Uma pesquisa em Educação Matemática. Da propagação do calor à noção de convergência*

ROSA MARÍA FARFÁN**

Resumo
Neste artigo, apresentamos o estudo epistemológico de uma pesquisa sobre convergência de séries reportada amplamente em Farfán (1997) e cujo resultado se pode sintetizar como: *determinar o estado estacionário do sistema conduz, necessariamente, a um estudo da convergência de uma série trigonométrica infinita.* Assim, oferecemos uma panorâmica dos diversos estudos que derivam, em especial, do projeto de uma linguagem gráfica e a reprodução de situações didáticas sob uma perspectiva socioepistemológica. Com ele pretendemos ilustrar o trabalho realizado em educação matemática.
Palavras-chave: socioepistemologia; convergência de séries; linguagem gráfica.

Abstract
In this article we present the epistemological study of a research on convergence of series reported in detail in Farfán (1997) and whose result can be summarized as follows: determining the stationary state of a system leads, necessarily, to a study of the convergence of an infinite trigonometric series. *Thus, we offer a panoramic view of the several studies that derive from the project of graphic language and reproduction of didactic situations under a socio-epistemological perspective. With it we intend to illustrate the work carried out in mathematics education.*
Key-words: *socio-epistemology; convergence of series; graphic language.*

Introdução

A propagação do calor foi uma questão sobre a qual tanto a mecânica racional como a análise matemática do século XVIII não deram

* Este artigo é parte dos resultados de pesquisa do projeto financiado pelo Conselho Nacional de Ciência e Tecnología: *Construcción Social del Conhecimento Matemático Avanzado. Estudios sobre la reproducibilidad e la obsolescencia de situações didáticas: De la pesquisa al aula.* Chave U41740-S.

** Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México. E-mail: rfarfan@mail.cinvestav.mx

resposta, e dela surge a histórica controvérsia suscitada a propósito da corda vibrante. Ao lado desse desenvolvimento, encontramos o surgimento da engenharia matemática em contraste com a prática tradicional e o papel substancial que a École Polytechnique, uma instituição de educação superior, teve para sua posterior consolidação. Assim, a origem do problema matemático que nos ocupa, o estudo da convergência de séries infinitas, é o ambiente fenomenológico no qual sucedeu, a condução do calor, em estreita relação com a engenharia, graças à conjunção de inúmeras variáveis, dentre as quais destacamos como antecedentes o cálculo algébrico e o surgimento da engenharia no século XVIII.

O surgimento do conceito de convergência, que data do século XIX, dá-se em um ambiente fenomenológico de singular relevância para a engenharia matemática: a propagação do calor onde a variação está presente e a equação na qual tal variação tem significado é:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

No início do desenvolvimento da humanidade, quando as diversas experiências ocorreram pela primeira vez, buscou-se a intuição predominante no fenômeno, seja calórico, que é o nosso caso, seja do ímpetus ou do éter, entre outros. Desse modo, é com o calórico que se realiza melhor a condução ou com o ímpetus que se dá o movimento. Foi necessária uma revolução do conhecimento científico para agrupar em uma unidade fundamental o conhecimento e a maneira de percebê-lo.

Com a obra de Biot (1774-1802), a experiência se dirige à medida e ao cálculo, rejeitando a explicação do fenômeno mediante o calórico, valendo-se das indicações fornecidas por termômetros, obtendo-se assim a primeira equação diferencial que rege o fenômeno. Ainda assim, os coeficientes constantes não foram analisados, não se distinguiu entre o que é próprio do corpo específico daquilo que persiste independentemente. Em especial, os parâmetros de condutibilidade, de densidade, de calor específico permanecem em um só coeficiente empírico. A tarefa construtiva culmina com a Théorie Analytique da Chaleur (1822), de

Joseph Fourier (1768-1830), na qual se analisa o problema da propagação do calor nos sólidos, que consiste em descrever o comportamento do fenômeno de propagação buscando aquele estável e permanente, que se conserva inalterável com o fluir do tempo. Isto é, a equação que governa o comportamento do sistema.

Como Fourier chega, finalmente, à equação diferencial de Biot, que recebeu a sanção da experiência, pode-se dizer que o método de Fourier alcançou a construção matemática completa do fenômeno. De imediato se rompem ou, melhor ainda, negam-se os conceitos fundamentais da análise matemática do século XVIII, como o de função, o papel da álgebra, o contínuo real, assim como a interpretação física das soluções, e se inicia o estudo da convergência de séries infinitas, pilar fundamental da análise matemática moderna. É possível destacar a importância singular da obra de Fourier, tanto para a engenharia como para a análise matemática. Como resultado da revisão da obra de Fourier, formulamos nossa hipótese central de pesquisa, a qual defende que, *para a construção da noção de convergência de séries infinitas, necessita-se ambiente fenomenológico estreitamente relacionado com a estabilidade de sistemas fluidos*. De sorte tal que determinar o estado estacionário do sistema conduz, necessariamente, a um estudo da convergência de uma série trigonométrica infinita.

Uma vez determinada a fenomenologia intrínseca do conceito de convergência em sua gênese, desenhamos um modelo experimental a fim de estudar os processos desenvolvidos por professores de matemática (nível superior) ante problemas, por um lado físicos, similares aos abordados por Fourier e, por outro, assentados em um contexto matemático. Em ambos os casos, recorremos a um questionário. No primeiro, retomamos um experimento de Fourier a fim de analisar as idéias intuitivas dos professores sobre a condução do calor, assim como aspectos referidos à representação matemática do fenômeno. No segundo exploramos dois aspectos: um sobre a definição de convergência e o outro acerca do limite de uma série de funções, dada por Abel em 1826. Elaboramos um processo de pesquisa e ensino controlado, que nos permitiu um seguimento da população, constituindo-se assim como parte do modelo experimental. Os resultados da pesquisa se detalham em Farfán (1997): neste espaço abordaremos uma síntese do estudo epistemológico.

A engenharia didática como metodologia *ad hoc*

O termo engenharia didática surge no seio da escola francesa por analogia ao "que fazer" em engenharia, embora este não se realize apenas apoiando-se em resultados científicos, mas envolva também tomada de decisões e controle sobre os diversos componentes inerentes ao processo. Assim, a engenharia didática se constitui como metodologia de pesquisa que se aplica aos produtos de ensino baseados ou derivados dela, mas também como uma metodologia de pesquisa para guiar os experimentos em sala de aula. Seu sustento teórico provém da teoria da transposição didática e da teoria das situações didáticas,[1] pois de ambas se desprende a necessidade de dotar o estudo do fenômeno didático de um acirramento sistêmico. Com a primeira se alcança uma dimensão global, porém, a segunda é de caráter local. Nesse sentido, a elaboração de metodologias de ensino de matemática para estudantes não é um processo de

---

1 A teoria de situações didáticas, introduzida na didática por G. Brousseau (1983), baseia-se em uma hipótese sobre a construção do significado de uma noção: "(...) uma noção aprendida não é utilizável se não na medida em que ela é relacionada com outras, essas relações constituem seu significado, sua etiqueta, seu método de ativação. No entanto, não é aprendida se não é utilizável e utilizada efetivamente, ou seja, só se é a solução de um problema. Tais problemas, junto com as restrições sobre as quais a noção responde, constituem o significado da noção (pp. 169-171)". De onde se infere que o significado de uma noção não pode ser dado ao aluno; ele deve construí-lo a partir de um conjunto de problemas no qual tal noção funciona de maneira mais ou menos local. Em conseqüência, o professor, em vez de proporcionar ao estudante o conhecimento, deve propor uma *situação* planejada de forma tal que esse conhecimento seja necessário para a solução otimizada. O aluno aprenderá adaptando-se a um *meio,* fator de dificuldades e desequilíbrios. Se se adapta à situação e chega à *solução*, estará proporcionando evidência de haver se apropriado do saber em questão, isto é, aprendeu. Para o planejamento dessas *situações fundamentais* (que contemplam todos os aspectos fundamentais de um conceito), Brousseau (1986) define três tipos de situações *a-didáticas* (pp.75-85) que induzem os alunos a transitar por diversas etapas próprias da atividade matemática: a ação, a formulação e a validação. Em síntese, a teoria de situações dispõe de uma explicação na qual a construção do significado de um conceito passa por sua mobilização dentro de um espaço limitado de problemas e, se colocada em cena, ela é necessária para a solução única ou otimizada. Ao mesmo tempo, dota de elementos para o controle de situações de ensino. Os sistemas didáticos considerados distinguem três componentes mutualmente interrelacionados: o mestre, o estudante e o saber matemático em questão.

elementarização do conhecimento em qualquer contexto, nem de adaptá-lo a um conhecimento prévio e às habilidades cognitivas do estudante. Ele é percebido como uma tarefa didática que requer uma maior análise global de caráter sistêmico (Artigue, 1992).

Um aspecto relevante é concernente à validação de resultados, que, no caso da pesquisa, apóia-se em um assunto interno fundamentado na confrontação entre a análise *a priori* da situação construída e a análise *a posteriori* da mesma situação, sob o princípio de que a conduta do estudante só pode ser entendida se é relativa à situação observada. Essa situação e seu potencial cognitivo devem ser caracterizados de antemão, comparando a análise *a priori* com o observado. Essa posição de validação só pode ter lugar se as situações que envolvem a engenharia são estritamente controladas no que se refere aos conteúdos tratados, sua execução, o papel do professor, a administração do tempo, etc., já que a validação de uma engenharia de produção satisfaz as condições clássicas do trabalho de engenharia, isto é, efetividade, potência, adaptabilidade a diferentes contextos, etc.

Uma descrição, grosso modo, dessa metodologia é a seguinte – em essência se contemplam três grandes fases:

- Análise preliminar da situação a abordar, envolvendo três componentes: a didática acerca do estado de ensino; a componente epistemológica quanto à explicação do conteúdo matemático em jogo, assim como seu funcionamento e diversas formulações; e a componente cognitiva da população que vai ser submetida à engenharia.
- Uma segunda fase constitui o planejamento da engenharia, assim como a eleição das variáveis macro e microdidáticas que vão estar em jogo (por exemplo, determinação do tratamento do conteúdo, incorporação de estratégias de resolução de problemas, uso de tecnologia, maneira de conduzir a classe, textos a usar, etc.).
- Finalmente, a execução e a análise de resultados.

Cabe ressaltar que um aspecto crucial para o planejamento de uma engenharia é a precisão da análise preliminar dos seus componentes epistemológicos, cognitivos e didáticos. Isto é, do diagnóstico sobre o funcionamento do sistema de ensino, dos efeitos que produzem nas concepções dos estudantes e um aspecto substancial: a natureza intrínseca do saber matemático que se apresenta na situação escolar.

A dimensão epistemológica

De início diremos que a análise epistemológica permite ao investigador tomar distância e controlar as representações epistemológicas da matemática induzida pelo ensino, de forma que:

- Provê de historicidade os conceitos matemáticos que o ensino usual apresenta como objetos universais, tanto em tempo, como em espaço. Esses se concebem, com sua mediação, como suscetíveis de evolução perdendo essa categoria de verdades em si.
- Provê de historicidade as noções metamatemáticas e protomatemáticas, tais como o rigor, contribuindo para mostrar que a concepção de um rigor eterno e perfeito das matemáticas é só uma ficção.
- Possibilita a observação das disparidades entre o saber científico e o ensino, contribuindo para desmascarar outra das ficções da escola, isto é, a concepção de que os objetos de ensino são cópias simplificadas, mas fiéis aos objetos da ciência. A análise epistemológica nos permite compreender o que governa a evolução do saber científico e tomar consciência da distância que separa esses sistemas. Nesse sentido, a noção de transposição didática toma em conta essas diferenças.

Assim, a análise epistemológica permite à didática desprender-se da ilusão de transparência dos objetos que manipula no nível do saber e, em conseqüência, auxilia-a no manejo das representações errôneas induzidas pelo ensino.

A epistemologia também tem um papel de protagonista no nível teórico e metodológico da disciplina, a partir da consideração da noção de obstáculo epistemológico, retomada de Gaston Bachelard em sua explicação sobre a construção do conhecimento científico. Em *A formação do espírito científico*, publicado em 1938, ele diz[2]:

> (...) Quando buscamos as condições psicológicas do progresso da ciência, chegamos à convicção de que é em termos de obstáculos que se deve colocar o problema do conhecimento científico... é no mesmo ato de conhecer, intimamente, que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, os retrocessos e os problemas...

2 Tradução livre e intercalada do original (pág. 13).

> O conhecimento nunca é imediato e pleno. As revelações da natureza são sempre recorrentes. A realidade nunca é "o que poderíamos crer" mas é sempre aquilo que deveríamos pensar... encontramos a verdade em um verdadeiro arrependimento intelectual. Com efeito, vamos contra um conhecimento anterior, destruindo os conhecimentos malfeitos, sobrepassando aquele que, no mesmo espírito, constitui um obstáculo à inteligência...[3]

A introdução da noção de obstáculo epistemológico em didática se deu em 1976, como um meio para mudar o *status* do erro. Assim foi possível mostrar que

> (...) O erro não é só o efeito da ignorância, da incerteza ou do azar, como o concebem as teorias conductistas; mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, que inclusive tendo logrado êxito se apresenta como falso ou inadaptado. (Brousseau, 1976)[4]

Então, origina-se um novo paradigma, do qual surge a didática como disciplina científica, abandonando o empirismo.

Essa noção de "construir apoiando-se em... e ir contra ao que se apoiou" é o que permitiu, na minha opinião, o surgimento da didática como disciplina independente daquelas nas quais se apoiou no início (epistemologia, psicologia, sociologia, lingüística, etc.), construindo suas próprias referências de explicação, como a teoria de situações; a de transposição didática; os conceitos de dialética ferramenta/objeto; o jogo de contextos e situação adidática.

Também no terreno metodológico encontramos essa noção de que as relações entre observador e observado não se estabelecem natural e

---

3 Assim mesmo identifica, a partir de exemplos históricos, algumas grandes categorias de obstáculos, como: a primeira experiência, o conhecimento geral, o obstáculo verbal, a utilização abusiva de imagens familiares, o conhecimento unitário e pragmático, o obstáculo substancialista, o obstáculo realista, o obstáculo animista e todo aquele que concerne o conhecimento quantitativo.

4 Distinguindo três tipos fundamentais de origem de obstáculos no ensino: isto é, um de origem *ontológica,* ligado às capacidades cognitivas dos estudantes e vinculado a um processo de ensino; de origem *didática,* como conseqüência do sistema de ensino, e um de origem propriamente *epistemológica,* ligado à resistência de um saber mal adaptado, no sentido de Bachelard.

ingenuamente fora da problemática que lhes é consubstancial; a observação se constrói *contra* o sistema observado.

Na tarefa de planejar uma engenharia didática, é de fundamental importância a noção de obstáculo epistemológico, pois é necessário decidir quais se podem (ou devem) evitar, quais não se devem evitar. E, em conseqüência, como serão superados. Ao que se adiciona o assunto do significado a escolher, já que os problemas que motivaram a introdução (o surgimento) de tal conceito, assim como os que têm governado sua evolução, são constituídos da significação de tal conceito, e o educador matemático, em sua análise, confronta-se necessariamente com o problema da significação do conceito que resolverá com a análise epistemológica.

De lado da análise conceitual, a epistemologia intervém em um nível mais geral que o do ensino. Já que assumimos que o fenômeno educativo não é simplesmente a transmissão de conhecimentos matemáticos, este concerne globalmente a uma cultura. Isso se traduz em fazer com que os alunos entrem no jogo matemático. Mas o que é o jogo matemático? Quais são os processos gerais do pensamento que o governam? É a análise epistemológica[5] que responderá a essas questões. Ela irá sugerir ao investigador vários problemas globais e fundamentais para guiar a produção de engenharias didáticas referentes à análise do ensino atual.

Desde essa perspectiva, a pesquisa epistemológica em nossa disciplina não se limita a integrar assuntos referentes à natureza epistemológica à atividade. Consiste também em construir os distintos contextos teóricos que permitam envolver tais dilemas, assim como sua incorporação efetiva no ensino. Em Farfán (1997), apresentamos nossa contribuição a respeito do que, em termos da engenharia didática, constitui a análise preliminar.

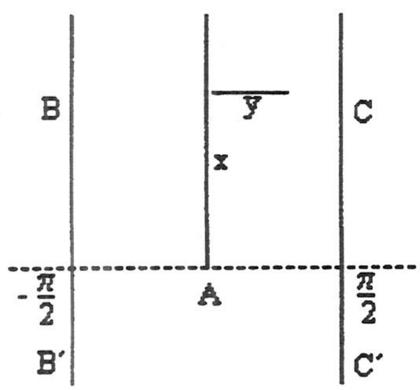
Determinação do estado estacionário

Como já assinalamos, o objetivo do estudo é o esclarecimento da teoria matemática do calor, que se forma: *"(...) 1°. de la définition exacte de tous les éléments du calcul; 2°. des équations différentielles; 3°. des intégrais propres aux questions fondamentais..."* (Fourier, 1822, p. 585).

5 Não necessariamente histórica, em caso de a aproximação histórica tornar possível a eleição de algum aspecto autêntico e especial para uma cultura dada.

Nos capítulos I e II, Fourier desenvolve os primeiros pontos de seu programa. O resto da obra (capítulos III a IX) é dedicado à integração das equações diferenciais parciais em casos particulares. O capítulo terceiro é significativo para nosso estudo, pois nele desenvolve a matemática do fenômeno; aqui resolve o problema da determinação do *estado estacionário*, o que conduz ao estudo da *convergência de séries trigonométricas infinitas*. O problema particular com que Fourier inicia esse estudo é o seguinte:

> Supondo que uma massa sólida homogênea está contida entre dois planos verticais B e C paralelos e infinitos, e que se dividiu em duas partes por um plano A perpendicular aos outros dois (ver figura); consideraremos as temperaturas da massa BAC compreendida entre os três planos infinitos A, B, C. Supõe-se que a outra parte B'AC' do sólido infinito é uma fonte constante de calor, isto é, todos esses pontos permanecem com temperatura 1, a qual nunca pode chegar a ser menor ou maior. Quanto aos sólidos laterais, um compreendido entre o plano C e o plano A prolongado e o outro entre o plano B e o A prolongado, todos os pontos de ambos têm uma temperatura constante 0, e uma causa exterior os conserva sempre à mesma temperatura; enfim, as moléculas do sólido compreendido entre A, B e C têm a temperatura inicial 0. O calor passará sucessivamente da fonte A ao sólido BAC; ele se propagará no sentido da longitude infinita e, ao mesmo tempo, se desviará às massas frias B e C, que absorverão uma grande quantidade. As temperaturas do sólido BAC se elevarão mais e mais; mas elas não poderão passar nem alcançar um máximo de temperatura, que é diferente para os distintos pontos da massa. Tentamos conhecer o estado final e constante ao qual se aproxima o estado variável.



temperatura constante = 1

Assim, o problema consiste em determinar as temperaturas permanentes de um sólido retangular infinito compreendido entre duas massas de gelo B e C e uma massa de água fervendo A; a consideração dos problemas simples e primordiais é um dos meios mais seguros para o descobrimento de leis de fenômenos naturais, e nós vemos, pela historia das ciências, que todas as teorias se formaram seguindo este método.

Para o caso particular proposto, a equação geral se reduz a

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

pois se omite tanto a coordenada z como sua correspondente derivada parcial (a largura é considerada infinitesimal). E, dado que se tenta determinar o estado estacionário (constante em relação ao tempo), é definido que $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Assim, a equação a ser resolvida é:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(a)}$$

Se uma função $\varphi\ (x,y)$ satisfaz a equação, deverá cumprir as seguintes condições:

i) Anular-se quando se substitui $-\frac{\pi}{2}$ *ou* $+\frac{\pi}{2}$ *em lugar de y, qualquer que seja, por outro lado, o valor de x.*

ii) Ser igual à unidade se supõe-se que x=0 e se atribui a y um valor qualquer compreendido entre $-\frac{\pi}{2}$ *e* $+\frac{\pi}{2}$.[6]

É necessário acrescentar que esta função φ (x,y) deve chegar a ser extremamente pequena quando se atribui a x um valor muito grande, já que todo o calor surge de uma só fonte A.

---

6 Isso acontece porque a longitude do lado finito *BAC* é π. Note que, no trabalho de Fourier, a abscissa é denominada y e a ordenada, x (ver figura).

A essas condições, que hoje chamamos de *fronteira.*

Fourier encontra a solução φ *(x,y)* pelo método de separação de variáveis, considerando que a temperatura v pode expressar-se como o produto de uma função de x por uma função de y,

$$v = F(x)\,f(y)$$

Substituindo na equação (a) se terá:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} = 0$$

e supondo que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = m^2 \text{, se deduz que } \frac{f''(y)}{f(y)} = -m^2$$

onde m é uma constante qualquer e uma solução é

$$F(x) = e^{-mx}\ , f(y) = \cos my$$

O valor para a constante m não pode ser negativo, pois teríamos que o valor e^{-mx} *é* infinito quando x é infinitamente grande, mas isso não concorda com a situação física, já que à medida que se distancia da fonte de calor, a função diminui.

Para determinar o expoente m, recordaremos que a função se anula

em $y = -\frac{\pi}{2}$ ou $y = +\frac{\pi}{2}$ assim que

$$v\left(x_1, -\frac{\pi}{2}\right) = e^{m\pi/2} \cos\left(-m\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

e como $e^{m\varphi/2} \neq 0$, para qualquer m, deve-se ter que $\cos\left(-\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ y, portanto, $m = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}$.

As soluções correspondentes a cada valor serão:

$$e^{-x}\cos y,\ e^{-3x}\cos 3y,\ e^{-5x}\cos 5y,\ \ldots$$

e qualquer combinação linear destas também é solução,

$$v = a\,e^{-x}\cos y + b\,e^{-3x}\cos 3y + c\,e^{-5x}\cos 5y + \ldots \qquad \text{(b)}$$

Finalmente, $\varphi\,(0,y) = 1$,[7] e neste ponto Fourier faz notar que: "...não se pode inferir nada para os valores que tomaria a função $\varphi\,(0,y)$ se põe-se no lugar uma quantidade que não esteja compreendida entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$..."[8]

Assim, (b) se converte em

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \ldots$$

para $-\frac{\pi}{2}\varphi$ y $\varphi+\frac{\pi}{2}$; agora só resta calcular a infinidade dos coeficientes $a, b, c, d, \ldots$. *A nosso ver* a solução já está dada (salvo por tal cálculo); para Fourier, nesse caso é necessário justificar a solução fisicamente[9] antes de realizar tal cálculo e acrescentar:

Suponhamos que a temperatura fixa da base A, em lugar de ser igual à unidade para todos os pontos, seja tanto menor quanto mais distante esteja o ponto 0 da reta A, e que seja proporcional ao cosseno desta distância; se conhecerá facilmente, nesse caso, a natureza da superfície curva cuja ordenada vertical

---

7 A função $\varphi(x,y)$ se identifica também como $v(x,y)$.

8 A consideração dos valores de uma função em um intervalo é nova; lembrar que no século XVIII isso não tinha significado.

9 Porém, diferentemente de Bernoulli, que apresenta argumentos físicos para a demostração do problema, aqui Fourier nos mostra que a solução matemática é *coerente* com a situação física, mas a demostração insere-se na matemática mesma, sem alusão a argumentos que não pertenecem a ela. Assim, inicia-se a separação entre a Física e a Matemática, que desde a Antiguidade caminhavam estreitamente ligadas uma à outra.

expressa a temperatura ou o f(x,y). Cortando esta superfície pela origem com um plano perpendicular ao eixo das x, a curva que determina a secção terá por equação

$$v = a \cos y;$$

os valores dos coeficientes serão os seguintes

$$a = a,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 0,$$

e assim sucessivamente, e a equação da superfície curva será

$$v = ae^{-x} \cos y.$$

Cortando essa superfície perpendicularmente ao eixo y, teremos uma logarítmica cuja convexidade é voltada para o eixo; cortando perpendicularmente ao eixo x, teremos uma curva trigonométrica que tem sua convexidade voltada para o eixo x. Conseqüentemente, a função $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ *tem sempre um valor positivo, e o valor de* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ *é sempre negativo. Então (art. 123), a quantidade de calor que uma molécula adquire, de acordo com seu lugar entre outras duas no sentido de x, é proporcional ao valor de* $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$*; portanto, tem-se que a molécula central recebe, da que a precede no sentido de x, mais calor do que ela passa à que lhe segue. Mas, consideramos esta mesma molécula colocada entre outras duas no sentido de y, sendo negativa a função* $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$*, observamos que a molécula central passa, para a seguinte, mais calor que ela recebe da precedente. Deduzimos assim, que o excedente de calor que ela adquire no sentido de x é compensado exatamente com o que ela perde no sentido de y, como expressa a equação*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Assim, é possível conhecer a direção que segue o calor que sai da fonte A. Ele se propaga no sentido de x, *e ao mesmo tempo se decompõe em duas partes, uma se dirige para um dos eixos, enquanto a outra parte continua afastando-se da origem para decompor-se como a anterior, e assim sucessivamente até o infinito. A superfície que consideramos é reproduzida pela curva trigonométrica que corresponde à base A, e se move perpendicularmente ao eixo* x, *seguindo este eixo, enquanto que cada uma de suas ordenadas decrece ao infinito, proporcionalmente às potências sucessivas de uma mesma fração.*

Podemos obter conseqüências análogas se as temperaturas fixas da base A forem expressas pelo termo b cos 3y, ou um dos termos seguintes c cos 5y...; e pode-se, depois disso, formar uma idéia exata do movimento do calor no caso geral; já que se verá, pelo que se segue, que esse movimento se decompõe sempre em uma multiplicidade de movimentos elementais, onde cada um se comporta como se fosse único.

Discussão

Iniciamos nosso estudo buscando dar significado ao conceito de convergência de séries infinitas, assim, encontramos que a origem desse estudo se apresentou associado a um problema por resolver: o estudo científico da propagação do calor.

Evidentemente, a obra de Fourier é singularmente importante, tanto para a engenharia, como para a análise matemática. Como resultado da revisão da obra de Fourier, formulamos nossa hipótese central de pesquisa a qual consiste em que "para a construção da noção de convergência de séries infinitas, precisa-se de um ambiente fenomenológico estreitamente relacionado com a estabilidade de sistemas fluidos. De sorte que, determinar o estado estacionário do sistema conduz, necessariamente, a um estudo da convergência de uma série trigonométrica infinita..."

Dos resultados de nossa experiência no contexto físico do início, observamos que a primeira intuição sobre o fenômeno a ser estudado é perceptível; isso não ocorre com sua representação gráfica nem analítica: obtivemos quase tantas representações como respostas. Na realidade, ao solicitar uma representação gráfica, estávamos exigindo uma manejo versátil entre o contexto físico e o geométrico (que é parte da cultura escolar, inclusive, e que é evitado). No contexto físico é preciso ter uma referência clara para distinguir ***o que varia*** em relação ***ao que*** é o que produz tal variação,[10] para, em seguida, *predizer* quando a variação que subsiste chega a um estado estável. Essa predição é a determinação do estado estacionário de que se aproximam os diversos estados, onde, para cada um, tem-se determinada evolução. Precisar a relação existente entre evolução do fenômeno para cada tempo e predição é o que foi solicitado aos professores; na realidade, solicitamos que reconstruíssem a síntese do intelecto de Fourier nessa tarefa de representação.

O estudo de Fourier vem precedido de uma análise qualitativa e empírica do fenômeno físico em questão, da intuição acerca da certeza da convergência da solução, ligada à natureza própria do fenômeno (a temperatura não é infinita). E sobre ele fundamentam-se seus desenvolvimentos posteriores analíticos, antepondo, assim, o contexto físico ao geométrico e ao algébrico, fazendo uso, neste último, de habilidades matemáticas próprias da época, ignorando as nossas tradições educativas. Não obstante, o estudo de problemas físicos atuais formulados pela engenharia requer uma análise qualitativa e uma representação adequada. Daí a importância de estudar o contexto físico, a fim de procurar uma aproximação fenomenológica que possibilite futuros planejamentos didáticos em contextos afins à engenharia nas diversas especialidades que o propiciem.

Nossa hipótese inicial de trabalho se fundamenta em que é indispensável, para a construção de um conceito matemático, a significação que lhe deu origem; nesse caso, é a determinação do estado estacionário

---

10 Isso, sem ser precisamente o mesmo, vincula-se a um obstáculo epistemológico reportado em Sierpinska (1992), referido a um esquema inconsciente de pensamento "(...) são observadas modificações como fenômenos, enfocando a atenção sobre como modificam os objetos, ignorando que modifica" (p. 36). Sierpinska alude ao trabalho de Aristóteles, onde sua atenção enfoca em como os objetos passam de um estado a outro, e em encontrar uma definição de modificação, assim como em estabelecer as categorias delas. "Em Física, livro III, capítulo i, Aristóteles define 'movimento de modificação' como uma atualização de um estado potencial e diz que 'existem tantas classes de movimento de modificação como classes de ser'. Seus exemplos de movimento de modificação são: modificação qualitativa, crescimento e decrecimento, rotação, amadurecimento e envelhecimento. Essas denominações descrevem a natureza da modificação como uma variável que passa de um posível valor a outro. Contudo, Aristóteles não se interessou na variável mesma, não centrou sua atenção em métodos e meios para medir suas modificações" (p. 36).

que propiciou tal construção. Porém, esse conceito físico não é produto da primeira experiência sensível; basta dizer que a humanidade conhece, requer e manipula o calor desde tempos remotos, tanto que seu estudo científico se iniciou no século XIX, pouco depois da publicação da *Mecânica Celeste,* de Laplace. Isto é, tem sido estudada a natureza do espaço que cerca o globo terrestre antes de se conhecer um fenômeno vital para a vida humana. Ele não é gratuito, a abstração requerida para a aquisição do conceito físico envolvido representa uma tarefa cognitiva das mais complexas. Ninguém se atreveria a levantar uma panela que contém água em ebulição suspendendo-a por sua base: essa decisão é produto da intuição primitiva (quase instintiva). Mas posso admitir que, sendo o fluxo de calor constante (não tem aumento de temperatura), as temperaturas nos pontos diferem?... É como admitir *variação* dentro do constante (imutável). Este último, sem dúvida, não deriva da experiência sensível, mas de uma reflexão profunda do fenômeno para o qual se requer um amplo repertório de habilidades não cultivadas no âmbito escolar (nem propiciadas no meio social). Temos, assim, a obrigatoriedade de desenvolver a intuição além do sensível, como uma etapa prévia, antes de significar nosso conceito matemático particular. Em síntese, o tipo de estudo epistemológico que realizamos nos proporcionou a explicação que nega, parcialmente, nossa hipótese de partida, a saber, embora seja certo que o conceito surgiu no âmbito da determinação do estado estacionário (particularmente na teoria do calor), este não é propício para recriar em sala de aula. Resulta ser mais complexo que a noção que desejamos introduzir. Este último nos induz ao estudo epistemológico nas diversas formações profissionais de nosso sistema de educação superior e, com ele, entramos na perspectiva socioepistemológica (Cantoral e Farfán, 2003).

Temos indicado, como um problema fundamental de corte epistemológico, se as transposições podem ou devem depender do público a que se destina o ensino. Nossa resposta é que devem; mas é necessário precisar o como e em função de quê. Do resultado anterior (e noção particular aludida) se desprendem, ao menos, duas abordagens para dar significado escolar: dentro do contexto em ele surgiu, o que requer o desenvolvimento da intuição física nos estudantes descrito anteriormente; ou envolve a epistemologia própria do âmbito em que os estudantes se desenvolveram profissionalmente fortalecendo as habilidades que são requeridas. Se optamos pela primeira decisão no esboço de uma engenharia didática, esta estará fora de nosso controle, pois, pelo momento, o programa e o tempo institucional destinados às aulas de matemática e de física são desconhecidos. O segundo requer uma investigação epistemológica adicional, mas ao nosso alcance. Optamos por este último e, em uma pesquisa (Albert e Farfán, 1996), apresentamos como uma série numérica infinita é o conceito de *multiplicador* em economia, sendo a base para a construção de uma importante teoria nessa disciplina; mas nem os professores nem os alunos a reconhecem. De fato, evitam-na, como tudo que envolve a manipulação do infinito. Argumentos típicos são: "...não é possível que a soma infinita seja uma constante... se aproxima,... mas não chega..." ao mesmo tempo e no mesmo âmbito, essa série é amplamente manipulada, de fato algoritmizada. As perguntas hoje se referem à determinação do lugar em que é necessário encarar, para os estudantes, o infinito e as habilidades e conhecimentos que lhes permitam fazê-lo.

Outro projeto, que também deriva do estudo epistemológico que descrevemos, está relacionado ao precálculo[11] (estudo de funções). Dentre os resultados, encontramos que o contexto algébrico não somente predomina nas concepções do sujeito, em nosso estudo, mas impede o estabelecimento de soluções que, sendo expressamente situadas em um contexto geométrico, estão condicionadas ao conhecimento e às habilidades de cortes algébricos prévios (em alguns casos, apesar da contradição manifestada). A exceção se deu justamente naqueles que transitam flexivelmente de um contexto a outro e para os quais o geométrico faz parte de seu repertório de estratégias para abordar problemas, conferindo, além do mais, um atributo de significação. Pelo lado epistemológico, observamos que esse *transitar flexivelmente* fazia parte das habilidades matemáticas dos científicos que cultivavam o cálculo algébrico no século XVIII, que colocavam em jogo ao resolver problemas novos.

Assumimos esses elementos como hipóteses centrais para o esboço de uma engenharia didática em precálculo (Cantoral e Farfán, 1998). As variáveis diretrizes desse esboço se localizam no desenvolvimento de

11 As dificuldades que envolvem o conceito de função tem sido amplamente documentadas, por isso não nos ateremos a esse respeito. Ver, por exemplo Dubinsky y Harel (1992).

habilidades para abordar problemas como o estabelecimento de padrões e a geração, a partir deles, de outras funções por meio de sua operação gráfica, propor e resolver problemas em um contexto (seja algébrico, numérico ou gráfico) fazendo a transferência aos outros contextos e vice-versa. Das diversas experimentações que fizemos ficaram, como problemas a serem resolvidos, a introdução das funções que nos servem de base para operar, a saber, a *identidade* (enquanto proporcionalidade), o logaritmo (sua construção a partir das tabelas) e a função *sen x* (contexto numérico, a respeito da predição de soluções). Tais considerações são abordadas nos trabalhos de Melchor (1996), Trujillo (1995) e Zuñiga (1993), respectivamente.

O trabalho a seguir é a elaboração e a implementação de situações didáticas a partir desses resultados. Um dos principais problemas se localiza no nível metacognitivo dos professores, isto é, em suas crença sobre o que é aprendizagem e seu papel como docente: o desejo do professor é construir uma progressão suave sem saltos abruptos, fazendo pequenas escalas, onde nada é proposto ao estudante que não tenha sido bem preparado, antecipando qualquer possível erro, o que é contraditório à teoria em termos de obstáculos e conflitos cognitivos, mas permite a direção cômoda do contrato didático – *tudo é fornecido ao estudante, que pode cooperar mostrando sinais de êxito; se o estudante falha, não é erro do professor... nunca!* Neste caso, os professores deveriam alterar a engenharia proposta a fim de adaptá-la às suas representações, o que implicaria trocar sua natureza.

Justamente nessa direção se dirigem nossos esforços atuais, isto é, interessa-nos a *reprodução* (Lezama, 1999, 2003) dos materiais didáticos provenientes da pesquisa e o processo mediante o qual o professor os adota e aplica em seu trabalho cotidiano.

Em nosso caso, não somente atentamos à gênese do conceito e dos mecanismos de sua produção, mas também nos interessamos pelas variáveis associadas a seu surgimento, que, ao se incorporar (experimentalmente) em nosso sistema escolar, direcionou-nos para outro estudo desta natureza, encaminhado a precisar as diversas formas como se constrói o conhecimento dentro das diversas especialidades cultivadas em nível superior. Esse estudo aponta que as especificidades de nosso sistema requer, para seu estudo e incidência, um tratamento epistemológico cuja profundidade não tem sido requerida por outras tradições e, com ele, o critério a ser seguido em torno da procura de uma identidade de nossa pesquisa como condição para sua relevância e pertinência. A meu modo de ver, origina em nossa cultura e nas formas de construção do conhecimento que são produto dessa cultura, enquanto adotamos e adaptamos o saber gerado por outras.

Tradução de Karly Barbosa

Referências

ALBERT A.; ARRIETA J. e FARFÁN R. (2001). *Un acercamiento gráfico a la resolução de desigualdades*. 3 ed. México, Grupo Editorial Iberoamérica (Coleção Cuadernos Didácticos vol. 3).

ALBERT A. e FARFÁN R. (1996). *Las series matemáticas y el multiplicador en Economía*. Publicações de la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formação de Professores e Investigação en Matemática. Teresa Cruz et alii (eds.). Puerto Rico, Puerto Rico.

ARTIGUE M. (1990). "Difficultés cognitives et didactiques dans la construction de relations entre cadre algebrique et cadre graphique". In: BOOKER, G.; COBB, P. y MENDICUTTI, T. (eds.). *Proceedings of PME*. México, 14: 11-18.

______ (1990a). Epistémologie et didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, v. 10, n. 2-3, pp. 241-286.

______ (1992). Didactic Engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Selected Papers, pp. 41-66.

BACHELARD G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Librairie J. Vrin [Tradução en español editada por Siglo XIX, México].

BROUSSEAU G. (1976). La problématique et l'enseignement des mathématiques. XXVIIIème Rencontre de la Cieaem. Louvain la Neuve.

______ (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 4, n. 2, pp. 167-198.

______ (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, n. 2, pp. 33-112.

BROUSSEAU G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, n. 3, pp. 309-336.

CANTORAL, R. e FARFÁN, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introdução al análisis. *Epsilon*, n. 42, pp. 353-369.

_______ (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution. *Educational Studies in Mathematics*, v. 53, n. 3, pp. 255-270.

DUBINSKY, E. e HAREL, G. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy.* EUA, MAA, Notes 25.

FARFÁN, R. (1997). *Engenharia Didáctica y Matemática Educativa. Un estudo de la variação y el cambio*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

FOURIER J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*. Chez Firmin Didot, Pere et Fils. Libraires pur les Mathématiques. L'architecture hydraulique et la marine. Rue Jacob, n. 24, París. Reimpressions Editions Jacques Gabay (1988).

LEZAMA, J. (1999). *Un estudo de reproducibilidad: El caso de la função exponencial.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

_______ (2003). *Un estudo de reproducibilidad de situações didácticas*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

MELCHOR, T. (1996). *El concepto de función y su relación con la proporción.* Dissertação de mestrado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

SIERPINSKA A. (1992). *On understanding the notion of function. The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Dubinsky & Harel (eds.). MAA Notes. 25: 23-58

TRUJILLO R. 1995. *Problemática de la enseñanza dos logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

ZÚÑIGA L. 1993. *Competencia, cognição y currícula en precálculo en un ambiente gráfico: un acercamiento cuantitativo en el marco de la engenharia didáctica*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Recebido em nov./2001; aprovado em mar./2002