em virtude de sua similaridade àquelas que já viu. (Descartes, 1985, Régua 14)

Assim, nós sabemos algo por uma percepção direta ou por meio de comparação.

Isso mostra também que sabemos a verdade em todo o raciocínio dedutivo apenas pela comparação. Assim começa a explanação da Régua 14. O leitor deve perceber, Descartes continua, "que cada conhecimento que não é obtido pela intuição simples e pura de uma coisa única e solitária" é um resultado de uma "comparação entre duas ou mais coisas". Essa comparação deve ser construída se não for simples e direta.

> A razão que explicar porque uma preparação é requerida para outras sortes da comparação é simplesmente que a natureza comum em questão não é igualmente presente em ambos, mas somente por outras relações ou proporções que a implicam. A parte principal de esforço humano é simplesmente para reduzir esta proporção para o ponto em qual igualdade entre o que estamos procurando e o que sabemos já é claramente visível. (Descartes, 1985, a.a.O.)

O processo de saber pode chegar num fim apropriado somente se há verdades auto-evidenciando fenômenos que revelam seus significados simplesmente em termos deles mesmos. O que percebemos, e o que podemos consequentemente imaginar, são sempre apenas as relações, que devem ser concebidas como partes de seqüências do raciocínio figurativo, por um lado, ou fatos simples, por outro.

A Análise era revolucionária, e era a maior realização de Descartes, pois foi Análise que o motivou para ampliar a classe dos meios construtivos e para generalizar a noção da própria construtibilidade, assim tornando-se capaz de resolver os problemas que os gregos não poderiam resolver por meio da régua e compasso sozinho. O "x" famoso da Álgebra transforma o ainda desconhecido em um objeto de atividade. A Matemática cartesiana prossegue do desconhecido como se soube, a seus antecedentes possíveis até chegar em afirmações que reconhecemos serem verdadeiros, provados ou conhecidos. Mas isso é feito pelo cálculo e pela construção, e não pela mera análise, os meios dessa construção sendo as condições ou relações que o desconhecido tem que encontrar. De acordo com Viète ou Descartes, "Análise" não era nada mais que a primeira parte de um método para resolver problemas geométricos; esses problemas foram traduzidos em termos das equações algébricas, nas quais as "quantidades conhecidas ou desconhecidas" ocorrem; as soluções de tais equações forneceram uma expressão algébrica de "quantidades desconhecidas" em termos de quantidades conhecidas. Tal expressão teve que ser interpretada como uma relação geométrica permitindo, na segunda parte do método, a "síntese", para construir as entidades desconhecidas começando com os dados.

Assim, por exemplo, o problema chamado o problema de Delian, a duplicação do cubo (ao preservar a forma do cubo) exigido por Apollo no oráculo – um problema central da construção da geometria grega – não pode ser resolvido com régua e compasso sozinho, mas aparece como um problema com resolução em Descartes porque, agora, no contraste com a antigüidade, as seções cônicas são aceitas como meios legítimos da construção (cf. Figuras 10 e 11).

Era óbvio a Descartes, assim como tinha sido óbvio para os gregos, que o que deve ser construído, o lado do cubo, existe realmente. Era esse ponto que provocou o ímpeto que conduziu a uma amplificação do conceito de construção. Se olharmos o diagrama da Figura 9 – fornecida por Hippocrates de Chios e usada na Antiguidade para analisar o problema de Delian – percebemos imediatamente como Descartes chegou a sua proporcionalidade-compasso (Figura 9) e também como o princípio da continuidade é essencial para a construção desse diagrama, que pretende encontrar o ponto essencial D. Os matemáticos gregos baniram da prova qualquer referência ao movimento. Uma demonstração que envolveu um ponto em movimento e, assim, uma referência ao princípio da continuidade, foi considerada defeituosa e o problema de Delian, conhecido por ter resolução usando tais meios, foi classificado como sem solução. Descartes considerou esse problema resolvido porque admitiu novos meios de construção e se orientou para problemas novos, e não porque tinha redefinido a noção da prova. Descartes preocupou-se com problemas e construções, mais que com teorias e provas.

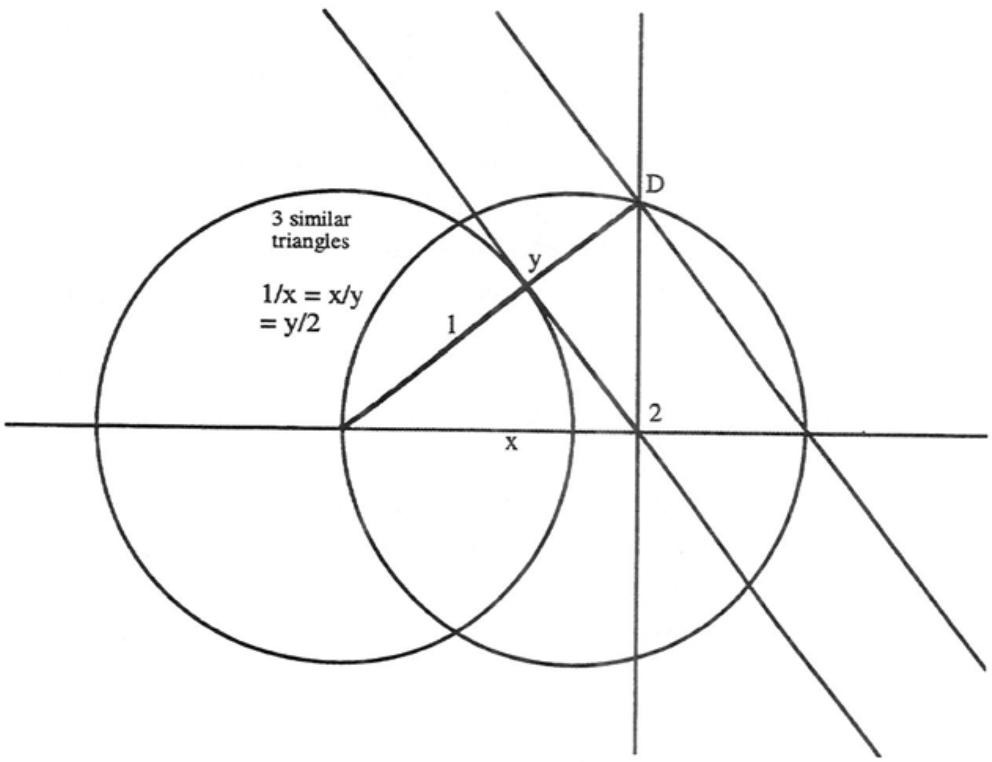

Figura 9

Uma conjetura que tem sido proposta é que Descartes "duvidou da existência de uma curva que corresponde a uma equação a menos que poderia fornecer uma construção cinemática para ela" (Boyer, 1988, p. 88). A construção, entretanto, fornece provas da existência somente na medida em que é percebida encaixada no espaço.

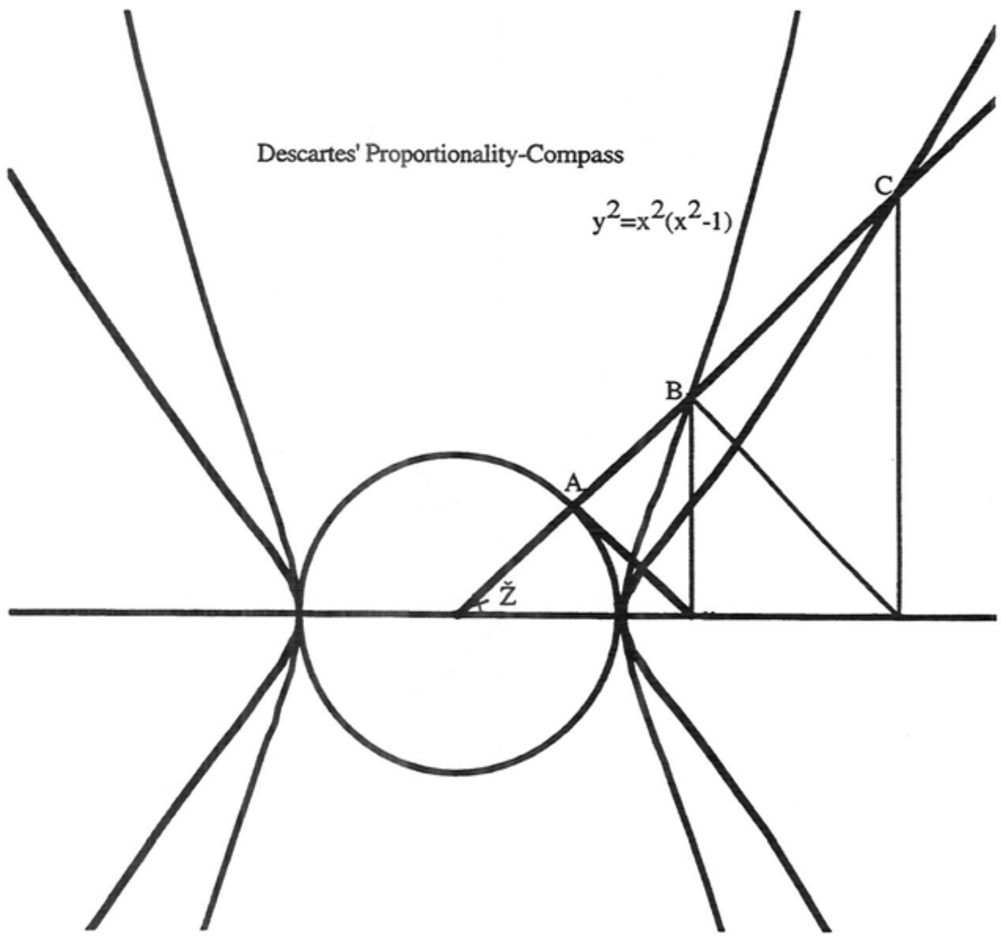

Figura 10

Em sua periodização secular da história matemática, Pierre Boutroux enfoca, quando descreve o desenvolvimento matemático da Antiguidade até o século XVII, o conservadorismo dos matemáticos da idade clássica, em suas preocupações com método e meios da atividade matemática.

> Entre a concepção grega da Matemática e a concepção completamente diferente de sintético-algébricos havia uma similaridade notável. Ambos supõem algum tipo de harmonia preestabelecido entre o objetivo e o método da Ciência Matemática, entre os objetivos que esta ciência persegue e os procedimentos que permitem-na alcançar estes objetivos. (Boutroux, 1920, p. 193)

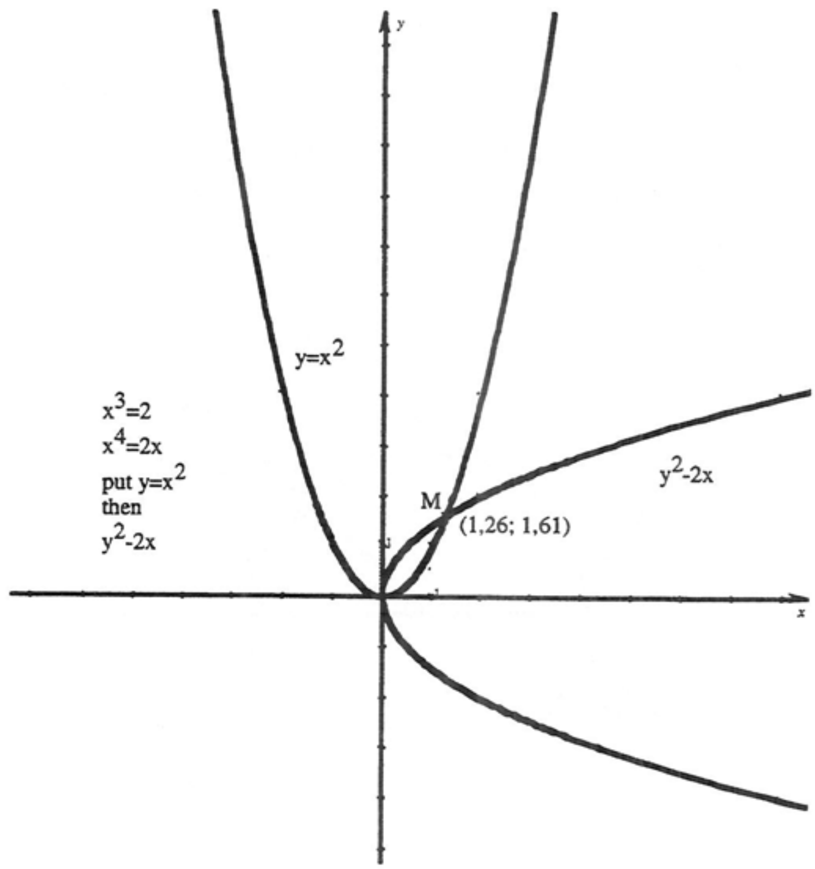

Figura 11

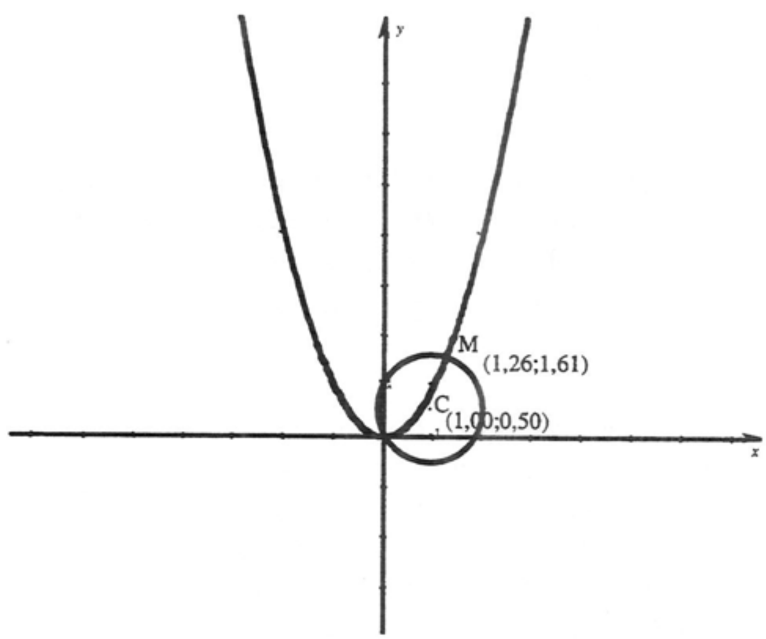

Figura 12

E Boutroux continua, "Descartes supõe que uma vez que os princípios da Geometria Analítica tinham sido estabelecidos, as conseqüências teriam que seguir naturalmente por meio da transformação e combinação algébrica" (ibid., p. 109), assim para a abordagem algébrica inteira os objetos considerados são meras composições ou compostos dos elementos,

> (...) contendo nem mais nem menos do que os elementos eles mesmos; por conseguinte, o objetivo que se persegue será determinado sempre pelos meios aplicados [...]
> Descartes, por exemplo, pede que nós ascendamos gradualmente, depois que estudamos algebricamente as curvas de segunda ordem (ou seções cônicas), para curvas sempre mais "complicadas" de uma ordem sempre mais elevada. O problema assim proposto de início era expressado em termos da composição algébrica [...] Descartes, em suma, tinha ficado satisfeito em esboçar um programa; mostrando uma trajetória para a Matemática; na seqüência, era suficiente seguir essa trajetória para chegar precisamente aos procedimentos do cálculo que se desenvolveram no fim do século XVII. (Ibid., p. 193, 111ss)

Mesmo hoje é possível reconhecer, sem muita reflexão, Boutroux continua,

> (...) que a dificuldade encontrada não era nova e era basicamente a mesma que tinham ocupado os geômetras gregos. O confronto das funções algébricas com as funções não-algébricas (funções transcendentes) levanta um problema comparável, em todos os aspectos, àquele proposto pela teoria de números irracionais. Como este último problema foi resolvido? Pelo uso dos métodos do cálculo aproximativo ou mais precisamente apelando à idéia da *aproximação arbitrariamente grande* ou da *convergência*. É esta idéia que serve como a base para o método da exaustão que encontramos nas escritas de Euclides ou de Aristóteles. (Ibid., p. 105)

Pierre Boutroux pensa que a concepção analítica da Matemática emerge não antes do século XIX, desde que este é o primeiro ponto onde a Matemática começa a se tornar puramente conceptual, parecendo não mais a ser confinada por seus meios.

Boutroux parece estar ao mesmo tempo certo e errado a respeito da concepção e papel histórico de Descartes. Parece estar errado em propor que a Matemática de Descartes é completamente sintética e confinada totalmente por seus meios da representação. No princípio, é verdadeiro, Descartes continuou a ver o problema da construção matemática dentro do quadro da Antiguidade. Corretamente falando, não estendeu este quadro quantitativamente. A concepção de Descartes sobre método e objetividade, entretanto, não foi inspirada tanto pelo procedimento dedutivo de Euclides, mas pelo exemplo da invenção e da descoberta na Geometria e nas Artes Mecânicas.

Diferentemente de Fermat, Descartes não considerou uma equação algébrica como uma definição adequada de uma curva, mas usou álgebra apenas como um meio para a classificação e ordenação de curvas porque Descartes não estava interessado em curvas como tais, como objetos da investigação, mas quis usá-las como meios de construção. Para construir essas curvas, empregou vários dispositivos mecânicos. Admitiria somente tais curvas que podem ser descritas "por um movimento regular e contínuo". Descartes desejou também sistematizar a Geometria num nível mais elevado, de modo que não devesse haver nenhuma limitação no grau ou na dimensionamento de um problema. Descartes, realmente, havia desejado conseguir algo que os gregos não tinham alcançado, isto é, introduzir uma perspectiva comum na totalidade do conhecimento matemático e criar a base para mais generalização por este sistematização.

Descartes usa a estrutura da Aritmética, e especialmente o fato de que "a Aritmética inteira contém apenas quatro tipos de cálculos", para classificar todos os problemas da Geometria e apresentá-los de forma consistente. Depois de ter explicado o paralelismo de construção Geométrica e a operação aritmética por meio de alguns diagramas, e depois ter enfatizado que "todos os problemas da Geometria ordinária podem ser construídos pela aplicação exclusiva do poucas coisas conteve nas figuras explicadas", ele prossegue criticar os "Antigos" para obviamente não ter percebido isto,

> (...) pois eles poderiam ter evitado esforços na escrita de muitos livros volumosos sobre isto, nos quais a ordem de seus teoremas mostra que eles não dominavam o método verdadeiro, o qual fornece todos estes teoremas, mas tinham escolhido meramente aqueles que tinham encontrado acidentalmente. (Descartes, *Geometria*, nossa tradução)

Neste papel, a Álgebra funcionou como uma lógica, uma idéia que Leibniz, e não Descartes, por causa de sua própria ênfase na prioridade da forma sobre o conteúdo concreto, iria desenvolver.

> Álgebra é especificamente uma questão de se livrar de algum conteúdo. Então, em virtude da descoberta de Descartes, a prova geométrica pode ser concebida como puramente formal. Leibniz pensou que Descartes tinha parado prematuramente, e não tinha visto um caminho para chegar numa característica universal que poderia ser considerada completamente geral. (Hacking, 1980)

Leibniz quis essa característica porque pensava que a verdade é constituída pela prova. Descartes não acreditou nisso. "Descartes quis boas maneiras para descobrir a verdade e era indiferente ao estatuto lógico de seus métodos" (ibid.). Mas Descartes decidiu seguir seu caminho para trazer a Análise, o método da descoberta, mais perto da síntese ou prova. Ele poderia ter feito isso simplesmente por "admitir na Geometria todas as curvas dadas por equações algébricas, mas ele preferiu uma base cinemática" (Boyer, 1988, p. 88).

Boutroux está completamente certo, entretanto, em sua afirmação de que Descartes, assim como Leibniz, não pensou conceitualmente e estruturalmente na Matemática, mas ficou confinado dentro dos limites do representacionalismo e do método sintético ou construtivo.

O que significa isso? Os geômetras do século XIX, como Poncelet, Grassmann, Möbius, Plücker, etc. queixaram-se muito sobre o caráter artificial de coordenadas cartesianas, e estabeleceram o objetivo "de calcular com as coisas elas mesmas". Quiseram operar sobre o conceito completo, isto é, com a forma ou a estrutura própria, como é representada por uma classe de diagramas equivalentes, e não apenas uma representação específica. Uma expressão formal, Grassmann diz, atinge um significado concreto "pela busca por todas as expressões que são iguais à expressão dada". Com esse procedimento,

> (...) começamos uma série de representações concretas dessa conexão formal e a classe que estas representações possíveis se relacionaram como uma unidade, como a espécie de um gênero (não como as partes de um todo), indicaria o conceito concreto a nossos olhos. (Grassmann, 1844, p. 108)

Um conceito matemático não existe independentemente da totalidade de suas representações possíveis, mas também não deve ser confundido com uma representação. Essa classe ou totalidade de representações possíveis, obviamente, não é uma classe determinada em absoluto, como sugerido uma concepção extencional ou conjunto-teórica da Matemática. Na Geometria, usa o princípio da continuidade como um tipo da orientação heurística. O Erlangen Programm, de Klein, representa uma outra maneira de definir essa classe. Por conta disso, operar sobre o conceito próprio na Geometria significa procurar aspectos que são invariantes sob determinadas transformações. Essa concepção estrutural de objeto matemático é expresso em novas formas de prova, como exemplificado acima na discussão do teorema sobre a reta de Euler, sendo um exemplo especial do teorema de Desargues e assim derivá-lo dos axiomas da Geometria Projetiva.

Conclusão

Os três estágios de desenvolvimento cognitivo propostos por Piaget – da consideração de objetos individuais à orientação para ações e transformações e finalmente às estruturas – parecem *grosso modo* correto. Piaget, entretanto, faz uma distinção muito radical entre agir e perceber e entre abstração empírica e abstração reflexiva. A razão pode ser encontrada exatamente no seu estruturalismo.

Piaget partiu das observações fundamentais de que operações sobre qualquer conjunto de objetos podem ser combinadas para formar estruturas numa maneira muito natural, embora os objetos, eles mesmos, parecem isolados completamente um do outro. Por exemplo, as transformações de qualquer conjunto de objetos para eles mesmos formam uma estrutura matemática do grupo. Assim, estruturas de ações, por exemplo, da estrutura de um grupo das transformações, são gerais, uma vez que as ações elas mesmas permanecerem individuais, entidades concretas. Essa "auto-organização" das ações em totalidades estruturadas, pelas quais são generalizadas, certamente não ocorre sem que se percebam os efeitos "empíricos" dessas ações. Pensar estruturalmente em termos de relações é impossível sem a percepção de efeitos muito concretos. Daqui a idéia de transformação concreta ou movimento concreto, como surgiu da Álgebra e desde Descartes foi introduzido gradualmente na Geometria, permanece essencial.

Piaget é certo em enfatizar a importância fundamental da noção da estrutura em nosso tempo. Nós não somente pensamos em termos estruturais, também percebemos e visualizamos estruturas, pintamos, compomos e escrevemos guiados por princípios estruturais. Mas Piaget negligencia a representação, a percepção e a língua, e esqueceu que a estrutura não vem despida, sem substância ou vestimentas. As estruturas, por si próprias são apenas os esqueletos que não podem nem evoluir nem se sustentar sozinho.

Referências

BETH, E. e PIAGET, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology.* Dordrecht, Reidel.

BOLZANO, B. (1975). *Einleitung zur Größenlehre und erste Begriffe der allgemeinen Größenlehre.* BERG, J. (ed.). Stuttgart/Bad Canstatt, Frommann-Holzboog.

BOUTROUX, P. (1920). *L'Ideal Scientifique des Mathématiciens*. Paris, Librairie Félix Alcan.

BOYER, C. (1988). *History of Analytic Geometry*. N. J., The Scholar's Bookshelf.

CASTONGUAY, C. (1972). *Meaning and Existence in Mathematics*. Wien, Springer Verlag.

CAUCHY, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris, Impr. Royale.

COXETER, H. e GREITZER, S. (1967). *Geometry revisited.* Princeton, The MAA New Math. Library (v. 19).

CURRY, H. B. (1970). *Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics.* North-Holland Publishing Company Amsterdam.

DESCARTES, R. (1985). *The Philosophical Writings of Descartes*. J. Cottingham, R. Stoothoff, D. Murdoch (eds.). Cambridge University Press.

EULER, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum.* Berlin, Springer Verlag.

FREGE, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Reprint 1961. Olms, Hildesheim.

GARBER, D. (1992). *Descartes' Metaphysical Physics*. Chicago, Univ. of Chicago Press.

GRASSMANN, H. (1844/1969). *Die lineare Ausdehnungslehre*. Leipzig, Wigand, Reprint New York, Chelsea Publ. Comp.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1970). *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass., MIT Press.

HACKING I. (1980). *Leibniz and Descartes: Proof and Eternal Truths in: Descartes' Philosophy, Mathematics and Physics*, Stephen Gaukroger (ed.). Brighton, Sussex, The Harvester Press.

HINTIKKA (1992). "Kant On the Mathematical Method". In: POSY, C. J. *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays*. Dordrecht, Kluwer, Synthese Library.

HUME, D. (1777). *Enquiries Concerning Human Understanding* Oxford, Ed. L. A. Selby-Bigge.

KLINE, M. (1985). *Mathematics and the Search for Knowledge*. Oxford University Press.

LACHTERMAN, D. R. (1989). *The Ethics of Geometry: A Genealogy of Modernity*. New York, Routledge.

METZINGER, T. (ed.) (2000). *Neural Correlates of Consciousness*. Cambridge, Mass., The MIT Press.

MUELLER, I. (1969). Euclid's Elements and the Axiomatic Method. *Brit. J. Phil. Sci*., n. 20, pp. 289-309.

PIATTELLI-PALMARINI, M. (1980) (ed.). *Language and Learning – The Debate between Piaget and Chomsky*. Cambridge, Mass., Harvard University Press.

PIAGET, J. (1970). Structuralism. London, Routledge.

_____ (1972). "The Concept of Structure". In: *Unesco, Scientific Thought, Mouton Humanities Press*. The Hague.

_____ (1977). *Recherches sur L'abstraction Réfléchissante*. Paris, Presses Universitaires de France.

PIAGET, J. e GARCIA R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York, Columbia Univ. Press.

PEIRCE, C. S. (1931-1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce I-VIII*. C. Hartshorne, P. Weis and Vurgs (eds.). Camb. MASS Harvard University Press.

PUTNAM, H. (1975). "Mathematics without Foundations". In: *Mathematics, Matter and Method*. Cambridge, Mass., University Press.

ROTMAN, B. (1977). *Jean Piaget, Psychologist of the Real*. Hassocks Harvester Press,

RUSSELL, B. (1997). *The Problems of Philosophy*. Oxford

SCHLICK, M. (1979). *Allgemeine Erkenntnislehre*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt/M.

ULAM, S. (1969). "The applicability of Mathematics". In: *The Mathematical Sciences*. MIT Press (Cosrims Report).

Recebido em out./2002; aprovado em nov./2002