La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas*

JOSEP GASCÓN**

Resumo

A luta para eliminar a *mentalidade mágica* tem se prolongado na cultura ocidental por milênios e, tem marcado o desenvolvimento de todas as disciplinas científicas. O processo de "desmagificação" tem ocorrido conjuntamente ao uso progressivo de *modelos* criados por uma dada disciplina. No que concerne à *didática das matemáticas*, dado que fazemos parte da geração fundadora dessa disciplina, podemos todavia dizer que estamos imersos em pleno processo de "desmagificação". Neste artigo, apresenta-se de forma muito esquemática um modelo criado pela didática das matemáticas para investigar as formas de organizar o estudo das matemáticas nas instituições escolares, isto é, *organizações didáticas* possíveis. Como fruto da utilização desse modelo, temos desenhado uma nova atividade de ensino e aprendizagem: as "Oficinas de Práticas Matemáticas".

Palavras-chave: teoria antropológica do didático (TAD); organização didática (OD); Oficinas de Práticas Matemáticas.

Abstract

The fight to eliminate the "magic mentality" *has been going on for millennia in the Western culture and has affected the development of all scientific disciplines. This process of "dismagicfication" has been occurring together with the progressive use of* models *created by a certain discipline. As for* didactics of mathematics, *as we belong to the founding generation of this discipline, we can say that we are still immersed in the process of dismagicfication. This paper presents, in a very summarised form, a model created by didactics of mathematics to investigate different forms of organising the study of mathematics in educational institutions, that is, the possible* didactic organisations. *The use of this model has brought on the design of a new teaching and learning activity: the "Workshop of Mathematical Practices".*

Key-words: *anthropologic theory of the didactic; Didactic organization; Workshop of Mathematical Practices.*

* Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT (MCT). Una versión provisional del mismo fue expuesta por el autor en las XI JAEM (Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas) celebradas en Tenerife y Gran Canaria los días 2 a 5 de julio de 2003.

** Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona. E-mail: gascon@mat.uab.es

Resumen
La lucha para eliminar la mentalidad mágica se ha prolongado durante milenios en la cultura occidental y ha marcado el desarrollo de todas las disciplinas científicas. Este proceso de "desmagificación" siempre ha ido acompañado de la utilización progresiva de modelos creados por la disciplina en cuestión. En lo que concierne a la didáctica de las matemáticas, y dado que formamos parte de la generación fundadora de esta disciplina, podemos decir que estamos todavía inmersos en pleno proceso de desmagificación. En este artículo se presenta, de forma muy esquemática, un modelo creado por la didáctica de las matemáticas para estudiar las formas de organizar el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares, esto es, las organizaciones didácticas posibles. Como fruto de la utilización de dicho modelo hemos diseñado una nueva actividad de enseñanza y aprendizaje: los "Talleres de Prácticas Matemáticas".
Palabras-clave: *Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); Organización Didáctica (OD); Talleres de Prácticas Matemáticas.*

La didáctica de las matemáticas, ¿ciencia o magia?

En su intervención en la Conferencia Científica internacional celebrada en Roma el año 2002, Umberto Eco habló sobre "La recepción de la ciencia por parte de la opinión pública y de los medios de comunicación". En esta alocución el semiólogo italiano sostiene que, aunque creemos que vivimos en la Edad de la Razón, dominada por la ciencia, en realidad seguimos sometidos a la *mentalidad mágica* que siempre resurge de sus cenizas y que se sustenta en la exigencia de la satisfacción inmediata de nuestros deseos.

> ¿Qué es la magia, qué ha sido durante los siglos y qué es, todavía hoy, aunque bajo una falsa apariencia? La presunción de que se podía pasar de golpe de una causa a un efecto por cortocircuito sin completar los pasos intermedios. Clavo un alfiler en la estatuilla que representa al enemigo y éste muere, pronuncio una fórmula y transformo el hierro en oro, convoco a los ángeles y envío a través de ellos un mensaje. La magia ignora la larga cadena de las causas y los efectos y, sobre todo, no se preocupa de establecer, probando y volviendo a probar, si hay una relación entre causa y efecto. De ahí su fascinación desde las sociedades primitivas hasta nuestro renacimiento solar y más allá, hasta la pléyade de sectas ocultistas omnipresentes en Internet. (Eco, 2002)

En este sentido Eco adjudica a la consideración popular de la *tecnología* un carácter mágico, puesto que la tecnología oculta la cadena de las causas y los efectos y así, por ejemplo, el usuario vive la tecnología del ordenador como pura magia.

En mi opinión, una diferencia esencial entre el *mago* y el *científico* consiste en que mientras el mago, en su soberbia, tiene la osadía de dar *respuestas definitivas*, el científico se esfuerza humildemente por plantear *preguntas* que sólo aceptarán *respuestas provisionales*. Mientras que las *teorías científicas* son modelos tentativos de ciertos aspectos de la realidad, la *magia* pretende captar la realidad en su totalidad para dominarla y someterla.

Toda teoría científica *modeliza* (algún aspecto de) un sistema o ámbito de la realidad. Los modelos científicos son instrumentos (máquinas) para producir conocimientos sobre el sistema estudiado que no pueden obtenerse trabajando directamente dentro del sistema. La magia, por el contrario, pretende *actuar* sobre la realidad de una manera *inmediata* y *directa* a partir de las acciones sobre ciertas representaciones simbólicas de la realidad (por ejemplo, "clavar un alfiler en la estatuilla que representa el enemigo" o "pronunciar unas palabras mágicas").

Según Max Weber el progreso científico podría describirse como un proceso de "desmagificación" que se ha prolongado durante milenios en la cultura occidental (Weber, 1959). Esta lucha para eliminar la *mentalidad mágica* en la explicación de los hechos ha estado presente a lo largo de la historia y se ha hecho especialmente visible en los periodos de emergencia y consolidación de las ciencias tanto "naturales" como "humanas". Es fácil rastrear huellas de esta lucha en los orígenes de la mayoría de las disciplinas; desde la física, la química, la biología y la medicina, hasta la psicología, la sociología, la ciencia política y la historia. En todos los casos esta desmagificación ha ido acompañada de la *modelización del sistema estudiado* que, como ya he dicho, sólo puede tomar en consideración algunos aspectos de dicho sistema.

En lo que concierne a la *didáctica de las matemáticas*, y dado que formamos parte de la generación fundadora de esta disciplina, podemos decir que estamos todavía inmersos en pleno proceso de *desmagificación*. Así, es habitual encontrarnos todavía con ilusionistas, no siempre desinteresados, que proponen soluciones "mágicas" a los problemas que los profesores de matemáticas nos planteamos. Dichas soluciones suelen presentarse en forma de *eslóganes pedagógicos* que, naturalmente, pretenden dar soluciones *inmediatas*, *directas* y *completas* a los problemas que el "sentido común" plantea utilizando las nociones aceptadas y vigentes en la cultura escolar.

Citaré a continuación algunas de las recetas mágicas que se proponen para responder a lo que considero que son genuinos *problemas docentes* y que, por lo tanto, merecen – los problemas subyacentes – ser analizados con más cuidado.

> R1. La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en (o girar en torno a) la actividad de *resolución de problemas*.
> R2. La *motivación* de los alumnos tiene una importancia crucial en el aprendizaje. El profesor debe proponer problemas *concretos* relacionados con la *vida cotidiana* (porque lo *concreto* es motivador y fácil, frente a lo *abstracto* que es aburrido y difícil).
> R3. El *juego* es un medio natural y eficaz para aprender matemáticas.
> R4. La enseñanza *interdisciplinar* es preferible a la enseñanza de las matemáticas aisladas.
> R5. Las *herramientas informáticas* son eficaces para enseñar y aprender matemáticas.
> R6. La educación matemática debe ser cada vez más *individualizada y personalizada* para responder a la exigencia creciente de *atención a la diversidad*.
> R7. Es preferible *innovar* que seguir con la *enseñanza tradicional* de las matemáticas.
> R8. A fin de superar sus preconceptos erróneos y resolver los problemas docentes, el profesor debe *reflexionar de manera descondicionada y colectiva*.

Si nos tomamos en serio los problemas que estas recetas pretenden resolver de un plumazo, veremos que cada uno de ellos merece un estudio científico serio y, por lo tanto, requiere la *utilización de modelos* que deberá elaborar la didáctica de las matemáticas. Aquí empezaré a responder a la *cuestión* que pretende zanjar el primero de los eslóganes citados y que puede formularse como sigue:

> *¿Cuál es el papel que juega o debería jugar la actividad de resolución de problemas en el proceso global de la enseñanza escolar de las matemáticas?*

Para responder a esta cuestión de una manera más fecunda y más útil que las recetas mágicas es imprescindible *elaborar un modelo* que nos permita analizar de manera sistemática y bajo ciertas hipótesis explícitas, los múltiples papeles que puede jugar la actividad de resolución de problemas en el sistema de enseñanza de las matemáticas. Éste será, por lo tanto, el objetivo principal de este trabajo. Mostraré, en resumen:

(1) Que la didáctica de las matemáticas, como toda ciencia teórico-experimental, construye y utiliza *modelos de la realidad* que estudia, no pretende manipular directamente la realidad misma, ni reproducirla fotográficamente.

(2) Que el eslogan "La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en la actividad de resolución de problemas" es, como todos, absolutamente inútil por su terrible ambigüedad. Veremos que existen múltiples maneras de "centrarse en la resolución de problemas", y que cada una de ellas asigna funciones muy diferentes y hasta contradictorias a la actividad de resolución de problemas.

Elementos de la teoría antropológica de lo didáctico

Para construir un modelo debemos situarnos en una teoría didáctica concreta. En nuestro caso nos situamos en la teoría antropológica de lo didáctico que se enmarca dentro del Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas. Este Programa nació como fruto de la convicción de que muchos de los problemas de la Educación Matemática tienen su origen en las propias *matemáticas enseñadas* y que, por tanto, se debe tomar la actividad matemática como objeto primario de estudio, esto es, como nueva "puerta de entrada" del análisis didáctico.[1] La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en el ámbito de dicho Programa, empieza proponiendo un modelo epistemológico general de

1 Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

las matemáticas en términos de *organizaciones matemáticas institucionales* (Chevallard, 1997, 1999, 2000, 2002a y 2002b). Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que *es* una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: *tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías*. Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o "*praxis*", $[T/\tau]$, formada por las *tareas*, T, y las *técnicas* matemáticas, τ; y el "*logos*", $[\theta/\Theta]$, constituido por el *discurso matemático* que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la *tecnología*, θ, que hace referencia directa a la práctica y la *teoría*, Θ, que constituye un segundo y último nivel de justificación de la práctica (o tecnología de la tecnología). Al unir las dos caras de la actividad matemática, *praxis* y *logos*, se obtiene la noción de *praxeología matemática*.

Las organizaciones (o praxeologías) matemáticas más elementales se llaman *puntuales* y están constituidas alrededor de lo que en una determinada institución es considerado como un único tipo de tareas. Cuando una OM se obtiene por integración de cierto conjunto de OM *puntuales*, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico θ, diremos que tenemos una OM *local* caracterizada por dicha tecnología θ y la designamos mediante OM = $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Más allá de las OM locales, la TAD se habla también de OM "regionales" y "globales" (Chevallard, 1999).

Pero, ¿qué se necesita para elaborar una OM? Esto es, ¿cuáles son las condiciones que posibilitan el desarrollo de las actividades matemáticas institucionalizadas? O, en otros términos, ¿cuáles son los medios de que dispone el matemático investigador o el alumno de matemáticas para llevar a cabo una actividad matemática que cristalice en una OM que responda a ciertas cuestiones?

Ante todo hay que decir que, tanto el investigador como el alumno, cada uno en su nivel, utilizan *técnicas didácticas*, esto es, *técnicas de estudio*, cuya eficacia depende de su integración en un proceso, el *proceso de estudio* de una OM en el seno de una institución. Como toda actividad humana, la actividad de estudio (de las matemáticas) requiere de un discurso (en este caso "didáctico") más o menos explícito que justifique e interpreta la práctica. Paralelamente a la noción de OM surge así la noción de *organización* (o *praxeología*) *didáctica*, OD, con sus dos caras: "praxis" – formada por *tareas* y *técnicas didácticas* – y discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica – formado por *tecnologías* y *teorías didácticas*.[2]

La TAD completa este modelo epistemológico "estructural" del saber matemático y de su estudio con un modelo "funcional" de la *actividad didáctica* o *actividad de estudio* (de las matemáticas). Se trata de la *teoría de los momentos didácticos* que puede considerarse como un modelo funcional del proceso de estudio de las OM. La teoría de los *momentos didácticos* propone seis momentos o *dimensiones* del proceso de estudio. Según Chevallard (1999, pp. 250-255):

> El *primer momento* del estudio es el del *primer encuentro* con la organización O que está en juego. Un tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro – o de "reencuentro" – inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra O, es el que consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas T_i constitutivas de O. [...]
> El *segundo momento* es el de la *exploración* del tipo de tareas T_i y de la *elaboración de una técnica* τ_i relativa a este tipo de tareas. [...] En realidad, el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger: el estudio de un problema *particular*, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un *medio* para que la constitución de una técnica de resolución.
> El *tercer momento* del estudio es el de la *constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ_i. De una manera general, este momento está en interrelación estrecha con *cada uno* de los otros

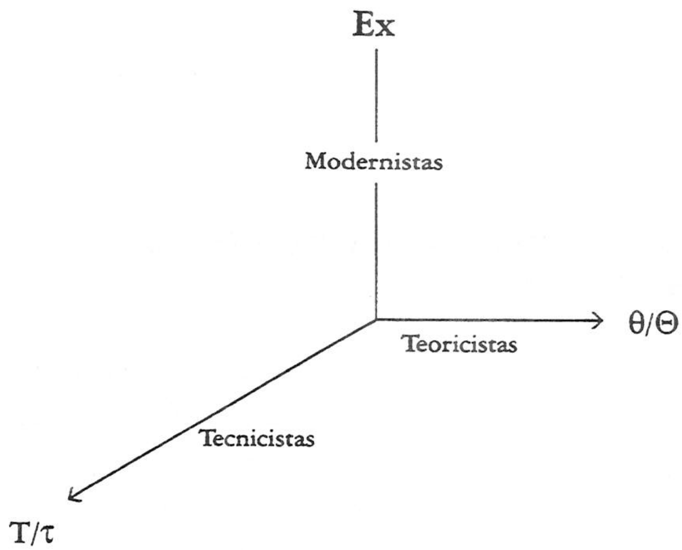
> global, a veces las estrategias de dirección de estudio tradicionales hacen en general de este tercer momento la *primera etapa* del estudio [...].
> El *cuarto momento* es el del *trabajo de la técnica*, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable (lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces), y acrecentar la maestría que se tiene de ella: este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular uno o unos corpus de tareas adecuados tanto cualitativamente como cuantitativamente. [...]
> El *quinto momento* es el de la *institucionalización*, que tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la OM elaborada, distinguiendo claramente, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no le hayan sido integrados y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la organización matemática considerada [...].
> El *sexto momento* es el de la *evaluación*, que se articula con el momento de la institucionalización [...]. En la práctica, llega siempre un momento en el que se debe "hacer balance": porque este momento de reflexión donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina lo que *vale* lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la Escuela, participa de hecho de la "respiración" misma de toda actividad humana.

En resumen, para elaborar una OM se necesita una OD que posibilite y gestione un *proceso de estudio* cuya dinámica puede ser descrita en términos de los seis momentos o dimensiones del mismo. Aunque, en realidad, la frontera entre lo matemático y lo didáctico no está establecida de una vez por todas, puesto que históricamente se ha producido una matematización creciente de lo didáctico y, muy en particular, de las técnicas de estudio de las matemáticas. Si, en principio, la *actividad de estudio* puede ser considerada como *emergente de una* OM (en tanto que actividad dirigida a responder las cuestiones problemáticas que la OM permite plantear), también debe considerarse como *productora de saber matemático* y, por tanto, de ciertas OM. Lo matemático y lo didáctico aparecen así como dos dimensiones de la realidad doblemente interdependientes. Lo didáctico, esto es, lo relativo al estudio de las matemáticas, supone la existencia de las OM, pero contribuye a su producción. Las OM son, a la vez, el *objeto* y el *producto* de la actividad de estudio.

Un modelo del espacio de las organizaciones didácticas posibles

Para empezar a caracterizar las *organizaciones didácticas* (en adelante OD), esto es, las maneras posibles de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en una institución docente concreta, necesitamos un punto de vista previo que nos proporcione criterios sobre qué debemos mirar y con qué nociones primitivas debemos describir lo que observamos. Esto es imprescindible para poner un poco de orden en las complejas *prácticas docentes del profesor de matemáticas*. En un trabajo anterior (Gascón, 2001) he utilizado la *teoría de los momentos didácticos* (que, como hemos dicho, es una parte integrante de la TAD) para elaborar una primera versión de un "sistema de referencia" que permite situar cada una de las OD posibles en correspondencia con algunas de las *dimensiones* o *factores* de la actividad matemática. Aquí describiré brevemente este modelo desarrollando esta metáfora geométrica en la dirección iniciada en Bosch y Gascón (2002).

Se trata de un hipotético espacio tridimensional cada uno de cuyos puntos representa una OD *ideal posible*. Los ejes del sistema de referencia que he seleccionado vienen representados por tres de los momentos o dimensiones de la actividad matemática: el momento *tecnológico-teórico*, θ/Θ, el momento del *trabajo de la técnica*, T/τ, y el momento *exploratorio*, Ex. En cada uno de estos ejes se sitúan OD ideales que llamamos *unidimensionales* porque se caracterizan por centrar el proceso de estudio en una única dimensión del proceso de estudio (la que corresponde al eje en cuestión) dándole a ésta una prioridad absoluta y olvidando, o asignando un papel muy secundario, a las restantes dimensiones. Aparecen así, respectivamente, las OD ideales ***teoricistas***, ***tecnicistas*** y ***modernistas***.



Entre las OD ideales que toman en consideración y empiezan a integrar dos momentos o dimensiones de la actividad matemática citaré otros tres tipos. Tenemos, en primer lugar, las OD ***clásicas***[3], que combinan los momentos *tecnológico-teórico*, θ/Θ, y del *trabajo de la técnica*, T/τ, y se caracterizan, entre otras cosas, por la trivialización de la actividad de resolución de problemas y por considerar que la enseñanza de las matemáticas es un proceso mecánico totalmente controlable por el profesor.

En segundo lugar tenemos las OD ***empiristas***[4], que pretenden integrar los momentos *exploratorio*, **Ex**, y del *trabajo de la técnica*, T/τ. Se caracterizan por la preeminencia que otorgan a la actividad de resolución de problemas dentro del proceso didáctico global y por considerar que el aprender matemáticas (al igual que aprender a nadar o a tocar el piano) es un proceso inductivo basado en la imitación y en la práctica.

Tenemos, por último, las OD ***constructivistas***[5], que toman simultáneamente en consideración los momentos *tecnológico-teórico*, θ/Θ, y *exploratorio*, **Ex**. Se caracterizan por contextualizar la actividad de

---

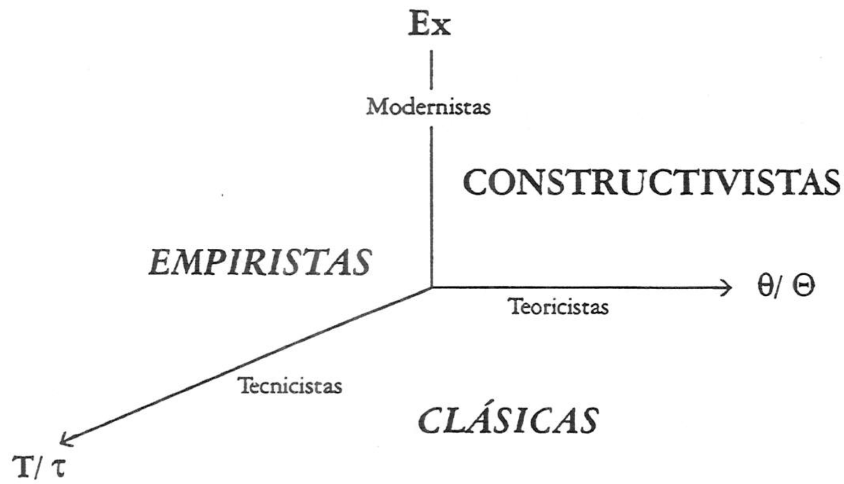
3 Las OD *teoricistas* y *tecnicistas* son organizaciones clásicas *extremas*, puesto que ambas son unidimensionales (Gascón, 2001).

4 Entre las OD *empiristas* analizaremos las *modernistas* (que son unidimensionales) y las *procedimentalistas* que toma en consideración dos dimensiones del proceso didáctico.

5 En lo que sigue analizaremos dos tipos particulares de OD constructivistas que hemos denominado, respectivamente, *constructivismo psicológico* y *constructivismo matemático*.

resolución de problemas situándola en una actividad más amplia y por considerar que el aprendizaje es un proceso activo de construcción de conocimientos que se lleva a cabo siguiendo unas fases determinadas y que depende esencialmente de los conocimientos adquiridos con anterioridad.

Cada uno de estos tres tipos de OD ideales bidimensionales: clásicas, empiristas y constructivistas, se sitúan en uno de los *planos coordenados* del sistema de referencia que hemos elegido en nuestro espacio de OD ideales posibles; el determinado por los dos ejes correspondientes a las dimensiones del proceso didáctico que cada uno de ellos toma en consideración.



Hemos mostrado que cada uno de esos tipos de OD se sustenta en un *modelo epistemológico general* de las matemáticas, esto es, en una forma particular y relativamente precisa de interpretar y describir la organización matemática escolar considerada como un todo. En concreto, las OD clásicas se sustentan en el ***euclideanismo***; las OD empiristas en los modelos epistemológicos ***casi-empíricos*** y las OD constructivistas en los modelos epistemológicos ***constructivistas***[6] (Gascón, 2001).

6 Los tipos de OD que hemos esquematizado muy brevemente son *tipos ideales* que *no han existido ni existirán nunca en estado puro* en ninguna institución escolar. Las OD efectivamente existentes en las instituciones escolares participan, en mayor o menor medida, de varios tipos de OD ideales, por lo que siempre tienen un carácter mixto y mucho más complejo.

Enseñar matemáticas es "mostrar" teorías cristalizadas: el teoricismo

Denominaremos *organizaciones didácticas teoricistas* o, simplemente ***teoricismo***, a las que se sustentan en una concepción del saber matemático que pone el acento en los conocimientos acabados y cristalizados en "teorías", al tiempo que se pone entre paréntesis la *actividad* matemática y sólo se toma en consideración el fruto final de esta actividad. Se trata de OD sustentadas en uno de los principales rasgos del *euclideanismo*, el que pretende que todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (*axiomas*) que pueden enunciarse utilizando únicamente términos perfectamente conocidos (*términos primitivos*).

Cuando en un sistema de enseñanza predomina el teoricismo se suele producir la concentración de los esfuerzos didácticos en el "*momento del primer encuentro*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) – esto es, en el momento en que el profesor presenta a los alumnos un cuerpo de conocimientos cristalizados en una teoría. La razón es sencilla: para el teoricismo, que identifica "*enseñar y aprender matemáticas*" con "*enseñar y aprender teorías*", el proceso didáctico empieza, y prácticamente acaba, en el momento en que el profesor "enseña" (en el sentido de "muestra") estas teorías a los alumnos (Gascón, 1994).

Tenemos, en resumen, el siguiente silogismo: dado que las teorías matemáticas se deducen por canales deductivos a partir de un conjunto de axiomas trivialmente verdaderos en los que sólo figuran términos perfectamente conocidos y dado que enseñar matemáticas es *mostrar estas teorías*, resulta que *la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debería ser, también, un proceso "trivial"*. Pero todos los datos empíricos disponibles contradicen esta conclusión y es especialmente paradójica en las instituciones en las que predomina el teoricismo. En estas instituciones es muy difícil dar razón de las enormes dificultades que tienen los estudiantes para *utilizar* adecuadamente un teorema, *aplicar* una técnica matemática o *comprobar* si un objeto matemático cumple o no cumple las cláusulas de una definición.

En cuanto a la resolución de problemas, hay que decir que en el teoricismo es considerada como una *actividad secundaria* dentro del proceso didáctico global y, en todo caso, como *auxiliar en el aprendizaje de las* *teorías*. Los problemas pueden utilizarse para *aplicar*, *ejemplificar* o *consolidar* los conceptos teóricos e, incluso, para *motivarlos*, *introducirlos* o *justificarlos* pero, en cualquier caso, la actividad de resolución de problemas no se considera" constitutiva del conocimiento matemático" propiamente dicho. En particular, se ignoran las tareas dirigidas a *elaborar estrategias de resolución* de problemas complejos y, por tanto, cuando aparece un problema que no puede resolverse mediante la aplicación inmediata de un teorema, entonces *el teoricismo trivializa los problemas mediante su descomposición en ejercicios rutinarios* (Gascón, 1989, p. 3 y ss.).

La característica esencial del teoricismo la situaremos, por tanto, en que ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y, en consecuencia, no concede ninguna importancia – epistemológica ni didáctica – a la *génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos*. Este prejuicio euclideanista que, contra toda evidencia empírica, presupone que el proceso de enseñanza de las matemáticas es un *proceso mecánico y completamente controlable por el profesor*, dificulta que la comunidad matemática nuclear (constituida por los productores del conocimiento matemático) pueda tomar seriamente en consideración los problemas didáctico-matemáticos como problemas científicos no triviales.

Entrenar en el uso de algoritmos: el tecnicismo

Dado que el teoricismo identifica "aplicar una técnica matemática" con "realizar una actividad absolutamente predeterminada por la teoría", resulta que en las instituciones docentes en las que impera este tipo de OD es muy difícil que se permita a los estudiantes trabajar tranquilamente una técnica hasta que ésta se desarrolle en sus manos. Este punto de vista puede provocar una catástrofe didáctica que es especialmente visible cuando afecta a los niveles más elementales de la enseñanza de las matemáticas. En la enseñanza primaria, en efecto, el menosprecio del dominio de las técnicas puede "vaciar" la enseñanza hasta el punto de que al final del proceso didáctico los alumnos no puedan mostrar ningún aprendizaje efectivo, ni siquiera el dominio de las operaciones aritméticas. En este punto parece natural el grito defensivo de *¡volver a lo básico*! para no perderlo todo. Surgen así OD que enfatizan los aspectos más rudimentarios del *momento del trabajo de la técnica* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Las llamaremos OD *tecnicistas* o, más brevemente, ***tecnicismo***.

Las tendencias tecnicistas aumentan después de épocas fuertemente teoricistas (como la que marcó el apogeo de la "*matemática moderna*" en los años sesenta y setenta) y, en general, en periodos de fuerte contestación social al aumento del fracaso escolar en matemáticas. El hecho de que muchos profesores se vean abocados al tecnicismo debe ser considerado como un *fenómeno didáctico* esencialmente independiente de la voluntad y de la formación de los profesores.

Las OD tecnicistas identifican implícitamente "enseñar y aprender matemáticas" con "*enseñar y aprender técnicas* (*algorítmicas*)" con el reduccionismo que esto implica. En particular, al enfatizar las técnicas "simples", el tecnicismo tiende a olvidar los "auténticos" problemas que son aquellos cuya dificultad consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución". En este sentido puede decirse que el tecnicismo comparte con el teoricismo la *trivialización de la actividad de resolución de problemas*, aunque la naturaleza de la "trivialización" es diferente. En el tecnicismo se parte de ciertas técnicas algorítmicas y se proponen únicamente aquellos ejercicios que sirven como "entrenamiento" para llegar a dominarlas; de esta forma se excluyen del repertorio de técnicas las estrategias de resolución que no son algorítmicas. La *trivialización de los problemas* no proviene aquí de una descomposición abusiva del problema, ni de adjudicar a la actividad de resolución de problemas un papel auxiliar, sino de una fijación en las técnicas elementales y algorítmicas que impide tomar en consideración problemas matemáticos no rutinarios.

Las OD teoricistas y tecnicistas comparten una *concepción psicologista ingenua* del proceso didáctico que tiene en el *conductismo* su referente más claro. En ambos casos se concibe el proceso de enseñanza como un *proceso mecánico y trivial totalmente controlable por el profesor*: el teoricismo tiende a concebir al alumno como una "*caja vacía*" que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar, paso a paso, a los sistemas conceptuales más complejos; el tecnicismo, por su parte, considera al alumno como un "*autómata*" que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición que proporciona un entrenamiento concienzudo. Hemos llamado *clásicos* a ambos tipos de OD, así como a todas las OD posibles que reducen el proceso de estudio a un juego entre el momento tecnológico teórico (característico del teoricismo) y los aspectos más rudimentarios del momento del trabajo de la técnica (característico del tecnicismo).

Para acabar de caracterizar el papel que juega la actividad de resolución de problemas en las OD clásicas, hay que decir que uno de los defectos más graves que comparten es el de tratar los problemas matemáticos como si éstos estuviesen *aislados* y *descontextualizados*. Esto significa, por una parte, que los problemas se tratan individualmente y nunca como representantes de ciertas *clases de problemas* y, por otra, que se tiende a presentar los problemas separados de su contexto, *sin ninguna conexión con el sistema* (matemático o extramatemático) a partir del cual surgen en el seno de una actividad matemática.

Aprender mediante una exploración *libre* y *creativa:* el modernismo

En las instituciones docentes en las que predominan las OD clásicas aparecen dificultades para gestionar el proceso de estudio de las matemáticas que tienen su origen del *engaño* que consiste en "motivar" y "justificar" la introducción de nuevos conceptos mediante problemas que están destinados a desaparecer de la escena, de la *trivialización* de los problemas, de la excesiva *algoritmización* de los conocimientos evaluables y, en definitiva, del *fracaso absoluto* de los alumnos cuando se enfrentan con problemas matemáticos no estandarizados.

Esta situación puede llevar a la necesidad de *rescatar la actividad de resolución de problemas* en sí misma, escandalosamente ignorada en las OD clásicas, y a tomarla como eje y finalidad de la actividad matemática y, por tanto, de todo el proceso didáctico. Denominaremos OD *modernistas* o, simplemente ***modernismo***, a esta forma de considerar el proceso didáctico que surge inicialmente como reacción a las evidentes limitaciones de las OD clásicas. En las instituciones docentes en las que predomina el modernismo se tiende a identificar la actividad matemática con la *exploración de problemas no triviales*, esto es, con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución (tantear técnicas diversas, aplicar algún resultado conocido, buscar problemas semejantes, formular conjeturas, buscar contraejemplos o intentar resolver un problema un poco diferente). En otras palabras, el modernismo se caracteriza por conceder una preeminencia absoluta al ***momento exploratorio*** (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); esto significa que identifica "aprender matemáticas" con *aprender la actividad exploratoria de problemas no triviales*.

Así, el *modernismo* reacciona contra la visión simplista de la enseñanza considerada como un proceso trivial, mecánico y totalmente controlable por el profesor. Traslada el centro de gravedad del proceso didáctico al *aprendizaje* y considera que dicho *proceso de aprendizaje* es un *proceso de descubrimiento inductivo y autónomo*.

Una forma de caracterizar los problemas "no triviales" es mediante la noción de "*problemas tipo olimpiadas*". Callejo (1991) les adjudica las siguientes propiedades:

(a) Para resolverlos se debe utilizar una *combinación original de técnicas*.
(b) Es habitual tener que trabajar sobre ellos durante *largo tiempo*.
(c) No es habitual encontrar problemas semejantes en los *libros de texto*.
(d) Se trata de problemas que aceptan *varias estrategias de resolución*.

Incluso suelen ser resolubles en *más de un dominio matemático*.

El modernismo persigue explícitamente que la exploración sea realmente "libre" – también de las teorías y de las técnicas matemáticas – para que sea más *creativa*, en el sentido cultural de "no repetitiva", "sorprendente" y "original". Por ello el *aislamiento* y la *descontextualización* de los problemas, que ya era preocupante en las OD clásicas, se agravan todavía más en el modernismo.

Tenemos, en resumen, que teoricismo, tecnicismo y modernismo constituyen tipos de OD *extremadamente reduccionistas*. Cada uno de ellos *enfatiza una única dimensión de la actividad matemática*, ignorando las restantes (Gascón, 1994).

Aprender a utilizar una "directriz heurística": el procedimentalismo

El modernismo pretende *destrivializar la actividad matemática* ocultando las clases de problemas que constituyen el contexto en el que se sitúan los problemas y fingiendo que no existen técnicas matemáticas, esto es, maneras de hacer sistemáticas y compartidas que pueden ser enseñadas en la institución. Esta ocultación se realiza con la intención de asegurar que la exploración sea "libre" (de las técnicas matemáticas potencialmente útiles, para que éstas no disminuyan la libertad del "explorador") y "creativa" en el sentido cultural ingenuo de "sorprendente" y "no rutinaria", antes citado.

Pero existen otras maneras de *destrivializar el uso de las técnicas matemáticas*. Por ejemplo, acotando una clase de problemas suficientemente amplia y utilizando las *técnicas simples* para elaborar una *estrategia compleja* de resolución de problemas útil para abordar los problemas de dicho clase. Llamaremos OD *procedimentalistas*[7] o, mejor, ***procedimentalismo***, a las formas de organizar el estudio de las matemáticas que sitúan como principal objetivo del proceso didáctico el *dominio de sistemas estructurados de técnicas heurísticas* (en el sentido de no algorítmicas). Es en este sentido que el procedimentalismo completa y mejora la *destrivialización del conocimiento matemático* iniciada por el modernismo. Además, el procedimentalismo puede ser interpretado como la *completación del tecnicismo* puesto que desarrolla el trabajo de la técnica mucho más allá de las técnicas simples. Por todo ello podemos considerar que el procedimentalismo es una OD de *segundo orden*, puesto que relaciona funcionalmente dos dimensiones (o momentos) de la actividad matemática: el *momento exploratorio* y el *momento del trabajo de la técnica* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

En aquellas instituciones didácticas en las que predomina el procedimentalismo, la resolución de problemas se utiliza como una estrategia didáctica encaminada a que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de técnicas matemáticas o *patrones de resolución* en el sentido de Polya (1945, 1954 y 1962-65). Este punto de vista comporta necesariamente trabajar con "clases de problemas" y pone de relieve una cuestión central: ¿cómo determinar, en cada caso, *la amplitud más adecuada de la clase de problemas* que se tomará como dominio de validez de la estrategia de resolución que se quiere enseñar? (Gascón, 1989).

7 Dentro del espacio de las OD posibles descrito anteriormente, las OD procedimentalistas se sitúan en el plano de las OD *empiristas* porque integran dos dimensiones del proceso de estudio: el momento exploratorio (**Ex**) y el momento del trabajo de la técnica (**T**/ τ).

Génesis cognitiva de conocimientos: constructivismo psicológico

Analizaremos, para acabar, dos nuevas *OD* ideales que, por sustentarse en la epistemología constructivista, denominaremos respectivamente ***constructivismo psicológico*** y ***constructivismo matemático***. Mostraremos que ambas relacionan – aunque sea parcialmente – el *momento exploratorio*, esto es, la dimensión exploratoria de la actividad matemática, con el *momento tecnológico-teórico*, es decir, aquel momento de la actividad matemática en el que se elaboran justificaciones e interpretaciones de la práctica matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Incluiremos dentro de las OD ***constructivistas*** todas aquellas maneras de interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje que identifican "enseñar matemáticas" con posibilitar que los estudiantes *"construyan" los conocimientos matemáticos*.

Cuando no se hace ninguna referencia explícita a la naturaleza matemática de la propia actividad de construcción ni al contexto en el que se realiza dicha construcción y cuando se supone que se trata de un *proceso psicológico* y no de una actividad con relevancia matemática en sí misma, hablaremos de OD próximas al ***constructivismo psicológico***. Dentro de esta forma de constructivismo, se utiliza la resolución de problemas como un *simple medio* para "construir" conocimientos nuevos.

Hay que decir que existe una enorme variedad de maneras diferentes de entender la "construcción" de los conocimientos matemáticos así como el papel que desempeña la resolución de problemas en esa construcción. Aquí describiremos únicamente las dos variantes ideales extremas que hemos citado empezando por el *constructivismo psicológico*.

Para simplificar, tomaremos la descripción que hacen algunos autores de lo que denominan una *"situación problema"* (Arsac y otros, 1988). Esta caracterización nos servirá para entender mejor el papel que juega la actividad de resolución de problemas en el constructivismo psicológico.

(i) El alumno ha de poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder discernir lo que es una *solución posible*.

(ii) Los conocimientos del alumno deben ser, en principio, *insuficientes* para resolver el problema.

(iii) La "situación problema" debe permitir al alumno decidir si una solución determinada es *correcta o no*.

(iv) El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ("construya") debe ser la *herramienta más adecuada* para resolver el problema propuesto, en el nivel de los conocimientos del alumno. La construcción de este conocimiento constituye el objetivo fundamental del constructivismo psicológico.

El constructivismo psicológico relaciona funcionalmente dos dimensiones diferentes de la actividad matemática: el *momento exploratorio* y el *momento tecnológico-teórico*, dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas aunque sólo sea como *instrumento de la génesis de los conceptos*. Por esta razón no puede considerarse una OD "unidimensional". Continúa ignorando, sin embargo, la función del *trabajo de la técnica* en el aprendizaje de las matemáticas en general y en la resolución de problemas en particular.

Dado que las "*situaciones-problema*" se eligen en función del concepto o "conocimiento" que se quiere que el alumno "construya", resulta que el constructivismo psicológico está (en el espacio de las OD posibles) más cerca del teoricismo que del tecnicismo. El constructivismo psicológico presenta los problemas matemáticos tan aislados como el teoricismo y el tecnicismo y casi tanto como el modernismo. Pero el *sistema conceptual* en el que el concepto a construir ocupará su lugar, constituye un cierto contexto de la situación-problema que se ha elegido como instrumento de construcción de dicho concepto y permite decir que los problemas se presenten bastante más contextualizados que en las OD unidimensionales descritas anteriormente.

Génesis de conocimientos mediante modelización: constructivismo matemático

Llamaremos OD *modelizacionistas* o, simplemente, ***modelizacionismo***, a las formas de organizar el estudio de las matemáticas que interpretan "aprender matemáticas" como un proceso de construcción de conocimientos matemáticos (relativos a un *sistema* matemático o extramatemático) que se lleva a cabo mediante la utilización de un *modelo matemático* de dicho sistema. En estas OD la descontextualización de los problemas desaparece hasta el punto de llegar a identificarse el *objetivo de* *la resolución de los problemas*, con la *obtención de conocimientos sobre el sistema modelizado*. La actividad de resolución de problemas se engloba, por tanto, en una actividad más amplia que podemos llamar *actividad de modelización matemática* y que esquematizaremos en cuatro estadios, sin entrar en detalles ni querer prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos (Chevallard, 1989).

Primer estadio: El punto de partida o primer estadio de la modelización matemática lo constituye una *situación problemática* en la que pueden formularse preguntas y conjeturas, normalmente con poca precisión, y en la que se pueden llegar a detectar y formular provisionalmente algunos problemas matemáticos. Aunque tradicionalmente se han considerado preferentemente *sistemas extramatemáticos* (principalmente físicos, pero también biológicos, económicos, informáticos o lingüísticos, entre otros) como candidatos a ser modelizados matemáticamente, la propia historia de las matemáticas nos muestra que la *modelización matemática de sistemas matemáticos* ha sido y continúa siendo uno de los motores principales del desarrollo del saber matemático.

Segundo estadio: Engloba la *definición o delimitación del sistema* subyacente a la situación problemática (mediante la elección de las variables que se consideran "relevantes") y la *elaboración del modelo matemático* correspondiente. El lenguaje y las técnicas propias del modelo matemático permitirán formular con precisión los problemas enunciados provisionalmente en el estadio anterior.

Tercer estadio: Incluye, además del *trabajo técnico* dentro del modelo, la *interpretación* de este trabajo y de sus resultados *dentro del sistema modelizado*. En este punto no hay que olvidar que, cuando se trata de modelizar un sistema matemático, entonces éste puede ser considerado, a su vez, como el modelo de su modelo.

Cuarto estadio: En este último estadio de la actividad de modelización matemática se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya resolución permitirá responder a cuestiones, relativas al sistema, difícilmente formulables antes de la elaboración del modelo matemático. Además, en este estadio los problemas formulables dentro del modelo pueden independizarse del sistema inicial dando origen a nuevas organizaciones matemáticas (nuevos tipos de problemas, nuevas técnicas y nuevas teorías).

Resulta, en definitiva, que en las OD *modelizacionistas* el objetivo de la actividad matemática – y, por tanto, el de la enseñanza de las matemáticas – es la *obtención de conocimientos relativos a un sistema modelizado* que, en principio, puede ser tanto matemático como extramatemático. Los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema; así la resolución de un problema pasa siempre por la construcción explícita de un *modelo del sistema subyacente* y tiene como objetivo la producción de conocimientos relativos a dicho sistema. Sus limitaciones más importantes tienen relación, de nuevo, con el *olvido del momento del trabajo de la técnica* y del papel del *desarrollo de las técnicas matemáticas* en la actividad matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

De la modelización matemática al estudio de campos de problemas

Hemos visto que en la *modelización matemática* culmina el proceso de contextualización de la actividad de resolución de problemas, puesto que:

(a) Contextualiza las *teorías matemáticas* al tomarlas como instrumentos de modelización de un sistema;

(b) Contextualiza la *actividad exploratoria* que aparece en los primeros estadios de la modelización;

(c) Contextualiza el *trabajo técnico* que se realiza dentro del modelo, mediante la *interpretación* del mismo en el lenguaje del sistema modelizado.

La principal limitación de las OD constructivistas (incluyendo el constructivismo matemático) radica en que no permiten un desarrollo suficiente del trabajo de la técnica. Subsanar esta limitación constituirá, por lo tanto, el punto de partida para diseñar OD más complejas y relativamente más completas que integren las tres dimensiones de la actividad matemática que definen nuestro espacio de OD posibles. Para ello se requerirá dar cabida, con toda normalidad y sin las cortapisas y los prejuicios culturales habituales, al trabajo de la técnica como una dimensión más de la actividad matemática.

Una estrategia didáctica que va en la dirección de completar el modelizacionismo consiste en partir de los tipos de problemas que emergen en la cuarta etapa de la modelización matemática y llevar a cabo con ellos un *estudio profundizado* (Bosch y Gascón, 1992, 1993 y 1994) lo que provocará que éstos acaben independizándose del sistema modelizado. De esta manera *el modelo se autonomiza* y toma vida propia, con la consiguiente aparición de *nuevos campos de problemas* y el *desarrollo de las técnicas matemáticas* en manos de los estudiantes.

Pero si en lugar de partir del modelizacionismo nos situamos en una OD empirista (por ejemplo, procedimentalista) podemos plantear problemas que estén en la frontera y más allá del dominio de validez de las estrategias de resolución (o técnicas matemáticas no algorítmicas) de las que se dispone. De esta manera se podrían de manifiesto las limitaciones de cualquier técnica matemática lo que provocaría la necesidad de plantear cuestiones tecnológicas sobre el *alcance*, *la economía*, la *pertinencia* y la *eficacia* de las técnicas matemáticas. Se utilizarían entonces los problemas para analizar el *dominio de validez y las limitaciones de las técnicas* matemáticas, en lugar de utilizar las técnicas únicamente para resolver los problemas.

Cualquiera de las dos estrategias didácticas descritas provocará un *desarrollo de las técnicas* matemáticas iniciales – ya sea mediante variaciones de las técnicas antiguas o combinaciones de éstas – y la emergencia de "nuevas" técnicas, con la consiguiente necesidad de *interpretarlas y justificarlas*, lo que acarreará *nuevas necesidades "teóricas"* con lo que se abre el camino para el diseño de OD menos reduccionistas.

Las OD que completen, a la vez, a las OD *clásicas*, a las OD *empiristas* y a las OD *constructivistas*, son OD generadas por el *estudio de campos de problemas*. Se trata de OD que, en nuestro modelo tridimensional de las OD posibles, tienen las tres componentes no nulas. Para que esto sea posible, de manera institucionalizada, hemos diseñado el *Taller de Prácticas Matemáticas* (Bosch y Gascón, 1992, 1993 y 1994) cuyas funciones didácticas son:

(a) Hacer vivir de manera normal el *momento de la técnica* en la institución docente.

(b) Rescatar al alumno de su *incertidumbre radical* y permitirle que llegue a ser un verdadero "*experto*".

(c) *Integrar el proceso de estudio*, muy atomizado en las actuales instituciones docentes, conectando la exploración con el entorno tecnológico-teórico.

(d) *Crear nuevos objetos matemáticos*: técnicas, problemas, nociones y justificaciones.

(e) *Cuestionar* sistemáticamente el *alcance*, la *eficacia* y la *pertinencia* de las *técnicas*.

(f) *Retomar* las *clases de problemas* ya estudiadas (incluso en cursos anteriores) para *ampliarlas* y *reinterpretarlas*.

La didáctica de las matemáticas como ciencia relativamente autónoma

Una vez descrito brevemente, a título de ejemplo, un modelo construido por la didáctica de las matemáticas para producir conocimientos relativos a las posibles formas de organizar el estudio de las matemáticas en las instituciones docentes, quiero volver sobre la cuestión inicial.

- ¿En qué punto nos encontramos dentro del proceso de "*desmagificación*" de la didáctica de las matemáticas?
- ¿Cuál es el «estatus» actual del "*saber didáctico*"?[8]
- ¿Basta con el "sentido común", la "reflexión" y la "opinión" para resolver los problemas docentes del profesor de matemáticas?
- ¿Cuál es el ámbito en el que se sitúa el "objeto de estudio" de la didáctica de las matemáticas?
- ¿Es este ámbito relativamente autónomo del resto de las disciplinas científicas?
- ¿Existen fenómenos didáctico-matemáticos no reducibles a sus aspectos *semióticos*, *biológicos*, *psicológicos* y *sociólogicos*?

Para empezar a responder a estas cuestiones quizá sea útil recordar cómo eran considerados por la cultural los hechos y los fenómenos físicos en los albores de la constitución de la física experimental como disciplina científica.

8 En Gascón (1993 y 1998) se analiza con cierto detalle la génesis y el desarrollo de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Antes de que la física clásica pasara a formar parte de nuestra cultura, muchos episodios cotidianos como, por ejemplo, la salida del sol, el vuelo de las aves, el movimiento de las estrellas y la caída de los cuerpos, no tenían ninguna relación entre sí. El fenómeno de la *gravitación universal* era *invisible* y, por tanto, los citados episodios eran *transparentes*, no se cuestionaba su origen y no se sospechaba que pudiesen tener una explicación común. A lo sumo se daba, para cada uno de ellos y de forma completamente independiente, una "explicación" obvia basada en el sentido común o en la "naturaleza de las cosas".

Ésta es, aún hoy día, la situación en la que nos encontramos con los hechos didáctico-matemáticos: que los alumnos persistan en sus errores incluso después de reconocerlos como tales; que no se hagan responsables de los resultados matemáticos que obtienen o que, a un nivel más concreto, no acepten que los cuadrados son, a la vez, rombos y rectángulos, o no sepan para qué sirven las fracciones, siguen siendo considerados en la cultura escolar como hechos aislados que no tienen ninguna relación entre sí. Se les considera como episodios *no problemáticos* que pueden zanjarse echando mano a nociones del sentido común tales como "*motivación*", "*capacidad*" e "*interés*" de los alumnos, junto a la supuesta *inadecuada formación* de los profesores y la excesiva *abstracción* de las matemáticas enseñadas.

Todavía prevalece la *opinión* de los que se autoproclaman "expertos" y *trivializan los problemas de la Educación Matemática* porque ignoran la existencia y la "resistencia" de los fenómenos didáctico-matemáticos. Proponen *soluciones inmediatas* y oportunistas apelando a la "buena voluntad" de los actores. Alimentan la ilusión del *profesor omnipotente* al que se supone, ingenuamente, completamente *libre* de las restricciones inherentes a la relación didáctica.

Esta mentalidad precientífica, mágica, hace *recaer sobre el profesor* (sobre su formación, su vocación y su capacidad) *toda la responsabilidad* de la educación matemática. Esta tendencia a la *personalización* y *trivialización* de la problemática didáctica, que muchas veces es una tendencia interesada, constituye en mi opinión, el mayor peligro para el futuro de la Educación Matemática.

Para dominar los *fenómenos económicos* y para que los *aviones vuelen* no basta con la buena voluntad ni con el sentido común; hemos necesitado *una ciencia* y el desarrollo de una *tecnología asociada*. Los fenómenos ligados a la creación y difusión de los conocimientos matemáticos, ¿son acaso más sencillos que los fenómenos físicos o más fáciles de dominar que los fenómenos económicos?

Quiero acabar reivindicando con fuerza, ante la comunidad de educadores matemáticos y ante la comunidad matemática en su conjunto, la ambición irrenunciable de construir una ciencia que tenga como objeto de estudio las *condiciones de creación y difusión de los saberes matemáticos en las instituciones sociales*.[9]

Referencias

ARSAC, G. et alii (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Irem de Lyon.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1992). Una nova activitat docent: les pràctiques a la llicenciatura de matemàtiques. *Jornades sobre innovació en la docència universitària*. Universitat Autònoma de Barcelona, abril.

_______ (1993). "Prácticas en matemáticas: el trabajo de la técnica". In: FILLOY, E.; PUIG, L. y ROJANO, T. (eds.). *Historia de las ideas algebraicas. Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Valencia.

_______ (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 12, n. 3, pp. 314-332.

_______ (2002). "Organiser l'étude. 2. Théories et empiries". In: DORIER, J.-L. et alii (eds.). *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques. Corps 21-30 août 2001*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

BOSCH, M.; ESPINOZA, L. y GASCÓN, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 23, n. 1, pp. 79-136.

9 La obra de Guy Brousseau constituye la piedra angular de esta ambición. En Brousseau (1998) se recogen sus principales trabajos publicados entre 1970 y 1990.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990.* N. Balacheff; M. Cooper; R. Sutherland y V. Warfield (eds.). La pensée sauvage: Grenoble [versión inglesa: *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990*. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer, 1997].

CALLEJO, M. L. (1991). *Las representaciones gráficas en la resolución de problemas de tipo olimpiadas*. Tesis Doctoral. Universidad Paris VII.

CHEVALLARD, Y. (1989). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'Irem Aix-Marseille.

______ (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 17, n. 3, pp. 17-54.

______ (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 19, n. 2, pp. 221-266.

______ (2000). "La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes". In: BAILLEUL, M. (ed). *Actes de la X^e École d'été de didactique des mathématiques (Houlgate, 18-25 août 1999)*. Caen, ARDM et IUFM de Caen.

______ (2002a). "Organiser l'étude 1. Structures et fonctions". In: DORIER, J.-L. et alii (eds.). *Actes de la 11^e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001.* Grenoble, La Pensée Sauvage.

______ (2002b). "Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation". In: DORIER, J.-L. et alii (eds.). *Actes de la 11^e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001.* Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/ Horsori. Barcelona [traducción al portugués: *Estudar matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre, Artmed, 2001].

ECO, U. (2002). "El mago y el científico". *El Pais*, 15 de diciembre de 2002, pp. 13 y 15. [Resumen de la intervención del autor titulada "La recepción de la ciencia por parte de la opininión pública y de los medios de comunicación", en la Conferencia Científica Internacional, celebrada en Roma].

GASCÓN, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

_______ (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 13, n. 3, pp. 295-332.

_______ (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, v. 6, n. 3, pp. 37-51.

_______ (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 18, n. 1, pp. 7-34.

_______ (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, v. 4, n. 2, pp. 129-159.

POLYA G. (1945). *How to Solve It*. Doubleday, Princeton [Trad. española de Julián Zugazagoitia. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1981].

_______ (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton, NJ, Princeton University Press.

_______ (1962-65). *La découverte des mathématiques*. Paris, Dunot.

WEBER, M. (1959). *Politik als Beruf, Wissenschaft als Beruf*. Berlin/Munich, Verlag Duncker [Trad. española de Francisco Rubio Llorente. *El político y el científico*. Madrid, Alianza Editorial, 2002].

Recebido em dez./2001; aprovado em mar./2002