Sociedade Brasileira de Educação Matemática

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

Uma Proposta para Introdução do Conceito de Limite de Funções Reais

Une Proposition pour L'introduction de la Notion de Limite pour les Fonctions Réelles

https://doi.org/10.37001/emr.v26i70.2682

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato[1]

Mustapha Rachidi[2]

Resumo

Um dos aspectos de difícil compreensão para os acadêmicos no início do estudo do cálculo diferencial e integral é a definição de limite de uma função. Seja a definição utilizando aspectos intuitivos desse conceito, ou sua definição formal com épsilon e delta. Fato já amplamente evidenciado por diversos estudos sobre dificuldades tanto na compreensão dessas definições, como em relacionar aspectos envolvidos na apresentação da definição intuitiva com o que é trabalhado na definição formal. O objetivo deste artigo é apresentar uma sequência de atividades para a introdução do conceito de limite finito de uma função real, buscando discutir e analisar alguns desses aspectos envolvidos na apresentação dessas definições. São atividades visando a mobilização de imagens, no sentido de conceito imagem (CI) e conceito definição (CD) propostos por Tall e Vinner. Nossos estudos vêm evidenciando que a ampliação desse conjunto (CI) é fundamental para o processo de aprendizagem desse conceito.

Palavras-chave: Definição de Limite Finito de uma Função. Aprendizagem. Dificuldades. Épsilon e Delta. Ensino Superior.

Abstract

One of the things that are difficult for students to understand, when starting to study differential and integral calculus, is the definition of the limit of a real function. The difficulties of students arise whether, it is the definition using the intuitive aspects of this concept or its formal definition with epsilon and delta. This fact has been amply established by several studies, on the difficulties both in understanding these definitions and in their closed relationships. The objective of this article is to present a sequence of activities to introduce the concept of finite limit of a real function, seeking to discuss and analyze some of these aspects. These are activities aimed at mobilizing the concept image, in the sense of the conceptual image and the conceptual definition proposed by Tall and Vinner. Our study has shown the effectiveness and the fundamental importance of this set of activities, in the process of learning the concept of limit.

Keywords: Definition of Finite Limit of a Function. Learning. Difficulties. Epsilon and Delta. University Education.

[1] Doutora em Educação Matemática. Professora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS, Campo Grande, MS – Brasil. sonia.burigato@ufms.br.

[2] Doutor em Ciências Matemática (Docteur d'Etat ès Sciences Mathématiques) pela Universidade Claude Bernard – Lyon 1, France. Professor visitante da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS, Campo Grande, MS – Brasil. mustapha.rachidi@ufms.br.

Introdução

A introdução do conceito de limite de uma função real com valores reais, na maioria das vezes, é feita pela apresentação de uma noção intuitiva desse conceito, que alguns autores denominam de definição intuitiva. Em seguida, é utilizada a definição formal, com épsilon e delta. Essa é uma prática que encontramos em grande parte dos livros didáticos, como também no trabalho de professores em sala de aula (BARUFI, 1999; FERNANDES, 2015; SANTOS, 2013).

Esta escolha para apresentação do conceito de limite é muito diferente de como se deu o processo histórico de construção desse conceito. Seu desenvolvimento foi permeado por muitas discussões e polêmicas, e incomodou diversos matemáticos (BARDI, 2015). De fato, desde o trabalho de Newton, de Leibniz, de Cauchy, assim como o trabalho de Weierstrass, o conceito de limite exigiu esforços significativos por parte de vários matemáticos (RACHIDI *et al*., 2020). Todavia, parece que na transposição didática desse conceito foram retirados todos os "percalços" que aconteceram na sua elaboração até chegarmos a atual proposta. Essa ordem foi escolhida e, apesar das críticas e sugestões em sentido diferente, ainda é defendida por muitos estudiosos, e é a mesma apresentada na maioria dos livros didáticos e nas abordagens em sala de aula (BARUFI, 1999; BURIGATO, 2019; FERNANDES, 2015).

Muitas dessas críticas dizem respeito a ordem de apresentação do conceito de limite de função e ao fato dela não ter nenhuma relação com o que aconteceu no seu desenvolvimento histórico e epistemológico. Como também, por ignorar obstáculos e dificuldades que ocorreram durante esse processo (ARTIGUE, 1995). A definição pelo uso do épsilon e delta com as inequações e com módulo, como conhecemos atualmente, só foi obtida muitos anos depois do surgimento do conceito, em que vários matemáticos se debruçaram buscando dar um aspecto formal ao conceito de limite de função (RACHIDI *et al.*, 2020).

Apesar da escolha pela introdução do conceito de limite, inicialmente, pela noção intuitiva antes da apresentação mais formal, consideramos que a noção intuitiva, segue um caminho diferente ao que é utilizado na definição por épsilon e delta. Na noção intuitiva, é conjecturado o valor do limite estudando aproximações de x ao ponto investigado p, sendo que na formal esse valor é verificado por meio de um épsilon positivo dado, sempre que existir um delta tal que a distância de x ao ponto investigado p seja menor que esse delta.

Alguns pesquisadores alegam que essas diferenças fazem com que exista uma “distância” conceitual entre essas duas apresentações e que cabe ao ensino propor situações para relacionar a noção intuitiva com a formal visando a compreensão do aluno (ARTIGUE, 1995; BURIGATO, 2019; CORNU, 1983; ZUCHI, 2005).

De fato, vários estudos mostram que os alunos não conseguem relacionar a noção intuitiva com a definição por épsilon e delta, e alegam que só utilizam as manipulações algébrica e a noção intuitiva para resolver as atividades sobre limite de função. Todavia, a definição intuitiva não tem uma formulação adequada para que o aluno chegue na definição formal deste conceito, por exemplo, o que significa “tende a” ou “próximo de a”? São expressões que também trazem problemas aos estudantes. Com relação a definição formal, encontramos dificuldades em trabalhar com duas inequações, com inequações e módulo, com conjunto dos números reais, com intervalos de números reais e com sua relação com os módulos, etc. (CORNU, 1983; BURIGATO, 2019; RACHIDI *et al*., 2020; SANTOS, 2013).

Com isso, encontramos professores que se questionam sobre a necessidade de se trabalhar com a definição formal. Afinal ela não é compreendida pelos alunos e seu uso acaba restringindo-se a apresentação das provas de alguns teoremas e propriedades (FERNANDES, 2015).

Essas argumentações mostram que a apresentação da definição formal do modo como vem sendo utilizada, deve ser repensada pelo professor. É preciso ter clareza do que é importante ensinar na disciplina de Cálculo I, refletir sobre os aspectos teóricos que serão importantes para construção de outros conceitos. Esta definição de limite de função é considerada central para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) (BLOCH, 2019). Mas sua apresentação como vem sendo realizada parece não contribuir para a compreensão desse conceito. Em geral, a definição formal com épsilon e delta é usada no ensino somente para provar a unicidade de limite e nas propriedades das operações algébricas, ou para exemplificar seu uso verificando alguns limites.

Neste sentido, Tall e Vinner (1981) argumentam que a apresentação de uma definição, seja intuitiva ou mais formal, não é suficiente para que se compreenda um conceito. Sua aprendizagem está relacionada a uma variedade de situações que o estudante precisará lidar ao longo do ensino. Sendo assim, a aprendizagem de um conceito é um processo que envolve tanto os conceitos adquiridos anteriormente como as situações propostas para estudo desse novo conceito. A cada situação vivenciada, o estudante vai ampliando seu repertório de conhecimento para lidar com aspectos relacionados a esse conceito que está sendo construído.

Para essa discussão, trazemos as noções de conceito imagem (CI) e conceito definição (CD) de Vinner e Tall (1981). Em que o conceito imagem (CI) é o conjunto que:

> [...] descreve a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, bem como propriedades e processos associados. Ele é construído ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL e VINNER, 1981, p.152, tradução nossa).

O conceito definição (CD) é a definição proposta pelo ensino e que é aceita pela comunidade matemática.

Em nossa investigação todas as noções e propriedades utilizadas pelos estudantes (Inclusive a definição intuitiva) ao lidar com atividades sobre limite finito de uma função real compõem o CI desse conceito. Assim, o trabalho com o CI no estudo da aprendizagem do conceito de limite irá permitir que atividades para a construção desse conceito sejam discutidas.

Objetivo do nosso estudo é apresentar e discutir uma sequência de atividades para introdução do conceito de limite finito de uma função real com valores reais. No Brasil este conceito é introduzido, geralmente, no ensino superior em cursos em que as disciplinas de CDI fazem parte. Trazemos para esta discussão alguns elementos envolvidos nas definições usualmente utilizadas para introdução da noção de limite finito de função real. No caso, a definição intuitiva e a definição formal com uso do épsilon e delta. As atividades buscam relacionar aspectos trabalhados nessas duas definições. Como, também, evidenciar possibilidades para ampliação de imagens associadas ao CI dos estudantes com relação ao conceito de limite finito de função real.

Essa sequência de atividades começou a ser elaborada a partir das perspectivas evidenciadas nas considerações finais de uma tese de doutorado (BURIGATO, 2019). Algumas atividades foram sendo modificadas ao serem estudadas com acadêmicos da graduação, resultando na sequência que iremos apresentar. Ela também já foi aplicada em um minicurso[3] ministrado para acadêmicos de graduação em Matemática – Licenciatura.

A seguir, trazemos as definições de limite finito de uma função real[4], que estamos utilizando juntamente com as noções de conceito imagem e conceito definição propostas por

---

[3] Minicurso ministrado na III Semana da Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul no período de 25/09 à 27/09/2019. Não houve publicação.

[4] Para efeitos práticos, neste texto vamos simplesmente nos referir ao conceito de limite finito de uma função real, como limite de uma função.

Tall e Vinner (1981). Para, em seguida, apresentarmos a sequência de atividades que foram elaboradas, com os conceitos utilizados nessas definições, como também esses elementos teóricos. Ao final, tecemos algumas considerações sobre esse trabalho e sobre algumas perspectivas para continuidade do projeto que vem sendo desenvolvido.

A noção de limite finito de uma função real – Conceito imagem e conceito definição

Certamente há uma lacuna entre o processo de conceituação e a abordagem formal das definições de limite de função (CORNU, 1983). Tall e Vinner (1981) desenvolveram as noções de (CI) e de (CD) para compreenderem, por um lado, as imagens mentais, todas as propriedades associadas a um conceito e o processo que o mobiliza (imagem conceitual). Por outro lado, as definições formais de um conceito são definidas pela obtenção de um consenso dentro de uma comunidade científica, no caso é o que esses autores denominam de CD.

Um CD pode gerar uma imagem da definição do conceito em que apenas certos aspectos da definição formal são integrados pelo aluno. Sendo possível, ao longo do ensino, a construção pessoal do lado formal de um conceito, como um processo associado que pode levar à construção de um conceito definição pessoal (CDP). O que chama a atenção é que várias imagens conceituais podem coexistir no mesmo aluno e estar em contradição. Esses autores falam de imagem conceitual evocada. O interesse desta ferramenta teórica reside no diagnóstico de CI. Com isso, é possível determinar imagens implícitas que podem estar em contradição tanto com aspecto formal da definição, como também com aspectos envolvidos na construção do conceito.

Assim, dentro desse referencial teórico, é necessário estudar os processos, representações, propriedades mobilizadas pelos alunos sobre um conceito e compará-los com as definições utilizadas em um livro didático ou em um curso, por exemplo. Isso possibilita analisar lacunas entre as imagens do CI e do CD e, assim, investigar problemas de aprendizagem que isso gera e, consequentemente, fazer novas escolhas para o ensino.

Desse modo, podemos elaborar atividades que possam colocar em discussão imagens que conflitam com algum aspecto envolvido na construção do conceito, identificadas em pesquisas (BURIGATO, 2019). Como também, com questões que busquem ampliar o conjunto de CI e, assim, propiciar ao estudante a construção de um CDP do conceito de limite de função, além de favorecer a construção de outros conceitos envolvidos no CDI.

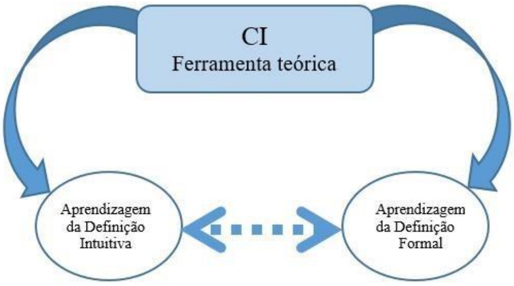
Um ponto importante na ampliação desse conjunto diz respeito às representações utilizadas nas situações propostas. Diversos pesquisadores argumentam sobre a importância de se trabalhar no ensino do CDI com uso de representações textuais, gráficas, numéricas e algébricas (CORNU, 1983; BURIGATO, 2019; FERNANDES, 2015; LECORRE, 2016). Ao lidar com atividades para introdução do conceito de limite de função, como já citado, o estudante vai ampliando o seu conjunto de (CI) associado a ele. Sendo que cada representação utilizada irá mobilizar aspectos diferentes desse conceito.

De fato, em um estudo sobre a construção do conceito de limite de função (BURIGATO, 2019) foi observado que um estudante mobilizava imagens que conflitavam com a definição de limite conforme a representação utilizada. Quando esse aluno precisava identificar o limite por meio da observação de uma representação gráfica de uma função, ele argumentava que o limite só existia quando a função estava definida no ponto, e era o valor da função no ponto. Mas quando lidava com questões na representação algébrica ele utilizada a ideia de se aproximar do ponto. Argumentava corretamente se reportando ao comportamento do conjunto dos números reais, afirmava que era possível tomar pontos tão próximos quanto quiséssemos. São imagens que conflitam, tanto entre si, como também com as definições de limite de uma função, intuitiva ou formal, mas que o estudante não percebia esse problema quando lidava com as atividades.

Em geral, os alunos não reconhecem o status matemático da definição formal de limite e preferem usar conceito imagem (TALL e VINNER, 1981), sendo que a representação gráfica pode se tornar um obstáculo (BLOCH, 2019), como também dificuldade relacionada ao conjunto dos números reais (ARTIGUE, 1995, BURIGATO, 2019).

Desse modo, a escolha das atividades é fundamental para o processo de aprendizagem. Sendo importante observar os aspectos do conceito que será trabalhado em cada uma das atividades propostas. A caracterização das imagens relacionadas ao CI é então feita identificando, nas ações dos estudantes: propriedades, conceitos, representações, etc., que eles utilizam ao lidarem com o que o ensino propõe e comparar com o que é proposto para a definição do conceito. Essa ferramenta teórica nos permite trabalhar com situações para aprendizagem das duas definições de limite de função, intuitiva e formal, como também para relacionar essas duas definições, ilustramos na Figura 1, a seguir.

Figura 1: Ilustração sobre o CI



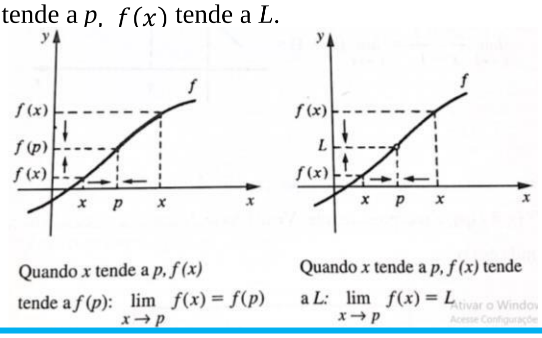
Fonte: Elaborada pelos autores.

Assim, um ponto importante na elaboração das atividades para se introduzir um conceito é a escolha das definições que serão utilizadas com os estudantes. Como dissemos, a introdução do conceito de limite de função, geralmente, é realizada pela apresentação da sua noção intuitiva, com alguns exemplos e, em seguida, a definição com épsilon e delta. A sequência de atividades que propomos busca trabalhar nessa perspectiva utilizando as definições do livro didático do Guidorizzi volume 1[5]. Esse livro é bastante utilizado por professores da disciplina de Cálculo I, e/ou indicado nas suas ementas. Inclusive na Universidade[6] em que trabalhamos. Vejamos a seguir as definições que esse material propõe, no Quadro 1, a definição intuitiva de limite de uma função e, no Quadro 2, a definição formal utilizando os quantificadores épsilon e delta.

Quadro 1 – Definição intuitiva

Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L que, simbolicamente, se escreve $\lim_{x\to p} f(x) = L$

Significa que quando x tende a p, $f(x)$ tende a L.



Fonte: Livro do Guidorizzi (2003, p. 55).

São apresentados exemplos utilizando essa noção para identificação dos limites, seja

[5] Guidorizzi apresenta primeiramente a noção de continuidade, mas em conversa informal com os professores que utilizam esse livro, eles disseram que mantêm a ordem das ementas, ou seja, iniciam pela definição intuitiva, seguida pela definição formal de limite de função e depois introduzem a definição de continuidade de uma função.

[6] Esse livro foi escolhido por ser o mais utilizado pelos professores que ministram essa disciplina em nossa instituição. E esse estudo faz parte de um projeto maior que busca elaborar atividades para introdução do conceito de limite de função, e também para outros tópicos do CDI para uso com professores.

por meio de uma tabela, escolhendo valores próximos do ponto em que o limite está sendo investigado, ou pela observação da representação gráfica da função. Como também, por meio de manipulação algébrica, no caso com uso da fatoração. Em seguida, são propostos alguns exercícios para resolver utilizando a representação gráfica, e/ou a fatoração, para identificar os limites. São casos como: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, entre outros.

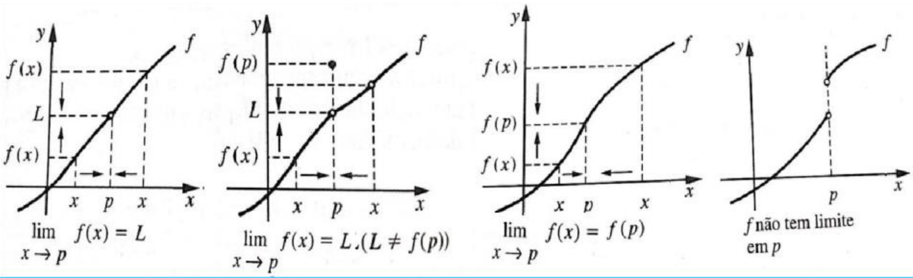
Quadro 2 – Definição formal

Seja f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)-p| < \varepsilon.$$

Tal número L, que quando existe ´único, será indicado por $\lim\limits_{x\to p} f(x)$. Assim

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in D_f \\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)-p| < \varepsilon \end{cases}$$



Fonte: Livro do Guidorizzi (2003, p. 72).

As duas definições não apresentam explicitamente as relações entre o que é definido com os exemplos dados na representação geométrica. Na definição intuitiva as expressões "*x tende a p*", "*f(x) tende a f(p)*" e "*f(x) tende a L*" aparecem relacionadas as representações gráficas das funções, indicado pelas setas: (→ *p* ←), (→ *f(p)* ←), e (→ *L* ←), respectivamente. Essa mesma indicação, com as setas, aparece na definição com épsilon e delta, mas não há indicação com as expressões utilizadas na definição intuitiva com o que é proposto em termos de épsilon e delta. Dificilmente o estudante conseguirá mobilizar imagens relacionando esses aspectos envolvidos na definição formal, por exemplo. Na maioria das vezes, o aluno precisa lidar com expressões algébricas, e, em muitas delas, ele não consegue fazer facilmente sua representação gráfica, o que poderia auxiliá-lo na identificação do limite.

Essas definições são trabalhadas durante a sequência de atividades que apresentamos a seguir, permeada pela abordagem de Tall e Vinner (1981), que nos permite destacar algumas lacunas entre o conhecimento mobilizado pelos alunos e as definições formais, a fim de estudar o impacto dessa lacuna na aprendizagem futura. É uma forma mais "flexível" de estudar o conhecimento para identificar e antecipar as dificuldades dos alunos para os conceitos matemáticos envolvidos. E, assim, elaborar proposta para o ensino.

Uma proposta para introdução do conceito de limite de função

As atividades foram elaboradas buscando trabalhar aspectos problemáticos identificados na introdução do conceito de limite de função (CORNU, 1983; BURIGATO, 2019; LECORRE, 2016). Outro ponto a considerar, é a condução das atividades pelo professor. É importante propiciar momentos de discussão entre os estudantes, e não fornecer respostas prontas durante esses debates, seja na apresentação de respostas diferentes, bem como nas dúvidas que vão surgindo durante as atividades. Em nossas experimentações, o trabalho em dupla foi o que mais favoreceu esses aspectos.

Nas primeiras atividades, vamos trabalhar com imagens associadas ao CI, do conceito de limite de função identificadas nas produções dos alunos em situações para introdução desse conceito, com relação tanto a definição intuitiva quanto a formal. No caso, são as dificuldades em se relacionar aspectos da definição intuitiva com a definição utilizando épsilon e delta. E, também, com o fato de que o ponto de investigação do limite não precisa fazer parte do domínio da função.

Escolhemos iniciar com uma função definida por partes, em que dada a representação algébrica da função o estudante deverá fazer a sua representação gráfica. Essa escolha foi feita, pois vimos em nossas experimentações, tanto na tese como em sala de aula, que as imagens mobilizadas pelos estudantes ao lidarem com esse caso de função, podem ser conflitantes conforme a representação utilizada. Desse modo, decidimos trabalhar com as duas representações na maioria das atividades, sendo que na primeira delas eles teriam a representação algébrica da função para iniciar o seu trabalho.

Vejamos a primeira atividade apresentada no Quadro 3.

Quadro 3 – Atividade (1)

Esboce a representação gráfica da função $f(x) = \begin{cases} x+2, se\ x \neq 1 \\ 1, se\ x = 1 \end{cases}$, em seguida responda as questões:

a) Calcular o valor $f(x)$ para $x=1$.
b) Considere os conjuntos de valores para x em $]0;\ 1[\ \cup\ ]1,\ 2[$ e determine o conjunto correspondente no eixo *y* para os valores de *f(x)*.
c) Observe na representação gráfica a relação que existe entre os intervalos encontrados no item (b).
d) O que está acontecendo com os valores da função quando tomamos valores para *x* arbitrariamente próximos de 1?

Fonte: Elaborado pelos autores.

Uma dificuldade evidenciada quando se trata da falta de relação entre a definição intuitiva e a formal de limite, diz respeito a abordagem comumente realizada no estudo com as funções. Alguns alunos sentem dificuldades em relacionar elementos do conjunto imagem com os números do domínio da função.

Desse modo, buscamos ampliar o CI do estudante para lidar com esses aspectos que irão aparecer no estudo do limite de função propondo uma discussão envolvendo esses dois conjuntos. Além disso, aproveitamos para trabalhar com a ideia de tornarmos *x* arbitrariamente próximos do número 1.

Após a finalização da atividade (1), é apresentada a definição intuitiva de limite de função (Quadro 1), propondo uma discussão sobre aspectos envolvidos nessa definição com o que foi trabalhado na atividade, como:

> Interprete o que você fez na atividade com a definição intuitiva de limite, em notação simbólica $\lim_{x \to 1} f(x)$.
> Relacione o que você encontrou no item (b) com as expressões da definição: "quando *x* tende a *p*" e "*f(x)* tende a *L*".
> O que podemos observar sobre $\lim_{x \to 1} f(x)$ e $f(1)$?

Na próxima atividade, Quadro 4, essa definição é trabalhada com aspectos sobre as funções que os alunos não estão acostumados a vivenciar no ensino médio. Fazendo com que alguns alunos mobilizem imagens que não contribuem para a compreensão do conceito de limite de função. Vejamos algumas associações de imagens identificadas em uma pesquisa nas ações de um estudante ao lidar com atividades para introdução desse conceito:

> Se estou lidando com limite de funções, então sempre preciso trabalhar, com elementos do domínio para obter a resposta em termos de *f(x);*
> Eu trabalho com elementos do domínio das funções;

O resultado de uma atividade com uma expressão algébrica sempre será um número.
(BURIGATO, 2019, p. 145).

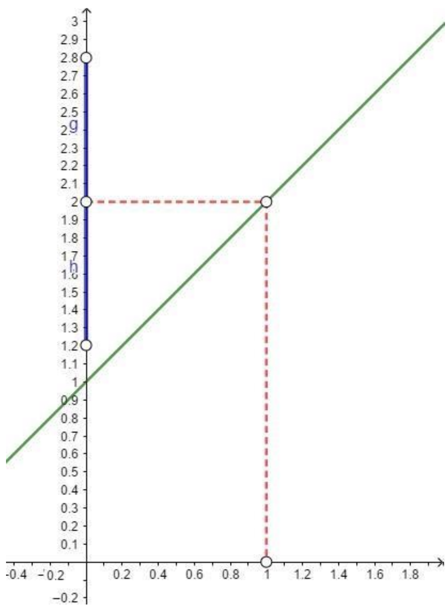
Esse estudante teve dificuldades em trabalhar com as situações em que era preciso relacionar intervalos onde os valores da função estavam variando, com intervalos do domínio. Ele argumentou que nunca havia trabalhado desse modo no ensino médio, e que, na maior parte do tempo, só precisou encontrar valores da função para um dado *x* do domínio.

As próximas atividades buscam trabalhar esses aspectos de modo a favorecer a associação de imagens relacionando conjuntos de intervalos da imagem da função com conjuntos do domínio. Utilizando as representações algébricas, geométricas, textual e oral.

Quadro 4 – Atividade (2)

Observando a representação gráfica da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, podemos verificar que quando x se aproxima de 1, tanto por valores maiores do que 1 como por valores menores, os valores da função *f(x)* se tornam próximos de 2. Pela definição que vimos podemos dizer que quando *x* tende a 1 a $f(x)$ tende a 2 e que $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Observe que a expressão "tende a" é vaga, assim podemos pensar em escolher um "tamanho" para essa aproximação. Por exemplo, se tomarmos valores da função próximos de 2, no caso considerando que $1{,}2 < f(x) < 2{,}8$, teremos a situação representada no eixo *y*, com bolinhas azuis representando os extremos desse conjunto, conforme a representação abaixo.

Repare que quando escolhemos o conjunto $1{,}2 < f(x) < 2{,}8$ de valores da função próximos 2 o "tamanho" escolhido pode ser evidenciado utilizando a representação desse conjunto em módulo (Relembre a ideia de distância). $|f(x) - 2| < 0{,}8$



a) Encontre o "tamanho" escolhido para aproximação do valor 2 da função e escreva em notação de módulo.

b) Encontre o conjunto de valores do domínio da *f* para que os quais os valores da função $f(x)$ fiquem compreendidos no conjunto $1{,}2 < f(x) < 2{,}8$. Explique como você fez para encontrar esse conjunto. Escreva o conjunto encontrado em módulo evidenciando o "tamanho" encontrado no conjunto do D_f. Em seguida, faça a representação geométrica deste conjunto na representação gráfica dada.

c) Vamos denominar o tamanho encontrado no item (a) de ε (Épsilon) e escolher outro "tamanho" para esse intervalo, no caso $\frac{\varepsilon}{2}$. Considerando esse novo "tamanho" para o conjunto de valores da função, encontre o conjunto dos números *x*, do domínio da *f*, relacionados a esses valores da função. Escreva o conjunto encontrando em módulo para evidenciar a nova distância encontrada para o conjunto D_f, e vamos representar por δ (delta) esse número encontrado.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesta segunda atividade, os estudantes já têm a representação gráfica para trabalhar com as questões. E é por meio dela que buscamos favorecer a mobilização de imagens sobre o estudo com as funções, mas principalmente a mobilização, e assim a constituição de imagens que irão compor o conjunto de CI dos estudantes para lidarem com limite finito de uma função, sejam imagens envolvendo a definição intuitiva como também a definição formal. Neste aspecto, buscamos relacionar a observação gráfica de uma função, no caso o intervalo representado geometricamente, com as representações utilizando as inequações e também a inequação com módulo. Inserirmos, também, os números épsilon e delta que serão trabalhados na definição formal juntamente com a ideia de módulo como uma distância. Essa última escolha se deve, em parte, pelos resultados observados na experimentação da tese e da sala de aula. Vimos que muitos estudantes mobilizaram imagens conflitantes com as definições formal. Assim, escolhemos introduzir a noção de módulo como uma distância e relacionar com a representação gráfica já na primeira atividade após a apresentação da definição intuitiva. Buscando, assim, ampliar as imagens associadas a essa definição.

As atividades (2) e (3) também têm o objetivo de relacionar os intervalos de um subconjunto da imagem da função a uma distância particular, já utilizando os números épsilon e delta da definição formal de limite. Representadas, respectivamente, nos quadros 4 e 5.

Quadro 5 – Atividade (3)

Considere a função $f(x) = 2x - 1$. Determine quão próximo de $x_0 = 2$ devemos manter x para termos certeza de que os valores da função fiquem a uma distância menor do que ε =0,5 unidades de $y_0 = 3$? Explique como você fez para encontrar esse conjunto, e represente o número, no caso a distância encontrada, por δ (delta).   Faça a representação gráfica da função e identifique o que acontece próximo de $y_0 = 3$ dado ε =0,5 e o δ encontrado. Qual a relação entre ε e δ? O delta encontrado é único? Justifique sua resposta,

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na atividade 2, as imagens do CI estavam relacionadas, principalmente, à observação da representação gráfica da função, enquanto que nesta atividade 3 elas estão relacionadas ao aspecto algébrico. No caso, o trabalho dos estudantes seria encontrar o valor do delta a partir de um valor particular para o épsilon fazendo manipulação algébrica e utilizando a expressão algébrica da função.

Nesse aspecto, é importante discutir com os estudantes a relação entre o épsilon e o delta e o fato de que ao fazermos a manipulação algébrica, ou pela observação gráfica, o delta encontrado, em geral, é a maior distância em que o épsilon dado "funciona". Os estudantes poderão utilizar as representações algébricas na forma de inequações para justificar que o delta encontrado é a maior distância e, assim, também apresentar outras possibilidades para o delta. Sendo importante fazer a relação dessa representação com a gráfica, pois cada representação traz aspectos importantes para construção de imagens associadas ao CI do conceito de limite de função.

Esta discussão foi importante durante nossas experimentações, na tese e em sala de aula, as imagens dos estudantes foram mais próximas do CD quando eles puderam justificar utilizando outros valores possíveis para o delta. Em função disso, acrescentamos nesta atividade o item em que os estudantes não só verificassem se o delta seria único, mas que também justificassem suas respostas.

Na atividade (4), retomamos a função utilizada na atividade (2) mas na representação algébrica e já com a notação de limite, com módulo e com as inequações. No CD os estudantes precisam mobilizar tanto o conceito de módulo, como uma distância, como também saber reescrevê-lo em formato de inequações. Esse aspecto também traz muitas dificuldades aos estudantes, pois esses conceitos vêm misturados a outros que geralmente são trabalhados de modo separado ao longo da educação básica. Dificilmente, eles tiveram de lidar com duas inequações envolvendo a notação de função *f(x)*, ou essa notação em módulo em uma inequação. Mas no CDI eles precisarão evocar imagens destes CI disponíveis e fazer as adaptações necessárias para lidar com a situação em que um novo conceito está sendo construído, no caso o conceito de limite de função. Vejamos a seguir, no Quadro 6, o enunciado da atividade 4.

Quadro 6 – Atividade (4)

Considere o $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ e suponha que encontramos o valor deste limite investigando os intervalos do eixo dos y próximos de 2, mas agora escolhemos o "tamanho" desta proximidade, no caso com amplitude 0,5 que vamos chamar de épsilon (ε), ou seja, $= 0{,}5$. Assim, estamos olhando os valores da função no eixo y em que $2- < f(x) < 2 +$, ou de outro modo $1{,}5 < f(x) < 2{,}5$.

a) Encontre valores no eixo x que correspondam exatamente aos valores da função dada acima com a amplitude $= 0{,}5$.

b) Escreva a resposta encontrada no item (a) na forma de desigualdade e veja se consegue determinar uma amplitude para o intervalo encontrado e denomine de δ(delta).

c) Pensando agora que estamos interessados em escolher valores para x, tal que todo f(x) correspondente fique entre $2- < f(x) < 2 +$, considerado o ε dado, poderíamos ter outros valores para δ?

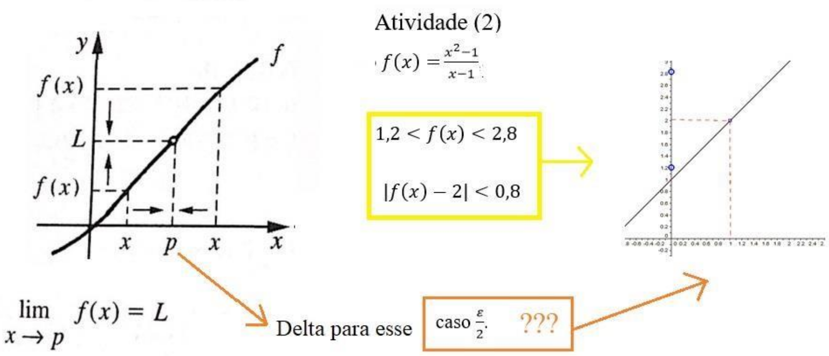
d) Somando -2 em todos os membros das desigualdades $2- < f(x) < 2 +$ obtemos $- < f(x) - 2 <$ e escrevendo na forma de módulo, temos $|f(x) - 2| <$. Escreva na forma de módulo a desigualdade encontrada no item (b).

Fonte: Elaborado pelos autores.

As imagens que buscamos trabalhar nessa atividade estão mais relacionadas à representação algébrica. Além disso, mesmo que o aluno identifique que se trata da função trabalhada anteriormente, o que seria interessante também, e faça a representação gráfica como auxiliar na sua resolução, ele precisará apresentar sua resposta de maneira algébrica. Em todo caso, essas imagens serão importantes para o trabalho com o CD que será apresentado a seguir, como: reescrever as inequações utilizando o épsilon (ε) com a notação de função (*f(x)*) em uma inequação com módulo; escrever as inequações utilizando o delta (δ) e reescrevê-la como uma inequação com módulo.

Após discussão e correção desta atividade, introduzimos a definição formal, Quadro 2. Sendo retomado o que foi realizado anteriormente, buscando relacionar as imagens evocadas pelos alunos nas resoluções das outras atividades com aspectos que aparecem na definição formal. Vejamos na Figura 2 algumas possibilidades:

Figura 2 – Possíveis relações entre as representações da definição formal com a atividade 2



Fonte: Elaborada pelos autores.

Neste momento é importante trabalhar com imagens evocadas pelos estudantes durante a resolução das atividades anteriores. Para isso, é necessário discutir as relações entre a interpretação geométrica das inequações e dos módulos com o que é proposto pela definição formal e também pela definição intuitiva. Analogamente utilizando as representações algébricas com as representações textuais e orais, questionando aspectos que diferenciam e/ou relacionam uma definição da outra. Por exemplo, o que podemos relacionar da expressão: quando “x tende a p” temos que “$f(x)$tende a L” com o que aparece na definição formal? Por que vocês acham que uma é chamada de definição intuitiva e a outra de definição formal?

É um momento oportuno para se evidenciar imagens que possam estar em conflito entre si, no próprio conjunto CI, como também com aspectos envolvidos nas duas definições.

As três próximas atividades são para utilizar a definição formal de limite. Sendo que a primeira delas, atividade 5, o enunciado não traz isso explícito, mas sim a ideia de encontrar o delta dado um épsilon particular.

Quadro 7 – Atividade (5) e (6)

Atividade (5) – Considere o limite $\lim_{x\to 1} x + 1 = 1$, sendo dado $\quad = 0{,}33$, encontre δ>0 tal que, toda vez que $2 - \quad < f(x) < 2 +$ teremos também que $1 - \delta < x < 1 + \delta$.

Atividade (6) – Considere o limite $\lim_{x\to 3} 2x - 5 = 1$. Verifique se o limite encontrado satisfaz a definição formal (com épsilon e delta). E relacione as desigualdades encontradas, ou os módulos, da definição por épsilon e delta com a definição intuitiva de limite e justifique essas relações.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Escolhemos a atividade 5, semelhante às que foram trabalhadas antes da definição formal, para que o estudante evoque primeiramente imagens próximas ao que ele fez anteriormente, para em seguida, inserir uma atividade como é feito nos livros didáticos após introdução da definição formal. Em que, geralmente é solicitado para verificar se o limite conjecturado satisfaz a definição formal. Nosso objetivo é que ele relacione as investigações que havia feito para encontrar o delta, com um épsilon particular, com o fato do épsilon ser arbitrário, no caso a expressão que aparece na definição formal "*dado ε>0*".

Ao final da discussão e correção dessas duas atividades, é importante fazer uma institucionalização do que foi discutido. Evidenciando as imagens evocadas durante a resolução, problemáticas ou não, com o aspectos trabalhado no CD.

Propomos a atividade (7) para discutirmos o uso da definição formal para investigação de um limite que não seria identificado rapidamente pela simples manipulação da função nas inequações, vejamos no Quadro 8.

Quadro 8 – Atividade (7)

Verifique pela definição formal que $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ e em seguida responda os itens.

a) Como verificar se L=1 satisfaz a definição formal?
b) A definição formal é um método viável para verificar o candidato a limite, no caso o valor de L? Justifique sua resposta. E caso ache que não é viável, pense em uma maneira de determinar o limite e explique como seria detalhadamente.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesta atividade 7, buscando elencar aspectos que envolvem outras manipulações algébricas e, assim, outras imagens associadas ao CI. A ideia também é discutir que, com esta definição, alguns limites podem demandar muita manipulação algébrica, o que algumas vezes não é interessante. No entanto, ela traz noções importantes para construção, e compreensão, deste e dos outros limites, como também de outros conceitos trabalhados ao longo do estudo do CDI.

Discussão sobre a experimentação da sequência de atividades

Como dissemos anteriormente, algumas dessas atividades haviam sido experimentadas (BURIGATO, 2019) e foram sendo modificadas conforme experimentação em sala de aula e se constituindo nesta sequência que foi aplicada em um minicurso para acadêmicos de Matemática-Licenciatura em 2019. Não fizemos uma análise das resoluções dos estudantes, mas trazemos para este texto algumas discussões que foram anotadas durante a realização do minicurso. Um aspecto importante a se considerar, foi a realização do trabalho em duplas, em que evitamos interferir o máximo possível, não fornecendo respostas prontas a cada questão, ou dúvidas que surgiam. A proposta foi envolver todos os participantes em cada pergunta que a dupla não conseguia lidar. Desse modo, foi possível identificar nessas discussões as imagens que estavam sendo mobilizadas por várias duplas de acadêmicos. Evidenciando imagens que poderiam trazer problemas para compressão da definição formal, como para definição intuitiva.

Como nas experimentações anteriores, os estudantes tiveram muita dificuldade em trabalhar com duas inequações e com as inequações com módulo. Quando tiveram de relacionar o módulo com a ideia de distância, as imagens evocadas inicialmente sempre estavam relacionadas à distância de algum ponto a origem. A notação *f(x)* foi ainda mais difícil para eles, tanto no trabalho com as duas inequações, como com a inequação com módulo. Alguns estudantes trocavam essa notação pela lei de formação da função, acabavam encontrando as inequações referentes ao intervalo de variação do domínio, que é um caminho para se encontrar a variação do delta. Todavia, eles não compreendiam o que havia encontrado. O que evidenciou a importância de termos modificado a atividade 2 e introduzido a notação de módulo com a inequação para serem trabalhadas, e interpretadas, com as duas inequações pela observação da representação gráfica. Essa foi a atividade em que eles demoraram mais tempo para lidar e chegar a uma finalização em que todos pareciam concordar. O que não significa que as mesmas imagens equivocadas que citamos não voltaram a aparecer. Elas surgiram e novamente voltaram as discussões. Outro aspecto que consideramos importante, foi o fato de que quando uma dupla tinha essas dificuldades ela não se contentava simplesmente com as explicações dos colegas. Esses alunos buscavam fazer as mudanças das notações das duas inequações para a inequação com módulo e compreender o que estava acontecendo de modo algébrico, geométrico e também com a representação gráfica da função. O que consideramos primordial para ampliação das imagens do CI deste conceito.

Considerações Finais

Neste texto buscamos apresentar uma sequência de atividades para introdução do conceito de limite de função. São atividades que têm como objetivo, por um lado, ampliar o conjunto imagem associado ao CI, do estudante ao lidar com as primeiras noções desse conceito. Por outro lado, favorecer a discussão de imagens que possam conflitar com algum aspecto da definição formal proposta pelo ensino. Possibilitando aos estudantes ampliarem o seu CI com imagens mais pertinentes para lidar com as situações envolvidas na construção do conceito de limite de função. Que, como dissemos, é um processo de reinvestimento dessas imagens em novas situações ao longo do estudo deste conceito, como também dos conceitos que serão construídos com ele.

O estudo com CI e CD se mostrou pertinente para elaboração da sequência de atividades e pode ser ampliado para propostas análogas como, por exemplo, para introdução das definições de limite infinito de função real e limite no infinito de função real.

A definição formal pode ser trabalhada em sala de aula na introdução desse conceito, no entanto, como mencionamos antes, vemos que, em geral, ela é usada para estabelecer a propriedade de unicidade do limite e as operações algébricas dos limites. Mas são poucos os exercícios práticos que utilizam a definição formal para determinar a existência ou não de limite, bem como seu valor. Por outro lado, nos livros didáticos do CDI, aparece a definição formal do limite, em duas formas simbólicas (RACHIDI *et al*., 2020). Assim, uma das perspectivas para pesquisa em Educação Matemática, que nos parece importante, é trabalhar em aplicações em que o uso da definição formal seja o único método para determinar o limite. Este é um assunto em que estamos nos debruçando e que será apresentado em um próximo artigo.

Os autores expressam seus sinceros agradecimentos ao INMA e à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS / MEC - Brasil pelo valioso apoio.

Referências

ARTIGUE, M. La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: GÓMEZ, P. (ed.). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1995, p. 97-140.

BARDI, J. S. **A guerra do cálculo**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2015.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, SP, 1999.

BLOCH I. L'enseignement de l'analyse : de la limite à la dérivée et au EDO, questions épistémologiques et didactiques. L'école d'été de didactique des mathématiques, XVIII, 2017, Paris. In **Actes de la 18ème école d'été de didactiques des mathématiques.** Editions La pensée sauvage, v. 1-2, 2019, p. 89-112.

BURIGATO, S.M. M.S. **Um Estudo sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul. Campo Grande, 2019.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles**. Tese (Doctorat de Troiseme Cycle de Mathematiques Pures) – Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, 1983.

FERNANDES, J. A. N. **Ecologia do Saber: O Ensino de Limite em um Curso de Engenharia**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal do Pará, Belém. 2015.

LECORRE, T. **Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite**. These (Doctorat de Mathématiques, sciences et technologies de l'information,Informatique) – Universite de Grenoble. Grenoble, 2016.

RACHIDI, M., FREITAS, J. L. M. e MONGELLI, M. C. J. G. **Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações**. Campo Grande: Editora UFMS, 2020.

SANTOS, M. B. S. **Um Olhar para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos sobre o seu ensino e Aprendizado.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 3, n. 12, p. 151-169. 1981.

ZUCHI, I. **A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente papel e lápis ao ambiente computacional.** Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

Recebido em: 10 de janeiro 2021.

Aprovado em: 29 de junho de 2021.