Sociedade Brasileira de Educação Matemática

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

Geometria Analítica e Álgebra Linear: uma análise *a priori* de conhecimentos de um grupo de pós-graduandos

Analytical Geometry and Linear Algebra: an *a priori* analysis of a group of postgraduate students

https://doi.org/10.37001/emr.v26i70.2052

José Carlos Pinto Leivas[1]

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa de cunho qualitativo realizada no primeiro semestre letivo de 2018. O estudo teve por objetivo investigar quais os conhecimentos *a priori* de um grupo de estudantes em um programa de ação continuada ao iniciar uma disciplina de Fundamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica, ofertada em um Programa de Ensino de Ciências e Matemática. A coleta de dados ocorreu por meio de um pequeno questionário, respondido por escrito ao investigador e, posteriormente, de uma rápida entrevista com alguns dos estudantes para dirimir dúvidas na análise preliminar. Foi verificado, na investigação, que parece ainda não estar ocorrendo uma visão mais refinada do espaço, o qual não se limita apenas às três dimensões euclidianas do mundo perceptivo e, assim, ter uma visão mais abrangente da Geometria envolvida nos aspectos algébricos. Com isso, há indícios de que habilidades preconizadas nas Diretrizes Curriculares para a formação de professores ainda não chegaram à formação inicial.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Conhecimento *a priori*. Estilo analítico e vetorial. Geometria.

Abstract

This article presents a qualitative research carried out in the first semester of 2018. The objective was to investigate the *a priori* knowledge of a group of students in a program of continuous action when starting a course of Fundamentals of Linear Algebra and Analytical Geometry, offered in a Program of Teaching Science and Mathematics. Data were collected through a small questionnaire, answered in writing to the investigator, and later a quick interview with some of them to resolve doubts in the preliminary analysis. It has been found in the investigation that a more refined view of space seems to be taking place, which is not limited to the three Euclidean dimensions of the perceptual world, and thus to have a more comprehensive view of the Geometry involved in the algebraic aspects. With this, there are indications that the abilities recommended in the Curriculum Guidelines for teacher training have not yet reached initial training.

Keywords: Analytical Geometry. *A priori* knowledge. Analytical and vectorial style. Geometry.

Introdução

[1] Doutor; Universidade Franciscana/UFN, Santa Maria, RS, Brasil. e-mail: leivasjc@gmail.com

Falar, ensinar e aprender Geometria, hoje, vai muito além do que foi feito nos tempos de Euclides, Arquimedes, Gauss, Descartes e assim por diante. Segundo Davis e Hersh (1995, p. 48),

> [...] tanto Arquimedes como Newton e Gauss sabiam que a soma dos ângulos internos de um triângulo perfaz 180º. Arquimedes reconhecia nisso um fenômeno natural, bem como uma conclusão deduzida a partir dos axiomas de Euclides. Newton compreendia aquela afirmação como uma dedução e como uma aplicação, mas podia também ter refletido sobre a questão de a afirmação poder ser tão verdadeira, tão ligada ao que é justo e certo no universo, que nem Deus todo-poderoso poderia rejeitá-la. Gauss sabia que a afirmação era umas vezes verdadeira e outras falsas dependendo de como se começasse o jogo da dedução, e perguntava-se que outras estranhas contradições a Euclides poderiam assim ser deduzidas.

Apesar disso, ao que tudo indica, a abordagem das geometrias elíptica e hiperbólica, por exemplo, já postas há mais de dois séculos, ainda causa espanto em nossos estudantes e professores, especialmente nos da Educação Básica. A questão do mundo euclidiano, real e perceptível, ainda subsiste, e cada indivíduo tem sua forma própria de perceber o universo, havendo dificuldades na compreensão de qualquer dimensão além desse mundo euclidiano.

No que diz respeito ao ato de medir, ou seja, comparar duas grandezas de mesma espécie, encontra-se em **R**, conjunto dos números reais, as grandezas lineares, as quais apresentam a dimensão 1. Nesse sentido, ao estabelecer um isomorfismo [função bijetora e contínua] de tal conjunto numérico com a reta, como ente geométrico, tem-se os entes perceptíveis: pontos, segmentos de reta e semirretas, todos com a dimensionalidade expressa por um número real, em que os primeiros apresentam dimensão 0 e os demais 1.

Quanto ao conjunto de pares ordenados de números reais $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$, as grandezas têm dimensão 2. Estabelecendo o isomorfismo com o objeto geométrico euclidiano plano, encontram-se, nesse conjunto, além dos precedentes, também os planos e semiplanos, curvas e figuras geométricas, sendo eles com dimensão dois. Há de ser observado que os pares ordenados de números reais do tipo (x,0) e (0,y), com x e y números reais, têm comportamento geométrico análogo aos do primeiro espaço geométrico, os quais constituem uma ‘cópia’ de **R**. Ainda, tais objetos estão no mundo perceptivo.

Passando às ternas ordenadas de números reais, ou seja, ao conjunto numérico $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$, e estabelecendo um isomorfismo com o espaço geométrico tridimensional, além dos entes geométricos relacionados nos anteriores, encontram-se: superfícies, sólidos e curvas espaciais, como, por exemplo, as hélices. De forma similar ao descrito nos itens anteriores, tem-se, neste mundo perceptivo espacial, cópias daqueles elementos (**R)**, como os dados por ternas do tipo (x,0,0), (0,y,0), (0,0,z), com x,y,z sendo números reais. Por sua vez, como em

$\mathbf{R}^2$, tem-se as ternas (x,y,0), (x,0,y), (0,y,z), com x, y, z reais, além de outras relações entre as variáveis.

De imediato, o leitor faz o questionamento: e no caso de $\mathbf{R}^4$, já que é real e compreensível o conjunto de quádruplas (x,y,z,w), com x,y,z,w números reais? Ao que se responde: sai do mundo real ou perceptível, segundo Euclides, pois agora os objetos geométricos não mais possuem apenas comprimento, largura e profundidade, como nas três situações elencadas anteriormente, ou seja, não mais se encontram no espaço real perceptivo. Para De Maio (2008, p. 4), "No macrocosmos são válidas as leis da relatividade, e o nosso Universo é visto como um espaço tempo quadridimensional, onde todas as trajetórias são curvas". O autor acrescenta, ainda, que "No microcosmo são válidas as leis da Mecânica Quântica, e **nenhum** dos dois cosmos é euclidiano".

Portanto, faz sentido avançar no ensino de Geometria para outros espaços, e foi assim que o estilo analítico se instaurou com René Descartes. Ao abordar 'o sonho de Descartes', Courant e Hersh (1998) focam na mente matemática, observando que ela abstrai, generaliza e dicotomiza. Os autores afirmam que "Abstração é extração, redução, simplificação, eliminação" (p. 293). A partir disso, entende-se a importância de abstrair o pensamento matemático a partir do mundo perceptível euclidiano, incluindo coordenadas cartesianas para representar o ponto (x_1, x_2, x_3, x_4), por exemplo, no espaço 4-dimensional $\mathbf{R}^4$. Por sua vez, os autores abordam a generalização como algo similar à abstração, duas habilidades que dizem respeito ao pensamento matemático, e isso reporta ao ponto em um espaço n-dimensional $\mathbf{R}^n$, quando dados pela n-upla de números reais (x_1, x_2, ..., x_n). Nas palavras deles: "A matemática provém da conexão da mente com o mundo externo, e tal conexão simultaneamente cria a matemática e transforma nossas percepções do mundo externo, e estas então criam novas conexões" (COURANT e HERSH, 1998, p. 293).

A partir desses pressupostos, justifica-se a presente pesquisa, que teve por objetivo investigar quais os conhecimentos *a priori* de um grupo de estudantes em um programa de ação continuada ao iniciar uma disciplina de Fundamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica.

2. O estilo analítico para a Geometria – alguns fundamentos teóricos

Na introdução, avançamos das representações geométricas do mundo real e perceptivo para o das abstrações, o que, atualmente, faz sentido com os programas computacionais que elaboram cálculos rapidamente, sem maior envolvimento com os significados geométricos.

A respeito do papel das tecnologias para o ensino de Álgebra, nesse micromundo, Ferrara, Pratt e Robutti (2006) afirmam: "O crescente desenvolvimento e experimentação desse tipo de micromundo apoiou a ponte entre a habilidade de manipulação e o raciocínio abstrato com símbolos algébricos"[2] (p. 238). Esses autores também se reportam à estrutura das leis que envolvem os objetos matemáticos da seguinte forma:

> A importância da estrutura também foi o foco da pesquisa em educação matemática relacionada ao estudo de expressões e equações. Muitos dos erros na manipulação de uma expressão algébrica pareciam ser devidos à falta de atenção dos alunos à estrutura da expressão[3] (Idem, p. 241).

Não é raro de encontrar-se estudantes que, ao observarem uma lei como f(x)=ax+b, imediatamente se reportam à ela como sendo aquela que define uma linha reta. Eles não dão importância ao campo de definição da variável x e, assim, não percebem que a imagem geométrica do conjunto de valores que satisfaz tal relação pode simplesmente ser um conjunto discreto de pontos alinhados (LEIVAS e SOARES, 2010). Dessa forma, até mesmo aspectos experimentais tornam-se naturais e produzem benefícios quando ocorrem diferentes sistemas de representação de uma determinada lei ou expressão. Nesse sentido, o estilo analítico não pode ser isolado do sistema visual geométrico dos entes aos quais tais leis ou expressões estão se referindo.

De acordo com Courant e Robbins (2000), a mudança, ao final do século XIX, com o sucesso da Geometria Projetiva em relação à Sintética pura, conduziu ao sucesso da Geometria Analítica. Para eles,

> [...] A Geometria Analítica desenvolveu-se desde o estágio de um mero instrumento de raciocínio geométrico para se tornar uma disciplina onde a interpretação geométrica intuitiva das operações e resultados não é mais o objetivo último e exclusivo; ao contrário, é agora a função de princípio orientado que auxilia na sugestão e na compreensão dos resultados analíticos. Esta mudança no significado da Geometria é o produto de um crescimento histórico gradual que ampliou significativamente os objetivos da Geometria clássica e, ao mesmo tempo, provocou uma união quase orgânica da Geometria com a Análise. (p. 234).

Percebe-se, a partir do indicado pelos autores, que mudanças de estilo são proeminentes ao longo da História da Matemática e do desenvolvimento dessa disciplina. Em particular, este artigo trata da **transição** da Geometria de Euclides para a de Descartes (seção 2), bem como do envolvimento da Álgebra Linear nesse **processo** de construção do conhecimento (seção

3).

---

[2] The increasing development and experimentation of these kind of microworld supported the bridge of the gap between manipulation skills and abstract reasoning with algebraic symbols.

[3] The importance of *structure* was also the focus of research in mathematics education concerned with the study of *expressions and equations*. Many of the errors in manipulating an algebraic expression seemed to be due to students'inattention to the expression's structure.

3. Álgebra Linear – alguns pressupostos e conexão com Geometria Analítica

As diretrizes curriculares para os cursos de Bacharelado/Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2011) [4] indicam competências e habilidades esperadas na formação dos profissionais da área, dentre as quais se destacam: capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento; participar de programas de formação continuada e realizar estudos de pós-graduação. De acordo com esse mesmo documento, dentre outros conhecimentos a serem desenvolvidos na formação inicial, estão o da Álgebra Linear e o da Geometria Analítica, os quais podem ser desenvolvidos ao longo do curso, conforme o currículo estipulado pelas instituições de ensino.

Especificamente no que diz respeito à Educação Matemática, o referido documento indica que o educador matemático deverá desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade de pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos. Segundo Tall (1991), criatividade é empregada tanto por matemáticos quanto por educadores matemáticos, e do prefácio de seu livro destaca-se a seguinte consideração:

> [...] criatividade está preocupada com a forma como as ideias sutis de investigação são construídas na mente humana e uma prova disso é a forma como essas ideias são ordenadas em um desenvolvimento lógico tanto para verificar sua natureza quanto para apresentá-las à aprovação da comunidade matemática (TALL, 1991, p. xiii).

A partir da análise das diretrizes, justifica-se, em uma ação continuada para professores de Matemática, uma abordagem abrangente de Álgebra Linear, vinculando-a com Geometria Analítica, e não exclusivamente de forma abstrata. De acordo com Loureiro e Gomes (2018),

> Descartes não busca nem justificar a Álgebra por meio da Geometria e nem algebrizar a Geometria; é favorável a uma dialética entre os métodos geométrico e analítico [...]. Por meio da resolução de inúmeros problemas, o filósofo introduziu os principais métodos hoje estudados na Geometria Analítica (p. 11).

Loureiro e Gomes (2018) indicam que Táboas, ao comparar a obra de Grassmann com a de Hamilton, constatam que o primeiro autor, em relação ao segundo, apresenta "uma visão mais refinada de espaço, que não se limita às três dimensões do espaço físico" (p. 14). Afirmam, ainda, que somente no século XIX ocorre a existência inicial de unificar a Álgebra Linear como um campo conceitual o que possibilita uma generalização da linguagem geométrica a diversos campos.

[4] Parecer 1.302/2001 de 6/11/2011 do CNE.

Ao discorrer sobre Álgebra Linear na História, Anton e Busby (2006) dizem que “A ideia de poder utilizar um segmento de reta orientado (uma seta) para representar a magnitude, a direção e o sentido de uma velocidade, de uma força ou de um deslocamento, desenvolveuse gradualmente no decorrer de um longo período de tempo” (p. 25). Justifica-se, pois, mudanças em formas de representações e criação de objetos matemáticos relevantes para o desenvolvimento da ciência, como no caso, para aspectos da Física como disciplina, o que torna importante para o educador matemático conhecer, a fim de desempenhar suas funções, particularmente, nos cursos de serviço.

Os autores, além disso, argumentam a respeito dos estudos de Einsten, no que diz respeito a dimensões maiores do que as euclidianas, perceptíveis ao mundo físico. Exemplificam com a Teoria das Cordas, em que “[...] os componentes menores e indivisíveis do universo não são partículas, mas laços que se comportam como cordas vibrantes” (p. 29). Tais elementos, segundo eles, estão em um mundo de dimensão 11. Poder-se-ia, ainda, abordar os espaços de dimensão quatro na teoria dos quatérnios, ilustrando as inúmeras possibilidades advindas da Álgebra Linear, com a ampliação de conceitos meramente euclidianos.

Dessa forma, faz sentido aprofundar o estudo de Geometria Analítica com tratamento vetorial, de forma a explorar aspectos visuais, por exemplo, por meio das representações geométricas, e não apenas através do tratamento pela Álgebra.

4. A pesquisa

A presente pesquisa foi realizada no primeiro dia de aula de uma disciplina ofertada pelo autor do artigo, no primeiro semestre letivo de 2019, em um curso de ação continuada em um programa de pós-graduação na região central do Rio Grande do Sul, envolvendo mestrandos e doutorandos. O estudo teve como questão de pesquisa: quais são os conhecimentos a *priori* sobre estilos Analítico e Vetorial de um grupo em ação continuada? Para tal, delineou-se o seguinte objetivo geral: investigar os conhecimentos *a priori* de um grupo de estudantes iniciando uma disciplina de Fundamentos de Geometria Analítica e Álgebra Linear em um programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. A fim de cumprir com tal objetivo, buscou-se verificar os conhecimentos prévios dos participantes, em um total de cinco, sendo aplicado um instrumento de coleta de dados, em linguagem escrita, o qual deveria ser respondido e devolvido ao investigador depois de transcorridos dez minutos da entrega. Ao todo, foram oito itens, que abordaram desde o envolvimento com o ensino e a aprendizagem de Geometria Analítica, no plano e no espaço, até o entendimento de possíveis significados geométricos de matrizes, bem como o que distinguiria geometria euclidiana de uma não euclidiana, a saber, o conceito de distância. A fim de preservar a identidade dos participantes, os designamos por letras maiúsculas do alfabeto: A, B, C, D e E.

Quanto ao tipo de pesquisa, compreende-se como sendo qualitativa, no sentido apontado por Bauer e Gaskell (2017), para os quais esse tipo de investigação "evita números, lida com interpretações das realidades sociais, e é considerada pesquisa *soft*" (p. 23, grifo dos autores). Além disso, pesquisas dessa natureza não centram em quantidades, mas em respostas individuais dos investigados, bem como em entrevistas das quais participam. Para os autores, "As atividades sociais devem ser distinguidas antes que qualquer frequência ou percentual possa ser atribuído a qualquer distinção" (p. 25).

Desse modo, não houve preocupação do investigador em analisar quantos indivíduos acertaram ou erraram cada um dos itens solicitados, até mesmo por não haver respostas "certas" ou "erradas". Em outras palavras, na maioria das atividades foram fornecidos pareceres a respeito de conteúdos que já deveriam ser do conhecimento dos participantes, tendo em vista que são todos licenciados em Matemática e o conteúdo faz parte de sua formação inicial.

Bauer e Gaskell (2017) consideram "os métodos e procedimentos de coleta e de apresentação de evidência como essenciais para a pesquisa social científica" (p. 29). Dessa forma, ao coletarmos dados escritos relativos ao conhecimento *a priori* dos participantes sobre um tema específico, foi possível evidenciar quais os procedimentos a serem adotados para o desenrolar da referida disciplina.

Por sua vez, a falta de compreensão sobre algumas respostas escritas conduziu o investigador a realizar entrevista com alguns deles, a fim de obter conclusões convincentes. Tais entrevistas foram realizadas de forma presencial e individual ao final de aulas subsequentes à aplicação da pesquisa. Tais entrevistas foram gravadas e, posteriormente, transcritas e interpretas pelo pesquisador. Para Gaskel (2017), "Além dos objetivos amplos da descrição, do desenvolvimento conceptual e do teste de conceitos, a entrevista qualitativa pode desempenhar um papel vital na combinação com outros métodos" (p. 65). A partir desses pressupostos, na sequência, analisa-se os dados coletados e as entrevistas sobre as questões propostas.

5. Análise dos dados

A análise que agora se apresenta diz respeito aos registros escritos dos cinco envolvidos. O primeiro item da investigação é o que segue.

1. No que diz respeito à Geometria Analítica no Plano, por favor responda:

( ) Estudei somente no Ensino Médio ( ) Estudei somente no Ensino Superior

( ) Estudei sem ambos ( ) Já ensinei no Ensino Médio

( ) Já ensinei no Ensino Superior ( ) Já ensinei em ambos.

Outra alternativa: ____ No que segue, se apresenta uma síntese das respostas fornecidas.

	Estudei somente no Ensino Médio	Estudei somente no Ensino Superior	Estudei em ambos	Já ensinei no Ensino Médio	já ensinei no Ensino superior	Já ensinei em ambos
Participantes respondentes	0	4	1	1	1	0

Percebe-se que todos os indivíduos estudaram Geometria Analítica no plano em algum dos níveis de escolaridade, médio ou superior, sendo que ***A*** estudou tanto no ensino médio (E.M.) quanto no superior. Também, já ensinou no Ensino Médio- E.M. Nenhum deles ensinou nos dois níveis. Um fato curioso foi nenhum ter estudado somente no E.M., o que conduz à interpretação de todos já terem, de alguma forma, estudado mais de uma vez o tema. Não houve resposta à outra alternativa.

2. No que diz respeito à Geometria Analítica no Espaço, são feitos os mesmos questionamentos.

( ) Estudei somente no Ensino Médio ( ) Estudei somente no Ensino Superior

( ) Estudei sem ambos ( ) Já ensinei no Ensino Médio (

) Já ensinei no Ensino Superior ( ) Já ensinei em ambos.

Outra alternativa: ____.

	Estudei somente no Ensino Médio	Estudei somente no Ensino Superior	Estudei em ambos	Já ensinei no Ensino Médio	já ensinei no Ensino superior	Já ensinei em ambos
Participantes respondentes	0	4	1	1	1	

O aluno ***A*** estudou tanto no E.M. quanto no Superior, e ensinou no E.M.

3. Para você, o que é Geometria Analítica e para que ela apareceu na Matemática?

A*: Análise dos entes geométricos, apareceu para fazer conjecturas no espaço e fora dele.* Como a resposta fornecida por ***A*** não foi esclarecedora, o investigador buscou, junto ao participante, esclarecimentos, em uma rápida entrevista, tão logo fez a primeira análise dos registros escritos. Essa entrevista foi gravada em áudio e a seguir feita sua transcrição.

Investigador: ***A***, ao responder o item 3, você disse: *"[...] apareceu para fazer conjecturas no espaço e fora dele".* O que você entende aqui por espaço?

A: *eu coloquei como espaço sendo o* $\boldsymbol{R^3}$*. Seriam as conjecturas que coloquei... daí eu pensei na Geometria Analítica, mais na parte que a gente estuda no início da graduação e no Ensino Médio. Então eu pensei naquela ideia de distância da reta, de paralelismo, de retas reversas, junto com o plano.*

E fora dele? Indagou o investigador, ao que ***A*** respondeu: *Seria no* $\boldsymbol{R^4}$, $\boldsymbol{R^5}$, ..., $\boldsymbol{R^n}$.

O estudante, ainda, foi questionado: quais seriam essas conjecturas de que você falou?

A: *As conjecturas seriam as popularmente ditas como fórmulas. Fórmulas que a gente tem para distâncias, para calcular essas ideias que surgem.*

B: *Uma geometria voltada para distâncias e interpretações algébrica.*

C*: Não tenho conhecimento a respeito.*

D*: Para auxiliar na construção do conhecimento do aluno, dependendo de como é trabalhado em sala de aula.*

E*: A geometria é uma forma de se descrever formas através de fórmulas.*

A resposta de ***E*** não deixou o investigador satisfeito, uma vez que não desenvolveu determinados aspectos que seriam esperados. Assim, foi feita uma entrevista em momento posterior a essa análise inicial. No que segue é transcrita a explicação do aluno.

E*: Na era moderna uma questão que se comentava era a respeito das questões bélicas e há registros na história de que René Descartes conseguiu juntar como seria a trajetória de uma bala de canhão, ou seja, o lançamento de um projétil, com a indagação de quais seriam os coeficientes de uma equação quadrática. É isso.*

4. Você saberia dizer o que distingue o estilo Geometria Analítica do estilo euclidiano?

A*: Geometria Analítica trabalha vetores e o estilo euclidiano trabalha com demonstrações.*

O pesquisador, desejando saber um pouco mais sobre o dizer do estudante, aproveitou que o estava entrevistando e deu continuidade com o seguinte questionamento: e antes dos vetores, como era trabalhada, no seu entender, a Geometria Analítica? Sempre usaram vetores? Ao pensar um momento sobre seu registro escrito, forneceu a explicação a seguir. ***A****: Não tinha pensado por este lado. Eu acho que sem os vetores a gente não teria orientação para uma semirreta; para a reta não precisa. Não sei como seria trabalhado sem os vetores, pois daí a gente teria só dois pontos e trabalhar a distância entre estes pontos e entre a reta e o ponto e a distância entre eles, se não pensar o vetor...* [o estudante fica pensativo e o entrevistador interfere: para usar a distância. Daí é só trabalhar a distância pelas fórmulas como você falou antes].

B*: Não, pois não vi isto na graduação.*

C*: Não sei.*

D*: Não sei.*

E*: O estilo euclidiano concentra-se nas construções com régua e compasso.*

5. E com relação ao outro estilo?

A*: Não trabalha com formas e repetições.*

Como a resposta desse indivíduo foi bem instigadora, o pesquisador buscou saber um pouco mais sobre seu pensamento a respeito e, na entrevista, perguntou: o que você quis dizer com “*não trabalha com formas e com repetições”*?

A*: Eu estava pensando na Geometria Fractal, pois daí tu vais ter um modelo que vai se repetir constantemente e foi nesse viés a minha resposta.* O entrevistador agradece os esclarecimentos prestados pelo estudante.

B*: Não sei*

C*: Não sei.*

D*: Não sei*

E*: Não sei distinguir.*

6.Você já estudou estes objetos matemáticos? ( ) sim   ( ) não   ( ) não sei.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos responderam “sim”, à exceção de *D*.

7. Se você respondeu “sim” ao item anterior, em qual conteúdo matemático e nível de ensino isso aconteceu?

***A**: matrizes – médio e álgebra linear – superior.*

***B**: matrizes, no ensino médio e superior.*

***C**: apenas no ensino superior.*

***D**: no ensino superior, na disciplina de geometria analítica.*

***E**: estudei este conteúdo matemático tanto no ensino médio quanto no superior.*

8. Ainda sobre o item 6, você saberia dizer se existe alguma Geometria envolvida naqueles objetos algébricos? Se sim, qual é ela?

***A**: vetores no R^2 e R^3, autovetores.*

***B**: Nota conceito de translação e rotação de objetos no plano.*

***C**: No momento não me recordo.*

***D**: Sim. Acredito que tem Geometria envolvida e acredito ser para a determinação da equação de uma reta, assim como outras...*

***E**: As matrizes de ordem m x n podem ser associadas a m vetores, onde cada vetor é elemento do R^n.*

O registro desse indivíduo não fica evidente, então o pesquisador, em entrevista, consulta-o para maiores esclarecimentos. ***E***, por favor, me explique aqui, na questão 8, o que você quis dizer com sua escrita.

"Certo. Isto aqui é um procedimento para separar conjuntos LD (linearmente dependentes) de LI (linearmente independentes). Então, no processo de escalonamento tu sempre trabalhas para conseguir uma matriz que tenha a forma de Gauss, isto é, zerando ordenadamente em linhas e colunas de modo que tu consigas obter uma matriz que lembre uma triangular superior. Se ocorrer de uma dessas linhas ficar nula quer dizer que os vetores iniciais eram LD. No caso, existiria uma combinação linear de modo que alguns daqueles vetores iniciais fosse considerado uma combinação linear dos demais" (E).

Você escreve o n como número de linhas ou de colunas, ou o que você quis dizer? (investigador)

E: *Não, o teu n é o número de linhas e o m é o de colunas.*

Por isso foi que você associou ao $\mathbf{R}^n$. Muito bem. (investigador).

Essa entrevista é esclarecedora ao investigador, uma vez que as intuições advindas, certamente, melhoraram a qualidade do delineamento do levantamento e de sua interpretação, o que vai ao encontro do apontado por Gaskel (2017).

Nas considerações, descritas no próximo item, faz-se uma síntese dos ganhos adquiridos com a pesquisa o que veio a proporcionar motivação aos estudantes que participaram da pesquisa para o desenvolvimento da disciplina. Percebeu-se interesse maior do que o que ocorrera em anos anteriores pela busca dos conceitos subsequentes.

6. Considerações

Pela análise dos registros escritos, complementados pelas entrevistas, o investigador pôde perceber alguns fatos importantes a respeito da forma como a Geometria Analítica e a Álgebra Linear são desenvolvidas nos cursos de formação inicial, pelo menos naqueles dos quais participaram os indivíduos em ação continuada agora pesquisados.

Ao que tudo indica, os aspectos históricos/filosóficos que originam essas disciplinas não são abordados, uma vez que pouco ficou para os estudantes a respeito, por exemplo, de certa familiaridade com dimensões além da euclidiana. Isso vai ao encontro do que Loureiro e Gomes (2018) indicaram a respeito dos trabalhos que comparam a visão de Táboas à de Hamilton de que, não é suficiente o indivíduo ter apenas uma visão tridimensional do espaços físico, mas uma visão aprofundada do espaço.

Também, pode ser percebido que ainda falta muita conexão entre a Álgebra Linear e a Geometria, especialmente, pelas respostas às interpretações de matrizes fornecidas. Por exemplo, apenas o indivíduo **B** associou matrizes à translação e à rotação de objetos no plano, ao responder a questão 8, que buscava identificar Geometria nas matrizes apresentadas. Quanto ao estudo de matrizes, a experiência do investigador tem ajudado a constatar que tanto o Ensino Médio quanto as licenciaturas em Matemática costumam priorizar o estudo de operações. Por exemplo, no conteúdo matrizes se desenvolve mais as ‘continhas’, o que não parece ser condizente com o fato indicado antes por Loureiro e Gomes (2018) a respeito da existência da Álgebra Linear como campo unificado de conceitos. Assim, desde o século XIX, pode-se observar que ainda há defasagem na formação inicial do professor de Matemática.

A pesquisa, além disso, leva a constatar que as diretrizes curriculares para os cursos de Bacharelado/Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2011), ao indicarem a participação em programas de formação continuada e estudos de pós-graduação, proporcionaram aos investigados uma reflexão e uma motivação para o desenrolar da disciplina, o que está acontecendo até o momento da escrita deste artigo. Cada um deles teve um tema sorteado para o trabalho final da disciplina, o qual deverá ser uma tarefa de Educação Matemática que traga à tona os principais aspectos desenvolvidos ao longo do semestre letivo no que tange à abordagem de um tema de Geometria Analítica e Álgebra Linear, com uma visão atual e futurística. Espera-se, com isso, romper com os paradigmas muitas vezes estigmatizados pelos livros didáticos, não atualizados com as novas tendências oriundas das pesquisas existentes na área, reiterando o disposto naquelas diretrizes.

Especificamente no que diz respeito à Educação Matemática, o parecer indica que o educador matemático deverá desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade de pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.

Assim, a investigação realizada cumpriu com o objetivo de responder à questão de pesquisa, uma vez que identificou os conhecimentos *a priori* sobre o tema em apreço e permitiu ao professor/pesquisador desenvolver a disciplina com base na formação dos participantes, resgatando principais conceitos, interpretações e conexões possíveis.

Referências

ANTON, H.; BUSBY, R. **Álgebra Linear contemporânea**. Trad. Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman. 2006.

BAUER, M.W.; GASKELL, G. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som**: um manual prático. 13a ed. Petrópolis: Vozes, 2. reimpressão. 2017.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. CNE/Câmara de Educação Superior/ parecer CNE/CES *1.302*/2001 de 06/11 /2011. 2011.

COURANT, R. & ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda, 2000.

COURANT, R. & HERSH, R. **O sonho de Descartes**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves. 1998.

DAVIS, J. P., HERSH, R. **A experiência matem***ática*. Lisboa: Gradiva. 1995.

DE MAIO, W. (coord). **Geometrias: geometrias analítica e vetorial:** euclidianas e nãoeuclidiana*s*. Rio de Janeiro: LTC. 2008.

FERRARA, F.; PRATT, D.; ROBUTTI, O. The role and uses of technology for the teaching of algebra and calculus. In: Gutiérrez, A. e boero, P. (de**). Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and futur***e*. Rotterdam: Sense Publishers. pp. 237-273. 2006.

GASKEll, G. Entrevistas individuais e grupais. In: Bauer, M.W.; GaskelL, G. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prátic***o*. 13 ed. Petrópolis: Vozes, 2. reimpressão, pp. 64-89. 2017)

LEIVAS, J.C.P.; SOARES, M.T.C. A função logarítmica obtida por simetria da função exponencial: explorando visualização. **UNIÓN**, Septiembre de 2010, n. 23, pp. 93-106.

LOUREIRO, G.L.de, GOMEs, H. A Álgebra Linear: de sua constituição como área de conhecimento matemático à sua inserção no currículo da primeira universidade brasileira. **Álgebra linear sob o ponto de vista da educação matemátic***a*. Bárbara Lutaif Bianchini, Silvia Dias Alcântara Machado (org.). São Paulo: Editora Livraria da Física. pp.10-21. 2018.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 1991.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431. 2020.

Recebido em: 10 de junho de 2019.

Aprovado em: 18 de junho de 2021.