ISSN 2317-904X

A mobilização da capacidade de generalização por meio da exploração de sequências e regularidades: uma experiência com alunos de 6º ano

The mobilization of the capacity of generalization by exploration sequences and regularities tasks: An experience whith students of 6th grade

Marcia Cristina Nagy [1]

Resumo

Este estudo foi desenvolvido a partir da implementação de uma tarefa[2], com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com a intenção de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico destes alunos. O objetivo do presente artigo é analisar como a exploração de sequências e regularidades pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização matemática e para a sua expressão em linguagem natural. A professora[3] assumiu o papel de orientadora, possibilitando aos alunos um papel ativo na compreensão de suas formas de pensamento e na compreensão das explicações dos demais alunos. Como resultado da implementação da tarefa os alunos puderam discutir coletivamente ideias matemáticas, explorar diferentes estratégias de resolução, generalizar ideias matemáticas partindo de um conjunto de casos particulares e sistematizar uma regra.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento algébrico. Sequências e regularidades. Generalização.

Abstract

This study was developed from the implementation of a task, with students of the 6th grade of Elementary School, with the intention of promoting the development of the algebraic thinking of these students. The aim of the present article is to analyze how the exploration of sequences and regularities tasks can contribute to the mobilization of the capacity of mathematical generalization and to its expression in natural language. The teacher assumed the role of guidance, allowed the students to play an active role in understanding their thinking and the explanations of other students. As a result of the implementation of the task the students were able to collectively discussed mathematical ideas, explored different resolution strategies, generalized mathematical ideas from a set of particular cases and systematized a rule.

Keywords: Mathematics Education. Algebraic Thinking. Sequences and regularities tasks. Generalization.

Introdução

A Álgebra escolar tem sido associada com à manipulação de símbolos e com à reprodução de regras operatórias, muitas vezes aplicadas mecanicamente e sem

---

[1] Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL, mestrado e doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela mesma instituição. Atualmente é professora na Secretaria de Educação do Estado do Paraná.

[2] Neste artigo assumimos o termo tarefa para nos referir às tarefas matemáticas.

[3] Autora desse trabalho.

compreensão. No ensino da Álgebra tem predominado uma abordagem baseada na simplificação de expressões algébricas, na resolução de equações e na aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos (KAPUT, 1999). Em sala de aula, geralmente os alunos resolvem exercícios e problemas envolvendo a transformação de expressões e a aplicação de regras e procedimentos; e, como resultado deste ensino, a maioria deles demonstra ter uma imagem negativa da Álgebra, apresenta fracasso no desenvolvimento de habilidades técnicas, evidencia a falta de compreensão conceitual.

Contudo, nos últimos anos, diversos autores (KAPUT, 1999; KIERAN, 2007) têm buscado fomentar uma visão mais ampla de Álgebra, capaz de promover de modo mais efetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (2008, p. 39), a Álgebra não é apenas a manipulação de símbolos. Os alunos precisam "compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registrar ideias e tirar ilações face a certas situações".

Alguns estudos (BLANTON; KAPUT, 2005; CARRAHER *et al*., 2006; CANAVARRO, 2007) apontam o aumento do interesse de pesquisadores pelo desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais de escolaridade e evidenciam que a fragmentação existente entre a Aritmética e a Álgebra neste nível de escolaridade não potencializa a aprendizagem de conceitos matemáticos complexos podendo gerar obstáculos à futura aprendizagem da Álgebra (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007). O National Council of Teachers of Mathematics (2008) considera a Álgebra como um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade, e entende que os professores podem auxiliar os alunos a constituírem uma base sólida fundamentada na compreensão e nas suas experiências como preparação para um trabalho algébrico mais aprofundado nos anos posteriores.

Neste artigo, apresentamos a exploração de uma tarefa, desenvolvida com alunos de 6º ano do Ensino Fundamental. Este artigo tem como objetivo analisar como a exploração de sequências e regularidades pode contribuir para a mobilização da capacidade de generalização matemática e para a sua expressão em linguagem natural.

Sobre o pensamento algébrico

O pensamento algébrico pode ser entendido como “um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização por meio do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade.” (BLANTON; KAPUT, 2005a, p. 413).

No pensamento algébrico se aceita que a notação algébrica convencional (envolvendo letras) não é o único meio para exprimir ideias algébricas; a linguagem natural e outros elementos, tais como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos também podem ser usados para expressar a generalização (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007). Além disso, na essência do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão.

O foco do pensamento algébrico está na atividade de generalizar. De acordo com Kaput (1999, p. 6), a generalização envolve:

> [...] a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objetos de nível superior para o raciocínio ou comunicação).

Vale *et al* (2006, p. 193) afirmam que vários investigadores e organizações começaram a defender que “[...] a exploração de padrões ajuda os alunos a desenvolver as suas capacidades de raciocínio algébrico”. Afirmam também que os padrões e as regularidades desempenham um papel importante no ensino da Matemática. Com base nessa perspectiva, optamos, neste artigo, por abordar o ensino e a aprendizagem da Álgebra partindo da busca e identificação de padrões.

Aspectos metodológicos

Este estudo foi desenvolvido a partir da implementação de uma tarefa, a um grupo de 30 alunos de 6º ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual da cidade de Cambé - PR, no ano de 2018. A implementação desta tarefa teve como objetivo proporcionar aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico e, assim, aproximálos da Álgebra, por meio da produção de significados, e não pela aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica.

Escolhemos para a implementação da tarefa a perspectiva do ensino exploratório[4], pois, este modo de ensinar tem como foco o trabalho autônomo dos alunos. Para o trabalho com a tarefa, os alunos foram organizados em grupos de até quatro integrantes. Consideramos que ao interagirem em pequenos grupos os alunos têm oportunidades de expressarem suas ideias, compartilhar experiências, desenvolver argumentos, conjecturas, enfim, pensar matematicamente. O trabalho com esta tarefa se estendeu por duas aulas de 50 minutos cada.

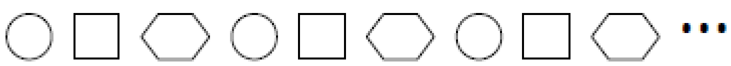
Os instrumentos utilizados para coleta de informações foram produções escritas dos alunos (resolução da tarefa) e da professora (notas da aula) e gravações em áudio da aula. Os nomes utilizados para os alunos são fictícios, de modo a preservar a sua identidade, evitando, assim, quaisquer constrangimentos. Para análise da exploração da tarefa utilizamos os trabalhos dos alunos e excertos de discussões coletivas.

Apresentação dos resultados

Nessa seção apresentamos e discutimos a exploração da tarefa “critérios de divisibilidade”, (Figura 1), desenvolvida em sala de aula. Ela apresenta uma sequência repetitiva, cuja unidade que se repete é constituída por três elementos. Permite explorar o estabelecimento de relações entre cada polígono e sua posição na sequência, especialmente o fato de que o hexágono encontra-se nas posições correspondentes aos múltiplos de três.

Figura 1 – Tarefa “critérios de divisibilidade”

Observe a sequência a seguir:



a) Continue a representação da sequência até ao 15º elemento.

b) Qual o 12º elemento da sequência? Que outras posições essa figura ocupa?

c) Sem desenhar, escreva qual é o 25º elemento da sequência. Explique como você chegou a essa conclusão.

d) Como você explicaria a um colega que o hexágono não pode estar na posição 61?

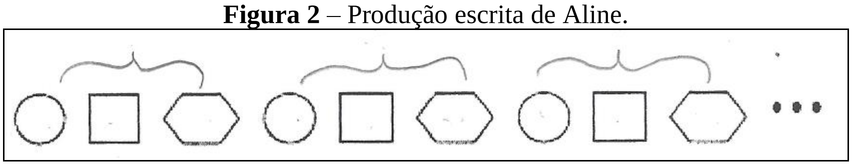
[4] Trata-se de uma perspectiva alternativa de ensino desenvolvida a partir do trabalho com tarefas cognitivamente desafiadoras, mobilizando o trabalho autônomo do aluno (STEIN *et al*., 2009).

Fonte: Adaptada de Ponte, Branco e Matos (2009).

De modo geral, na explicação da estratégia, a maioria dos grupos de alunos conseguiu estabelecer relações entre o hexágono e sua posição na sequência.

No que se refere ao item a da tarefa, todos os grupos demonstraram ter identificado a unidade que se repete ciclicamente. A figura a seguir mostra a representação de um grupo de alunos que indica essa compreensão. Todos os grupos continuaram a representação dos termos imediatamente a seguir aos dados, até o 15º elemento, conforme solicitado.

Figura 2 – Produção escrita de Aline.

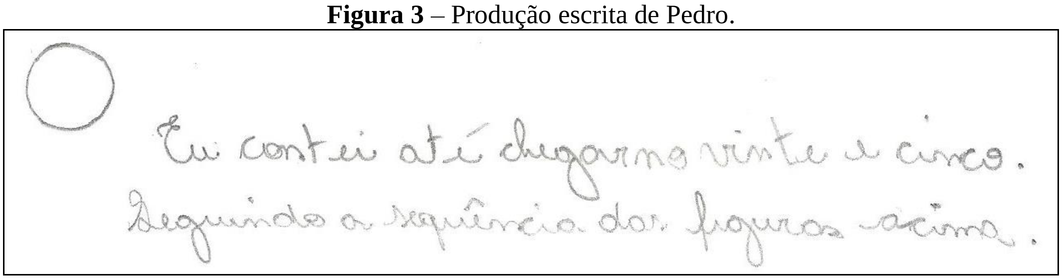


Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto ao item b da tarefa, todos os grupos identificaram uma relação entre os termos da sequência e sua ordem e responderam que o hexágono é o 12º elemento da sequência, e que ele também ocupa outras posições, como a 3ª, 6ª, 9ª, 15ª.

Para responder ao item c da tarefa, foram apresentadas duas estratégias distintas. Em uma delas, alguns grupos utilizaram a sequência dada na tarefa e contaram até o vigésimo quinto elemento, concluindo que tal elemento é o círculo.

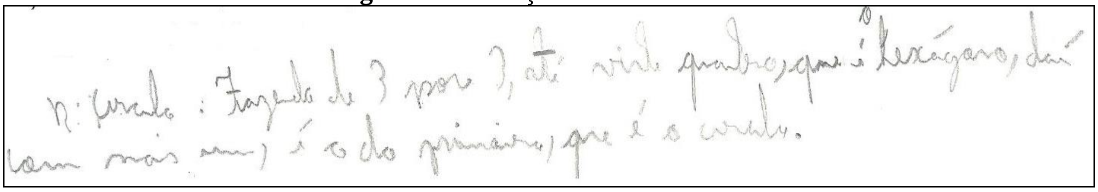
Figura 3 – Produção escrita de Pedro.



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como na estratégia anterior, a resposta seguinte revela que vários alunos identificaram que o 25º elemento é o círculo, contudo não utilizaram a contagem para chegar a essa conclusão, mas ao fato de que o hexágono encontra-se nas posições correspondentes aos múltiplos de três.

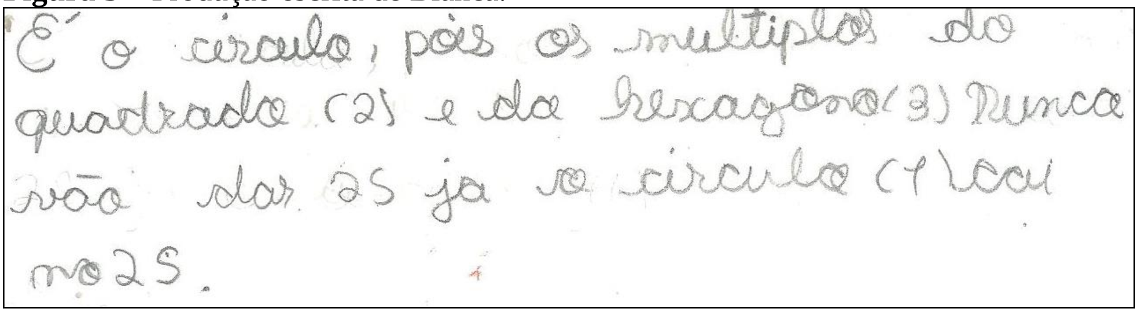
Figura 4 – Produção escrita de Gabriel.



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura seguinte mostra que um dos grupos de alunos que não utilizou a contagem para responder ao item c da tarefa, além de considerar o fato de que o hexágono encontra-se nas posições correspondentes aos múltiplos de três, identificou que o quadrado só poderia ocupar posições de números pares.

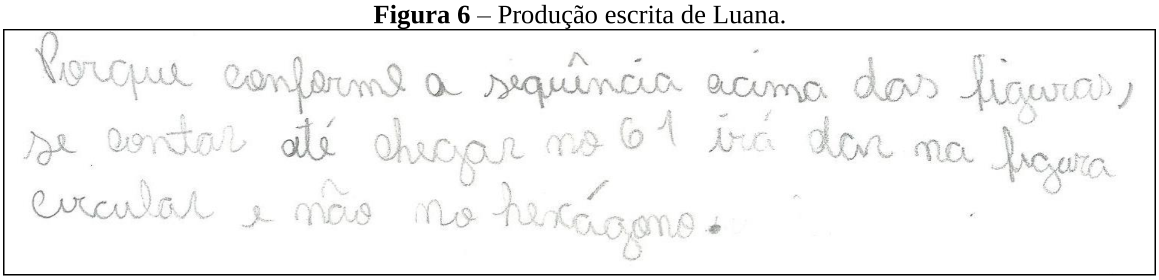
Figura 5 – Produção escrita de Bianca.



Fonte: Dados da pesquisa.

No que se refere ao item d da tarefa, os grupos que se apoiaram na contagem para responder ao item c, também o fizeram para responder este item, como pode ser exemplificado na figura a seguir.

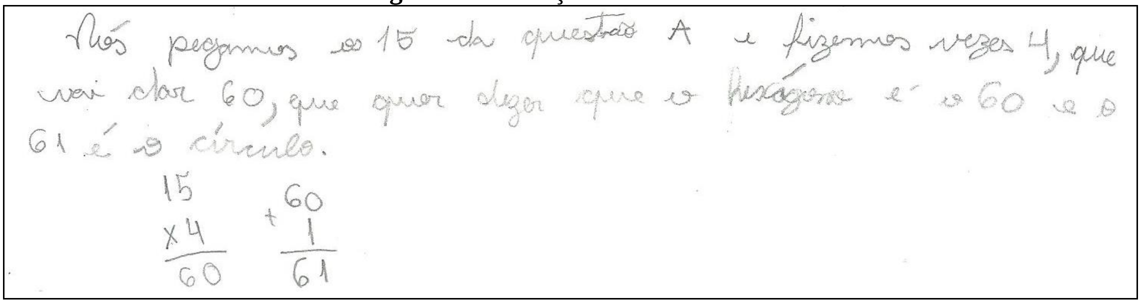
Figura 6 – Produção escrita de Luana.



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura a seguir ilustra como um dos grupos utilizou a sua resposta ao item a da tarefa (Continue a representação da sequência até ao 15º elemento) para resolver o item d da tarefa. Eles multiplicaram por quatro a unidade para justificar que o hexágono não poderia ocupar a 61ª posição na sequência.

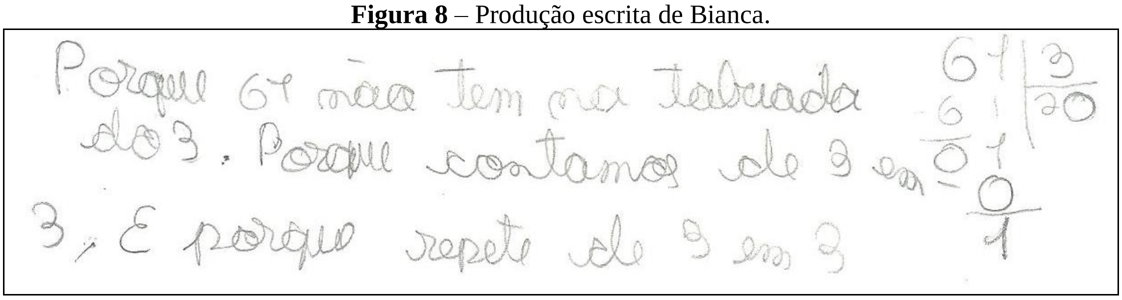
Figura 7 – Produção escrita de Maria.



Fonte: Dados da pesquisa.

O último exemplo, apresentado a seguir, ainda referente ao item d da tarefa, mostra como a maioria dos alunos conseguiu identificar e utilizar a relação entre o hexágono e sua posição na sequência, ou seja, que todo hexágono encontra-se nas posições correspondentes aos múltiplos de três. Eles expressaram essa relação em linguagem natural (generalização).

Figura 8 – Produção escrita de Bianca.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na discussão coletiva da tarefa, vários grupos apresentaram as suas resoluções para os colegas. Nessas apresentações, os grupos que haviam se apoiado na contagem para responder os itens c e d da tarefa concordaram que utilizar a regularidade - de que o hexágono sempre ocupará as posições referentes aos múltiplos de três na sequência - facilitaria a resolução quando se tratasse de indicar um elemento de uma posição mais distante.

Para buscar promover a generalização da regularidade em questão por todos os alunos, a professora conduziu o seguinte diálogo:

Professora: Turma, o hexágono pode estar na posição 73?

Vários alunos: Sim, professora. Temos que fazer a conta para saber.

Professora: Que conta?

Vários alunos: Dividir 73 por 3.

Professora: Então façam!

Luana: Professora, dá 24 e sobra 1. Não é o hexágono. É o círculo!

Professora: Podemos escrever uma regra que descreva o que vocês fizeram para qualquer posição que for pedida?

Bruno: Sim, professora. O hexágono está sempre nas posições que são múltiplos de 3.

Nessa ocasião, foi possível notar que os alunos tinham conseguido generalizar a regularidade (em linguagem natural), apresentando evidências de que poderiam utilizá-la para além dos casos particulares usados como exemplos. Quando verificavam se um número era ou não múltiplo de três, mostravam como entenderam a generalização dessa regularidade.

E, para tratar de justificações com base nos critérios de divisibilidade, a professora conduziu o diálogo a seguir:

Professora: Turma, será que o hexágono ocupa a posição 32 505?

Vários alunos começaram a dividir 32 505 por três.

Professora: Além de dividir por três, de que outra forma podemos saber se um número é múltiplo de 3?

Bruno: Somando: 3+2+5+0+5.

Professora: E adicionando todos os algarismos, qual é o resultado?

Luana: Dá quinze, professora. Quinze está na tabuada do três.

Professora: E o que isso significa?

Bruno: Que nessa posição está o hexágono.

Segundo Vale *et al* (2006, p. 198), “os alunos devem começar a aprendizagem da álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo de padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões.” O National Council of Teachers of Mathematics (2008) defende a Álgebra para todos, começando-se a promover nos alunos o pensar algebricamente desde muito cedo, pois além de permitir que se ultrapassem muitos dos problemas que se poderiam detectar mais tarde, também proporciona as bases necessárias para prosseguir com a aprendizagem da matemática mais avançada.

Algumas considerações

Ao longo do desenvolvimento da tarefa apresentada nesse trabalho foi possível notar que a exploração de padrões auxiliou os alunos a desenvolver a sua capacidade de raciocínio algébrico.

O estudo de padrões na tarefa implementada apoiou a aprendizagem dos alunos na descoberta de relações, no estabelecimento de conexões, nas generalizações e previsões. Eles conseguiram aplicar a regularidade percebida em outros casos, além dos exemplos apresentados na tarefa, o que ficou evidenciado em questionamentos realizados pela professora.

Durante a implementação da tarefa foi possível constatar que vários alunos tiveram mais dificuldade em explicar o padrão do que continuá-lo, tiveram mais facilidade de explicar a regra, detectada na sequência, oralmente do que por escrito.

A resolução da tarefa proposta, que recorreu ao trabalho investigativo, mostrou-se um modo promissor de exploração da Álgebra. Os alunos procuraram padrões, reconheceram um padrão e generalizaram-no.

Experiências como a descrita nesse trabalho podem desenvolver nos alunos uma atitude favorável em relação à Matemática, possibilitando que reconheçam o seu valor e o seu poder, podendo ainda, permitir que consigam melhorar a sua preparação para as aprendizagens posteriores, sobretudo no domínio da Álgebra.

Em resumo, este trabalho indica que uma experiência de ensino pautada na exploração de sequências e regularidades pode contribuir para a expressão da generalização em linguagem natural, permitindo a iniciação de um percurso em direção à simbolização. Para isso, é relevante destacar que as características da tarefa proposta e o modo como a mesma foi explorada pela professora foram determinantes.

Referências

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for research in mathematics education**, Washington, v. 36, n. 5, p. 412-446, nov. 2005.

CANAVARRO, Ana Paula. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa, PT, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007. Disponível em:

https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf. Acesso em: 18 maio 2018.

CARRAHER, David *et al*. Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. **Journal for research in mathematics education**, v. 37, n. 2, p.87-115, mar. 2006. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/pdf/30034843.pdf. Acesso em: 15 maio 2018.

CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analúcia D. Early Algebra and Algebraic Reasoning. *In*: LESTER, K. (org.). **Second of Research on Mathematics Teaching and Learning.** Greenwich: Information Age Publishing, 2007. p.669-705.

KAPUT, James. Teaching and learning a new algebra with understanding. *In*: FENNEMA, Elizabeth; ROMBERG, Thomas A. (org.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahawah, NJ: Erlbaum, 1999. p.133-155.

KIERAN, Carolyn. Developing Algebraic Reasoning: The Role of Sequenced Tasks and Teacher Questions from the Primary to the Early Secondary School Levels. **Quadrante**, Lisboa, PT, v. 16, n. 1, p. 5-26. 2007.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS MATHEMATICS - NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. 2. ed. Lisboa, PT: Associação de Professores de Matemática: Instituto de Inovação Educacional, 2008.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico.** 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/267842645_ALGEBRA_NO_ENSINO_BASICO. Acesso em: 18 jul. 2018.

STEIN, Mary Kay *et al*. **Implementing standards-based mathematics instruction**: a casebook for professional development. 2. ed. New York: Teachers College Press, 2009.

VALE, Isabel *et al.* Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. *In*: VALE, Isabel *et al*. **Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Porto, PT: Sociedade Portuguesa de Ciências e Educação Matemática, 2006. p. 193-211.

Recebido em: 06 de março de 2019.

Aprovado em: 29 de agosto de 2020.