

Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento

IRINÉA DE LOURDES BATISTA*
SIMONE LUCCAS**

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma abordagem histórico-filosófica com o objetivo de contribuir para a pesquisa em educação matemática, fundamentada em uma análise de elementos epistêmicos, lógicos, ontológicos e metodológicos da estrutura e das articulações que um determinado conhecimento apresenta desde sua criação até o desenvolvimento atual, bem como a habilidade do mesmo em solucionar problemas. Partindo dos referenciais teóricos elencados, apresentamos um exemplar de aplicação da abordagem, com a reconstrução histórico-filosófica dos conteúdos Sistemas de Equações Lineares e Determinantes encontrados nos trabalhos desenvolvidos por dois matemáticos: Takakazu Seki Kowa (1642-1708) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Palavras-chave: abordagem histórico-filosófica; história da matemática; educação matemática.

Abstract

In this paper, we present a historical-philosophical approach with the aim of contributing to research in Mathematical Education, based on the analysis of epistemological, logical, ontological and methodological elements of the structure and of the articulations that a specific knowledge presents, from its creation until its current development. Also, we are concerned about this knowledge's ability to solve problems. Based on the theoretical references mentioned in the article, we provide an example of application of our approach, with the historical-philosophical reconstruction of the subjects Systems of linear equations and Determinants, found in the works developed by two mathematicians: Takakazu Seki Kowa (1642-1708) and Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Key-words: *Historical-philosophical approach; history of mathematics; mathematical education.*

* Doutora em Filosofia – FFLCH/USP/SP e PARIS VII - Depto de Física – UEL – PR.
E-mail: irinea@uel.br

** Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática – UEL – PR. E-mail:
sluccas2002@yahoo.com.br

Introdução

A inclusão da História da Matemática no ensino vem sendo mundialmente pesquisada e discutida em conferências, congressos, grupos de estudos, inclusive da Internet.

Tal incorporação é defendida segundo uma abordagem mais abrangente, adequada, consciente e didática que ofereça condições para uma aprendizagem crítica e reflexiva, uma vez que nos dias atuais há uma grande carência científica, o que acarreta sérios danos, principalmente ao campo educacional.

Essa realidade nos conduziu a uma busca por opções alternativas, tanto epistêmicas, quanto metodológicas de trabalho. Nesse sentido, a Educação Matemática intervém positivamente, possibilitando a reflexão e a análise crítica no ensino e na aprendizagem, ressaltando aspectos relevantes, tanto da estrutura, quanto das articulações existentes entre o conhecimento matemático, a proposta metodológica e a realidade educacional.

Pudemos constatar, historicamente, que o enfrentamento de problemas, bem como a busca de suas soluções, têm atuado como uma mola propulsora para a evolução da humanidade. Assim sendo, cremos que o estudo e a análise de tais problemas conforme uma abordagem Histórico-Filosófica pode estimular a ocorrência da compreensão, da aprendizagem e, conseqüentemente, do desenvolvimento científico. Porém, alguns questionamentos merecem atenção, tais como: existe fundamento para esta afirmação? Há evidências históricas de que os problemas realmente fomentam a evolução científica? E, principalmente, como desenvolver uma proposta educacional consistente que amenize o quadro acima exposto conforme tal abordagem?

Abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática

A abordagem histórico-filosófica é relativamente recente no meio da pesquisa em Educação Científica e, até onde pudemos pesquisar, ainda inexplorada no campo da Educação Matemática. Desse modo, encontramos alguns pesquisadores que têm discorrido sobre a importância da história da Matemática ou da filosofia da Matemática, porém poucos têm abordado a perspectiva histórico-filosófica.

Dentre tais pesquisadores podemos citar Angel Ruiz Zúñiga. Esse pesquisador enfatiza que a história da Matemática é fonte de riqueza

metodológica e epistemológica, pois a natureza matemática e também sua história possuem um vasto campo de experimentações, por meio dos quais é possível fazer grandes e importantes reflexões e inclusive conduzir a idéias renovadoras.

Zúñiga comenta que a história da Ciência e, em particular, da Matemática, já é em si mesma uma fonte de satisfação intelectual e, também que

(...) na prática matemática a história é um fator essencial para compreensão de seus conceitos e métodos, de suas perspectivas, seus limites e suas possibilidades; um instrumento valioso para a determinação de estratégias coletivas de evolução consciente e adequada a nossas condições e recursos. (Zúñiga, 1990, p. 263)

O pesquisador Antonio Miguel, em sua tese de doutorado realizada no ano de 1993, abordou a relação que existe entre a história, a história da matemática e a educação matemática.

Em sua tese, Miguel resgata a história por meio de levantamento, detalhamento e análise dos diversos papéis pedagógicos atribuídos a ela por matemáticos, historiadores e educadores matemáticos. Miguel também analisa o resgate da Educação Matemática na história recorrendo à história, à epistemologia da Matemática e à filosofia da Educação tentando reconstituir os paradigmas da Educação Matemática na história. Outro aspecto presente em seu trabalho é a apresentação de um estudo histórico-pedagógico-temático sobre os números irracionais evidenciando a relação história e Educação Matemática.

Segundo Miguel, a utilização da história no ensino da Matemática pode ocorrer de várias formas. Dentre elas, as principais levantadas por ele foram o uso da história como: motivação, objetivo, método, recreação, desmistificação, formalização, dialética, unificação, axiologia, conscientização, significação, cultura, e epistemologia.

Miguel acredita que a história pode e deve desempenhar um papel subsidiário na Educação Matemática, desde que “devidamente reconstituída com fins pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático” (1993, p. 107).

Outro fator abordado por ele diz respeito à “desastrosa” apresentação técnica e aparentemente neutra dos fatos científicos ou matemáti-

cos, isenta de qualquer tipo de contextualização. Ao seu ver, uma maneira de se contrapor a tal situação é trabalhando com uma história da Matemática pedagogicamente orientada, pois ele acredita que

(...) cidadãos matematicamente educados com base numa metodologia histórica que promova o pensamento independente e crítico e a autonomia intelectual é que estarão melhores preparados para propor, analisar, discutir e votar por medidas emancipadoras referentes ao papel a ser desempenhado no contexto das sociedades atuais pelas ciências em geral e pela matemática em particular. (Miguel, 1993, p. 114)

Outro pesquisador que também desenvolveu estudos na área de história da Matemática foi Carlos Roberto Vianna. Em sua dissertação de mestrado (1995), o autor argumenta que, a partir da década de 1980, tem ocorrido uma tentativa de abandono da utilização da Matemática Moderna em praticamente todo o mundo. No Brasil, o autor indica que, principalmente a partir de 1985, também têm ocorrido propostas de reformulação no ensino e a história da Matemática tem aparecido de maneira destacada na Educação Matemática.

Tal reformulação conduziu Vianna, em sua dissertação de mestrado, a analisar a utilização da história da Matemática em uma coleção de livros didáticos de 5^a a 8^a série: “Matemática e Vida”, estabelecendo e classificando-a em quatro categorias: História da Matemática como Motivação; História da Matemática como Informação; História da Matemática como Estratégia Didática; História da Matemática como parte Integrante do Desenvolvimento do Conteúdo (Imbricado).

Vianna constatou que nessa coleção a história da Matemática esteve presente em 50 momentos, sendo que em 84% deles, ela apareceu nas duas primeiras categorias de “História” acima citadas. Em sua análise Vianna lamentou a inclusão da história da Matemática:

Infelizmente não podemos afirmar que, juntamente com esse crescente interesse pela História da Matemática, tenha havido uma sensível melhora na forma de apresentação do conteúdo matemático nos livros didáticos ou que os alunos tenham passado a mostrar uma melhor compreensão da matemática. (Vianna, 1995, p. 64)

Michael N. Fried (2001, p. 392), outro pesquisador que tem desenvolvido reflexões nesse campo, comenta que têm ocorrido muitas discussões sobre a inclusão da história da Matemática no ensino, porém pouco tem sido feito nas escolas. Para ele há três grandes razões para que tal incorporação ocorra, pois ela humaniza a Matemática, faz com que a Matemática seja mais interessante, mais compreendida e mais acessível, permitindo uma visão maior dos conceitos, dos problemas e de suas resoluções (esta última razão, para ele, é a mais importante de todas).

Segundo Fried, há várias maneiras de introduzir a história da Matemática na escola; no entanto, em geral, há duas estratégias básicas: a de Adição (estratégia passiva que só alarga o currículo) e a de Acomodação ou Ajuste (utiliza o desenvolvimento histórico no ensino) (ibid.).

Fried defende que se alguém está disposto a alargar o comprometimento com o ensino da matemática incluindo a humanização desta, então certamente a resolução dessa dificuldade está em combinar a História e a Educação Matemática (ibid., p. 401).

Encaminhando-nos para a discussão no domínio da filosofia da Ciência, temos Larry Laudan ressaltando que no século XX, principalmente, observou-se o crescimento de um grande número de áreas especializadas. Segundo ele, o surgimento de tantas áreas dificulta a visão do todo, ocasionando um efeito deletério na história do pensamento: a falta de percepção pelos historiadores do caráter integrativo dessa história (Laudan, 1977, p. 173).

Laudan contesta esse tipo de concepção pois, em seu modo de ver, o objetivo da ciência consiste, essencialmente, na capacidade de resolver problemas,¹ e que estes, para serem analisados, devem estar inseridos em um contexto de pesquisa (ibid., pp. 11 e 13).

O autor defende também que a evolução das idéias, dos problemas e de suas soluções, é necessariamente um processo interdisciplinar (ibid., p. 174). Desse modo, o aumento da especialização das áreas tende

1 A atividade científica compreendida como resolução de problemas é recorrente na filosofia da ciência. Conforme temos em Popper: "... a ciência deve ser vista como o desenvolvimento de um problema para outro – problemas cada vez mais profundos". E ainda "o problema suscita o desafio de aprender, avançar o nosso conhecimento, experimentar e observar" (Popper, 1982, p. 247). A diferença em Laudan é que ele amplia essa compreensão para aspectos filosóficos que incluem a ontologia e a metafísica desses problemas.

não só a dificultar o desenvolvimento de um conhecimento com tal caráter, como também o distancia cada vez mais de qualquer tipo de contexto. Tal concepção, inevitavelmente, apresenta reflexos na produção de conhecimentos e, conseqüentemente, no campo educacional.

Outra defesa de Laudan consiste na idéia de que uma concepção teórica pertence a um contexto histórico e, também, está sujeita às *tradições de pesquisa* (ibid., pp. 180-184). Para ele uma tradição de pesquisa caracteriza-se como “um conjunto de suposições gerais sobre entidades e processos em um domínio de estudo e sobre os métodos apropriados a serem utilizados para a investigação dos problemas e a construção de teorias nesse domínio” (1977, p. 81).

A adoção de uma tradição de pesquisa, segundo ele, é feita segundo a capacidade que esta possui de resolver a maior quantidade possível de problemas que surgem. Laudan admite também que o poder de argumentação pode mudar de uma época para outra, dependendo da tradição de pesquisa atuante, pois os “sistemas de pensamento não são meramente relações lógicas entre proposições [...], mas também tentativas de resolver o que são percebidos como problemas importantes”, e que “um sistema de idéias só pode ser compreendido quando se conhece, em detalhes, os problemas aos quais ele foi dirigido” (pp. 175-176).

Queremos ressaltar, desse modo, a relevância e a pertinência da existência de uma discussão e de uma proposta pedagógica fundamentada em um contexto histórico e em uma discussão filosófica que evidencie o desenvolvimento e o conhecimento baseado na resolução de problemas de uma determinada ciência, como observaremos na análise histórico-filosófica que iremos realizar no próximo item, pois a reconstrução histórica com essa abordagem filosófica – identificação dos problemas e tradições de pesquisa – permite o acesso à criação e à evolução do conhecimento em seu contexto original, bem como à trajetória deste no decorrer do tempo até os dias atuais.

Consideramos que a abordagem histórico-filosófica contribui para a compreensão dos problemas contemporâneos, uma vez que a análise epistêmica, lógica, ontológica e metodológica da estrutura e das articulações que um determinado conhecimento apresenta desde sua criação até o desenvolvimento atual, e a habilidade que o mesmo apresenta para solucionar problemas, caracterizam-se como de fundamental importância para a evolução da capacidade crítica e consciente do ser humano.

A produção de um trabalho sob uma perspectiva que envolva simultaneamente a história da Matemática e a filosofia da Matemática pode gerar um ambiente ainda mais favorável à análise e à reflexão de objetos de estudo, com vistas a perceber o processo dinâmico que permeia o conhecimento.

No campo das ciências – notadamente na Física – tal abordagem já vem sendo explorada há algum tempo, com produção de trabalhos e artigos na área. Citamos como exemplo os estudos de revisão bibliográfica, de pesquisa e de aplicação de Michael R. Matthews e Irinéa L. Batista.

Matthews ressalta que vivemos atualmente uma larga crise no ensino contemporâneo de ciências, corroborada pela evasão tanto de professores quanto de alunos das salas de aula, e também pelo alto índice de analfabetismo nas ciências.

Realizando uma revisão sobre as discussões na área, o pesquisador comenta que o ensino de ciências desenvolveu-se totalmente separado da História e da Filosofia, e que nesta última década tem ocorrido uma reaproximação entre tais áreas. Muitos são os fatores positivos, segundo ele, ocasionados por tal reaproximação:

[...] podem humanizar as ciências e aproximá-las dos interesses pessoais, éticos, culturais e políticos da comunidade; podem tornar as aulas de ciências mais desafiadoras e reflexivas, permitindo, deste modo, o desenvolvimento do pensamento crítico; podem contribuir para um entendimento mais integral da matéria científica, isto é, podem contribuir para a superação do “mar de falta de significação” que se diz ter inundado as salas de aula de ciências, onde fórmulas e equações são recitadas sem que muitos cheguem a saber o que significam; podem melhorar a formação do professor auxiliando o desenvolvimento de uma epistemologia da ciência mais rica e mais autêntica, ou seja, de uma maior compreensão da estrutura das ciências bem como do espaço que ocupam no sistema intelectual das coisas. (1995, p. 165)

Batista, pesquisadora atuante na área de ensino de Física, defende o desenvolvimento formal do conteúdo físico que leve em consideração a sua discussão histórica e seus problemas de interesse epistemológico, lógico e ontológico, pois o desenvolvimento de um trabalho que envolva tais aspectos pode propiciar uma compreensão maior do processo de cria-

ção de conhecimentos físicos, evidenciando o “papel da epistemologia histórica da Física como agente atuante na inteligibilidade das teorias” (BATISTA, 2000).

Com relação ao quadro conceitual da Física moderna e contemporânea, Batista argumenta que uma abordagem histórico-filosófica contribui para

(...) a compreensão do porquê uma proposição é considerada comprovada, estabelecida como conhecimento, e como ela se relaciona com outras proposições na Física. Pensamos que o aluno/professor que é estimulado a pensar mediante algumas questões epistemológicas sobre um dado conteúdo, estará mais apto a explicar quaisquer proposições, conceituações, de maneira integrada e desenvolver, por meio de sua própria crítica, uma visão ampliada e consistente da atividade científica. (Batista, 1998)

A pesquisadora defende, assim, o trabalho com uma abordagem que envolva conjuntamente a História, a Filosofia e o conhecimento científico.

Acreditamos que as considerações feitas sobre tal abordagem podem refletir positivamente também na área da Educação Matemática e que o desenvolvimento de uma proposta que trabalhe a análise e a reflexão de conceitos e idéias que permeiam os conteúdos matemáticos, estudados a partir do conhecimento de fatos colhidos na reconstrução histórica, estabeleça-se como um frutífero campo para a realização de investigações e como uma alternativa metodológica eficiente.

Como comentamos anteriormente, no campo da Educação Matemática, a abordagem de tal enfoque é inexplorada, até onde pesquisamos, haja vista a hodierna sistematização da filosofia da Educação Matemática como campo de investigação teórica que vem sendo produzida a partir da década de 1980.

Partindo dos referenciais teóricos apresentados, desenvolvemos uma investigação, oferecida como exemplar de aplicação da abordagem, realizando a reconstrução histórica dos assuntos Sistemas de Equações Lineares e Determinantes encontrados nos trabalhos desenvolvidos por dois matemáticos: Takakazu Seki Kowa (1642-1708) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nessa reconstrução evidenciamos vários aspectos teórico-conceituais, como a identificação de problemas geradores e a importância de se conhecer as circunstâncias e as problemáticas que desen-

cadearam o desenvolvimento de teorias específicas, relacionadas com os Sistemas de Equações e com os Determinantes.

Esse processo de reconstrução histórico-filosófica com objetivos educacionais envolve dois elementos fundamentais, que identificamos como elemento estrutural e elemento articulador, conforme definido por Batista:

Explicitamos o perfil estrutural que mostra como se dá a construção de um conhecimento específico, que fornece instrumentos para realizar a análise filosófica do objeto de estudo e, ao mesmo tempo, subsidia o desenvolvimento de uma estrutura consistente, integradora de adaptações e transformações didáticas. E apresentamos, também, o perfil articulador, responsável pela inserção de um determinado conhecimento em uma teoria mais abrangente e, conseqüentemente, em um corpo maior de uma ciência, que nos propicia condições para analisar a dinâmica conceitual de um tema em estudo, bem como o desenvolvimento da conexão entre os conteúdos estudados e o seu aprimoramento, ressaltando as relações que se estabeleceram entre eles, além de nos mostrar como articular tais conteúdos em uma elaboração didática. (Batista, 2004)

Investigação histórico-filosófica sobre Sistemas de Equações e Determinantes

Inicialmente, apresentaremos estudos baseados no livro *The Development of Mathematics in China and Japan*, escrito pelo matemático e historiador japonês Yoshio Mikami (1875-1950), no ano de 1913, pois em tal livro encontramos textos do trabalho desenvolvido pelo japonês Seki Kowa sobre o tema. Outra fonte, também utilizada como base para nosso estudo, foi o livro de Howard Eves, *Introdução à História da Matemática*, de 1997.

Num segundo momento, realizaremos a análise de duas correspondências do alemão Leibniz endereçadas ao Marquês de L'Hospital. O texto base foi extraído da coletânea de artigos originais *Source Book in Mathematics*, editada por David Eugene Smith, no ano de 1929; além desse livro, trabalhamos também com a coleção *Os Pensadores: Leibniz - Novos ensaios sobre o entendimento humano*, v. I e II, 1992.

Neste item pretendemos estabelecer um paralelo entre o trabalho de Kowa e de Leibniz, que embora inseridos em culturas diferentes, mo-

tivados – inicialmente – por situações distintas e utilizando processos cognitivos diferenciados, conseguiram desenvolver o mesmo processo para eliminar valores desconhecidos de um sistema de equações, semelhante ao usado na atualidade para resolver o cálculo de determinante.

Queremos destacar que este trabalho corresponde à análise dos primeiros registros de um método que hoje é utilizado como uma operação na teoria dos Determinantes, embora naquela época não se tivesse tal pretensão.

Takakazu Seki Kowa

Este pensador, estudante de matemática desde a infância, tornou-se um especialista na criação de métodos de resolução de problemas matemáticos, desenvolvendo também aplicações na astronomia. No ano de 1683, o japonês Seki Kowa, em seu manuscrito *Kai Fukudai no Ho* (Método de Solução de Questões Secretas), expõe o seguinte problema geométrico:

Há uma pirâmide quadrada truncada de volume conhecido. Dada a soma do lado mais baixo e a altitude, e a soma dos quadrados do lado mais baixo e da altitude, é exigido encontrar o lado superior. (Kowa apud Mikami, 1913, p.191)

De acordo com Mikami (ibid.), Kowa argumenta que esse problema pode ser resolvido de duas maneiras: a primeira, denominada por ele *shinjutsu* ou *método direto* (substituição direta de valores às incógnitas), e a segunda identificada como *kyojutsu* ou *método indireto* (simplificação de equações) (ibid., p.192, grifos do autor).

Sua opção de trabalho neste manuscrito foi pelo segundo método; Mikami inclusive comenta que a notação usada por Kowa mostra que “a natureza dos símbolos algébricos usados por Seki aparece manifestadamente” (ibid.).

Desse modo, representando o volume, o lado superior, o lado inferior, a altitude, e as duas somas, como v , u , l , a , s_1 e s_2 , respectivamente, Mikami (ibid.) comenta que “considerando a data do problema

$$v = \frac{1}{3} u^2 + u1 + 1^2)a^2 \quad (1)$$

sendo, temos:

$$v = \frac{1}{3} [u^2 + u(s_1 - a) + (s_1 - a)^2]a \quad (2)$$

ou

$$-3v + (s_1^2 + s_1u + u^2)a - (2s_1 + u)a^2 + a^3 = 0 \quad (3)$$

sabendo que

$$s_2 = 1^2 + a^2 \quad (4)$$

tem-se que

$$s_2 = (s_1 - a)^2 + a^2 \quad (5)$$

ou

$$(s_1 - s_2) - 2s_1a + 2a^2 = 0 \text{ (ibid.)} \quad (6)$$

Mikami continua sua explanação afirmando que a equação em (3) terá resultado para u , quando a incógnita a for eliminada nas equações (5) ou (6), sendo que tal eliminação pode ser obtida por meio da simplificação de equações.

Queremos ressaltar que nosso objetivo neste artigo não é explicitar o procedimento efetuado por Kowa e já analisado por Mikami no que tange à resolução do problema gerador; por isso, nessa exposição não nos deteremos nos cálculos da solução do problema geométrico, e sim nas operações que envolvem a simplificação de equações, pois foi por meio destas que Kowa desenvolveu a base da teoria dos Determinantes.

Iniciaremos nossa análise a partir do item 12 do capítulo 24: *Seki's conception of the determinant* de Mikami (ibid., p. 195). Entretanto, o fator que mais chamou nossa atenção, foi o aparecimento, provavelmente, do primeiro registro da operação que conhecemos atualmente como determinante.

Assim, buscando simplificar as equações do problema em estudo, Kowa desenvolveu uma operação com o intuito de eliminar as incógni-

2 A notação atual do volume de uma pirâmide truncada de base quadrangular é $v = \frac{1}{3} h(B + \sqrt{Bb} + b)$, sendo que B representa a área da base maior, b a área da base menor e h a altura.

tas, por ele denominadas de “desconhecidos”. Ele explicou que ao se trabalhar com duas equações do primeiro grau e com um único desconhecido, do tipo:

$$\begin{aligned} B + Ax &= 0 \\ D + Cx &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

têm-se:

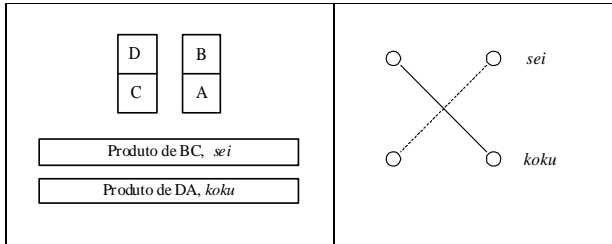


Figura 1 – Sistema com duas equações

A operação efetuada para obter os produtos BC e DA, Kowa denominou *sbajo* ou “multiplicação cruzada”, representada na segunda coluna da figura 1. Nessa multiplicação, ele distinguiu e nomeou as multiplicações-diagonais: *sei* e *koku*; sendo que *sei* para ele significava “que dá vida, criativo”, enquanto que *koku* significava “que dá morte, destrutivo” (ibid., p. 197, grifos do autor).

Seguindo em sua explanação, Kowa mostrou como efetuar este cálculo quando se trata de três equações, como:

$$\begin{aligned} C + Bx + Ax^2 &= 0 \\ F + Ex + Dx^2 &= 0 \\ I + Hx + Gx^2 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Ele registrou-o por meio dos diagramas:

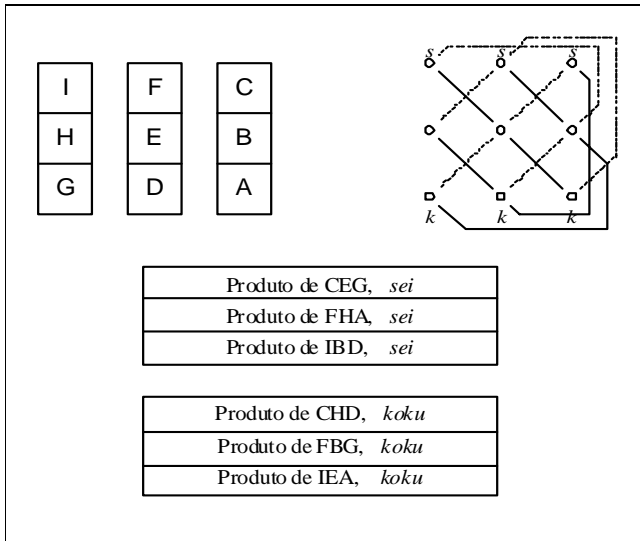


Figura 2 – Sistema com três equações

Nesse registro, Kowa indicou os produtos *sei* ou positivos: CEG, FHA e IBD, e os produtos *koku* ou negativos: CHD, FBG e IEA, desprezando outros produtos, segundo Mikami (ibid., p.196). É de se destacar o fato da aproximação desse processo desenvolvido por Kowa, em 1683, com o processo utilizado atualmente, denominado “método de Sarrus”, para calcular o valor do determinante de uma matriz de ordem três.

Com o objetivo de tornar mais claro o entendimento do processo desenvolvido por Kowa, relembramos que ao se trabalhar com duas equações que apresentam um mesmo valor desconhecido, lida-se de fato com uma equação e com uma (equação) múltipla sua, por exemplo:

$$x - 3 = 0 \quad \text{e} \quad 2x - 6 = 0 \quad (9)$$

O mesmo aplica-se ao trabalho com as três equações do segundo grau, ou seja, Kowa desenvolve uma simplificação que implica a combinação dos elementos de uma determinada equação com os elementos de outras duas, múltiplas desta, de tal modo que os fatores da combinação acabam sendo eliminados.

Kowa continua sua explanação, estendendo esse trabalho para quatro equações do terceiro grau, nas quais podemos observar a mudança na notação dos coeficientes das equações:

$$\begin{aligned}
 A_4 + A_3 x + A_2 x^2 + A_1 x^3 &= 0 \\
 B_4 + B_3 x + B_2 x^2 + B_1 x^3 &= 0 \\
 C_4 + C_3 x + C_2 x^2 + C_1 x^3 &= 0 \\
 D_4 + D_3 x + D_2 x^2 + D_1 x^3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Kowa dispôs tais equações como na primeira coluna da figura 3. Já no diagrama da segunda coluna da mesma figura, Kowa apresentou a uma multiplicação *shajo* um tanto quanto diferente das anteriores, alterando os produtos *sei* e *koku* numa mesma direção; observe:

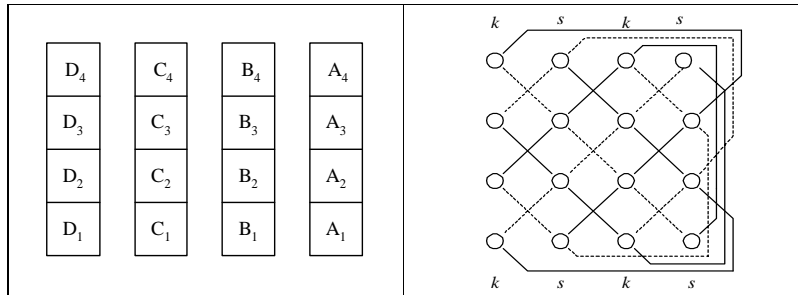


Figura 3 – Sistema com quatro equações

Desse *shajo*, segundo Mikami (ibid., p. 197), resultam os produtos:

$A_4 B_3 C_2 D_1$	$B_4 C_3 D_2 A_1$	$C_4 D_3 A_2 B_1$	$D_4 A_3 B_2 C_1$
$A_4 D_3 B_2 C_1$	$B_4 A_3 C_2 D_1$	$C_4 B_3 D_2 A_1$	$D_4 C_3 A_2 B_1$
$A_4 D_3 C_2 B_1$	$B_4 A_3 D_2 C_1$	$C_4 B_3 A_2 D_1$	$D_4 C_3 B_2 A_1$
$A_4 C_3 D_2 B_1$	$B_4 D_3 A_2 C_1$	$C_4 A_3 B_2 D_1$	$D_4 B_3 C_2 A_1$
$A_4 B_3 D_2 C_1$	$B_4 C_3 A_2 D_1$	$C_4 D_3 B_2 A_1$	$D_4 A_3 C_2 B_1$
$A_4 C_3 B_2 D_1$	$B_4 D_3 C_2 A_1$	$C_4 A_3 D_2 B_1$	$D_4 B_3 A_2 C_1$

Figura 4 – Produtos resultantes do cálculo com quatro equações

Os produtos que estão em itálico e negrito são frutos da multiplicação *koku*, sendo que os outros vêm da multiplicação *sei*. Entretanto,

Mikami (ibid.) destaca a existência de produtos, na figura 4, que não são oriundos da operação realizada com os diagramas das figuras 3; todavia, são considerados por Kowa. Nota-se então, que ele apresenta, a partir dessa quantidade de equações, uma nova operação, denominada *koshiki*, e sobre a qual fez uma breve declaração, mas suficiente para reconhecer a natureza do procedimento:

O *koshiki* ou *permuta de equações*. No caso da recolocação de quatro equações derivadas de três; no caso de cinco equações derivadas de quatro; e assim por diante. Para a substituição de duas ou três equações nenhum *koshiki* ou permuta é necessário. Ordens regulares e inversas (*jun* e *gyaku*) são sucessivamente aumentadas de 1, e então temos a próxima ordem. Para um número ímpar de colocação de equações todas são regulares; para um número par, o regular e o inverso vêm alternadamente. (Kowa apud Mikami, ibid., p.198, grifos do autor)

Esta declaração vem acompanhada das tábuas contidas na figura 5, sendo que a leitura das mesmas deve ser realizada da direita para a esquerda.

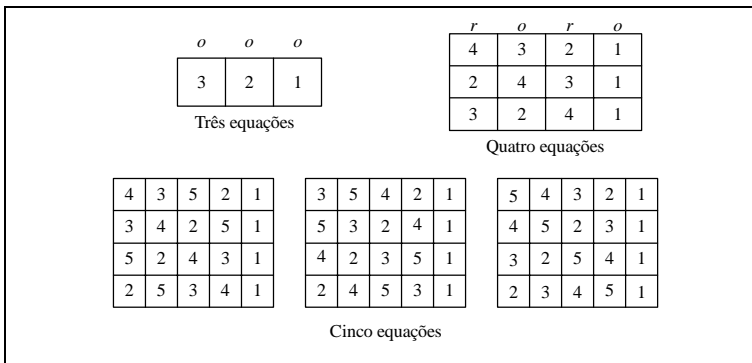


Figura 5 – Operação *koshiki* para três, quatro e cinco equações

Analisando o *koshiki* deixado por Kowa para quatro equações, percebe-se claramente que ele realiza uma permuta entre as posições 2, 3, 4 deixando fixa a última, de valor 1; entretanto, ele não coloca todas as permutações possíveis, pois seriam seis no total:

$$\begin{array}{ccc}
 4\ 3\ 2\ 1 & 3\ 4\ 2\ 1 & 4\ 2\ 3\ 1 \\
 2\ 3\ 4\ 1 & 2\ 4\ 3\ 1 & 3\ 2\ 4\ 1
 \end{array} \quad (11)$$

Acontece, que quando realizado o *shajo*, ou seja, a multiplicação cruzada com as quatro equações nestas seis posições, percebe-se que o resultado obtido da posição 4 3 2 1 é similar ao resultado obtido na posição 2 3 4 1; o mesmo ocorre com as posições 3 4 2 1 e 2 4 3 1; e, com as posições 4 2 3 1 e 3 2 4 1.

Trocando os números 1, 2, 3 e 4 das tábuas pelas letras A, B, C e D, respectivamente, e completando essas três disposições de modo que seja possível efetuar o *shajo*, temos:

D ₄	C ₄	B ₄	A ₄	B ₄	D ₄	C ₄	A ₄	C ₄	B ₄	D ₄	A ₄
D ₃	C ₃	B ₃	A ₃	B ₃	D ₃	C ₃	A ₃	C ₃	B ₃	D ₃	A ₃
D ₂	C ₂	B ₂	A ₂	B ₂	D ₂	C ₂	A ₂	C ₂	B ₂	D ₂	A ₂
D ₁	C ₁	B ₁	A ₁	B ₁	D ₁	C ₁	A ₁	C ₁	B ₁	D ₁	A ₁

Figura 6 – Extensão da operação *koshiki* de quatro equações

Juntando os produtos oriundos da multiplicação cruzada destas três disposições, encontra-se, finalmente, os produtos dispostos na figura 4. A disposição apresentada por Kowa tanto na operação *koshiki* quanto na operação *shajo*, em forma de diagramas e principalmente de tabelas, remete-nos a uma analogia com o que conhecemos atualmente como *Quadrado Mágico*, como veremos a seguir.

Note-se que a tabela de quatro equações do *koshiki* possui forma retangular; no entanto, se desconsiderarmos a última coluna da unidade, teremos um quadrado no qual a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna dará o mesmo valor, ou seja, nove.

4	3	2	1
2	4	3	1
3	2	4	1

Figura 7 – Permutação de elementos

É plausível pensar que Kowa, quando desenvolveu a operação *shajo*, a qual conhecemos atualmente pelo nome de “método de Sarrus” (com as devidas alterações), tenha se inspirado no trabalho realizado com Qua-

drados Mágicos³. De acordo com Cajori (1991, p.80), Kowa deu continuidade ao trabalho desenvolvido por seus predecessores, sistematizando uma regra para escrever quadrados mágicos abaixo de $(2n+1)^2$ células, e em casos de grande dificuldade de resolução, ele foi o primeiro a dar uma regra para construir quadrados mágicos de 4^2 células, de $4(n+1)^2$ células e de $16n^2$ células.

Com relação aos sinais empregados no processo, somente após a determinação dos produtos *sei* e o *koku* é que eles devem ser considerados e de acordo com as circunstâncias. Enquanto a multiplicação *sei* conserva os sinais de seus produtos, a *koku* inverte todos os seus. Assim, obtém-se a eliminação desejada que conduz a uma equação que não contém valor(es) desconhecido(s) (Mikami, 1913, p.199).

Embora Kowa tenha concebido esse procedimento com um objetivo inicial diferente do método utilizado atualmente sistematizado pelo francês Pierre Frederic Sarrus (1798-1861), é inegável o fato de que podemos estabelecer uma certa analogia entre estes dois processos. Nota-se, também, que Kowa chega a extrapolar o método difundido por Sarrus, mostrando de maneira prática como calcular, em termos atuais, o Determinante de uma matriz de ordem quatro. Segundo Cajori (1991, p. 80), além de Kowa ter desenvolvido um método geral para lidar com n equações, ele também sabia que um Determinante de ordem n , quando desenvolvido, tinha $n!$ termos, e que linhas e colunas eram permutáveis.

Nesta análise, não pretendemos verificar se os processos utilizados atualmente, como o método de Sarrus para Cálculo de Determinantes, reconhecem no trabalho de Kowa sua origem, tendo em vista que essa constatação exigiria cuidadosa averiguação na produção científica desse autor francês. Nossa investigação refere-se à análise do trabalho desse matemático japonês e à constatação de que o processo desenvolvido por ele assemelha-se ao processo sistematizado no Ocidente, aproximadamente um século e meio depois.

Assim, mediante a análise que realizamos no artigo de Mikami, concluímos que Kowa parece ter usado o conhecimento a respeito dos Quadrados Mágicos para sistematizar sua operação *sbajo* e utilizado a

3 Os Quadrados Mágicos vêm sendo estudados no Oriente desde 2.200 a.C. Tais quadrados compreendem uma disposição de números em colunas e linhas, sendo o número de colunas igual ao número de linhas, de modo que a soma de cada linha ou de cada coluna, ou mesmo das diagonais, resulta num mesmo valor, observando que no quadrado não há repetição de numerais.

Análise Combinatória – especialmente a Permutação – para sistematizar a operação *kosbiki*. Desse modo, ressaltamos a importância da preexistência de elaborações matemáticas no auxílio do desenvolvimento de novas idéias e resolução de problemas, cujos resultados servirão para outras ainda, como numa espiral criativa, favorecendo assim cada vez mais a construção do conhecimento científico.

Queremos ressaltar que no trabalho desenvolvido por Kowa reconhecemos como elementos teóricos conceituais inovadores a criação de uma operação matemática que elimina valores desconhecidos de um sistema de equações (atualmente empregada para encontrar valores desconhecidos de um sistema de equações, além de apresentar outras finalidades também) e a utilização dos Quadrados Mágicos e da Análise Combinatória na estrutura do processo da criação da operação.

No Ocidente, o primeiro registro de um método similar ao utilizado atualmente na Teoria de Determinantes, foi encontrado no trabalho desenvolvido por Gottfried Wilhelm Leibniz, o qual abordaremos a seguir.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Assim como Kowa, Leibniz também consegue vislumbrar a idéia fundamental da operação dos Determinantes a partir de operações realizadas com equações algébricas, no ano de 1693, ou seja, dez anos depois.

De acordo com Smith (1929, p.267), Leibniz enviou duas cartas a L'Hospital tratando desse assunto. A primeira, datada de 28 de abril de 1693, foi publicada pela primeira vez no *Leibnizens Mathematische Schriften*, editado por Von C. I. Gerhardt, 1 e. Abth., Band II, pp. 238-240, na cidade de Berlim, no ano de 1850. Já a segunda foi publicada pela primeira vez no ano de 1863, num volume subsequente do trabalho supracitado, ou seja, na 2 e. Abth, Band III, pp. 5-6, em Halle.

Primeira correspondência

Em sua primeira correspondência, Leibniz fez um comentário sobre a dificuldade que o marquês de L'Hospital manifestou em utilizar números em vez de letras, ao trabalhar com generalizações, argumentando que existem até algumas vantagens na utilização dos números. Ele comentou que ao realizar uma generalização, é possível utilizar números,

como 2 ou 5, em vez de letras a ou b , desde que eles não sejam compreendidos como números que integram a operação, ou seja, a operação 2.5 não representa 10, mas sim indica simplesmente 2.5, como se fossem $a.b$.

Leibniz usava com frequência números em lugar de letras, principalmente em cálculos longos e difíceis, pois achava mais conveniente conferir os cálculos deste modo, além de parecer-lhe mais vantajoso para uma análise das operações. Leibniz, inclusive, relata no primeiro parágrafo dessa correspondência que a utilização dos números abre caminho para a descoberta extraordinária da relação entre a magnitude e a sua representação.

Na tentativa de esclarecer melhor sua idéia, Leibniz utiliza o exemplo de um sistema composto por três equações lineares e dois valores “desconhecidos”, identificados atualmente como incógnitas (Leibniz apud Smith, 1929, p. 268).

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Com o objetivo de encontrar uma lei geral que lhe permitisse eliminar os desconhecidos, ele explica que esses números são na verdade “falsos números” de dois dígitos, sendo que o primeiro deles informa a equação e o segundo informa a letra da qual faz parte. Veja que Leibniz expõe a versatilidade do uso dessa sua notação.

O matemático comenta também que, realizando os cálculos necessários para a eliminação dos desconhecidos, é possível perceber certa harmonia nos elementos resultantes: “Assim, levando a cabo o cálculo, nós encontramos uma harmonia que não só serve como uma prova mas até mesmo nos faz suspeitar, à primeira vista, de algumas regras ou teoremas” (ibid., 1929, p. 268).

Ele justifica essa interpretação mostrando o resultado da eliminação do desconhecido y da primeira e da segunda equação, e posteriormente com a primeira e a terceira equação:

$$\begin{aligned} 10.22+11.22x &= 0 & 10.32+11.32x &= 0 \\ -12.20+12.21x &= 0 & -12.30+12.31x &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Leibniz manifesta uma busca contínua por regularidades, argumentando que é fácil perceber que as duas “resultantes”⁶ expostas em (13) diferem num único aspecto, ou seja, na segunda resultante é possível notar que o termo “3” ocupa o lugar do termo “2” na primeira resultante.

$$\begin{array}{rcl} 10.22+11.22x = 0 & 10.32+11.32x = 0 & \\ -12.20+12.21x = 0 & -12.30+12.31x = 0 & \end{array} \quad (14)$$

Outro fator que ele ressalta é que, em ambas resultantes, os primeiros “números” são semelhantes:

$$\begin{array}{rcl} 10.22+11.22x = 0 & 10.32+11.32x = 0 & \\ -12.20+12.21x = 0 & -12.30+12.31x = 0 & \end{array} \quad (15)$$

Por último, Leibniz chama a atenção para o fato de que os “números” posteriores apresentam a mesma soma:

$$\begin{array}{rcl} 10.22+11.22x = 0 & 10.32+11.32x = 0 & \\ -12.20+12.21x = 0 & -12.30+12.31x = 0 & \\ \hline & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} & \\ & \hline & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} & \end{array} \quad (16)$$

Prosseguindo com sua operação, Leibniz elimina o desconhecido x das resultantes em (13), realizando as simplificações necessárias e chegando ao resultado:

$$10.21.32+11.22.30+12.20.31 = 10.22.31+11.20.32+12.21.30 \quad (17)$$

Essa notação foi utilizada por Thomas Muir em suas notas. Já Smith apresenta uma notação diferente em seu *Source Book in Mathematics* (1929, p. 269):

$$\begin{array}{rcl} 1_0 2_1 3_2 & 1_0 2_2 3_1 & \\ 1_1 2_2 3_0 & = & 1_1 2_0 3_2 \\ 1_2 2_0 3_1 & & 1_2 2_1 3_0 \end{array} \quad (18)$$

Com tal resultado, Leibniz comenta que, após um longo processo, chega-se ao resultado esperado, livre dos desconhecidos e que “leva sua

4 Tomamos aqui a liberdade de utilizar o termo “resultante” e não o termo “equação” como usou Leibniz (Smith, 1929, p. 268), pois entendemos que em (13) há duas resultantes de operações efetuadas com equações do 1º grau.

própria prova junto consigo, da harmonia observável” (ibid., p. 269). Comenta também que seria um tanto quanto difícil atingir este resultado utilizando letras como a , b e c , principalmente se houvesse um grande número de letras e de equações.

Nesse parágrafo acima, é possível notar que, pela segunda vez em sua carta, Leibniz faz referência ao termo “harmonia”. Esse é um termo característico de sua obra, pois sua visão de mundo é fundamentada em uma concepção filosófica que admitia a possibilidade de existência de diversos mundos. Porém Deus, ao conceber o nosso, teria escolhido de todos os mundos possíveis o mais harmonioso, que acolhesse as combinações perfeitas. Tal concepção pode ser constatada na dissertação *Sobre a Arte Combinatória*, publicada em 1666, na qual vinculava a Filosofia à Matemática.

Ainda nessa primeira correspondência, Leibniz chega a enunciar um *teorema geral* (grifo do autor), para qualquer número de desconhecidos e de equações simples, sugerindo que essa busca por coeficientes livres de incógnitas pode ocorrer em outras situações:

Dado qualquer número de equações que é suficiente para eliminar as quantidades desconhecidas que não excedem o primeiro grau:- para a equação final serão levadas, primeiramente, todas as possíveis combinações de coeficientes, no qual um coeficiente somente de cada equação entra; num segundo momento, depois que essas combinações são colocadas no mesmo lado da equação final, apresentam sinais diferentes se eles tiverem muitos fatores semelhantes como é indicado pelo número que é subtraído antes que o número de quantidades desconhecidas: o resto tem o mesmo sinal. (Ibid., p. 269)

Leibniz enuncia esse teorema fundamentado no resultado obtido em (17), e não no processo que ele realiza até chegar a esse resultado. É possível perceber também que o teorema apresenta-se um tanto quanto confuso, principalmente com relação aos sinais. Tal fato, provavelmente o tenha levado a escrever uma segunda correspondência para L’Hospital, com o intuito de esclarecer melhor seu teorema geral, dando-lhe uma explicação plausível.

Segunda correspondência

Embora Leibniz tenha enunciado um *teorema geral* em sua primeira correspondência, na segunda carta ele enuncia separadamente a regra para eliminar o desconhecido, e a lei para os sinais. Portanto, reforça o teorema deduzido na primeira carta, e o deixa mais evidente, colocando inclusive um exemplo.

Leibniz comunica a L'Hospital, o fato de ter encontrado uma regra para eliminar os desconhecidos de qualquer sistema composto por equações do primeiro grau, desde que a quantidade de equações exceda em *um* o número de desconhecidos, por exemplo, três equações com dois desconhecidos (ibid., p. 269).

Regra:- Faça todas as possíveis combinações dos coeficientes das letras, de tal modo que mais de um coeficiente do mesmo desconhecido e da mesma equação nunca apareça junto (isto é, na mesma combinação). Estas combinações são colocadas juntas, sendo que seus sinais serão estabelecidos conforme a norma que logo será dada, e o conjunto de resultado igual a zero dará toda uma equação livre de desconhecidos. (Ibid., p. 269)

Lei dos sinais:- Para uma das combinações um sinal será arbitrariamente designado, e as outras combinações que diferem desta primeira com respeito a dois, quatro, seis, etc., fatores levarão o sinal oposto: esses que diferem daqueles com respeito a três, cinco, sete, etc, fatores claro que levarão seu próprio sinal. (Ibid., p. 270)

Por exemplo, permita

$$10+11x+12y=0, \quad 20+21x+22y=0, \quad 30+31x+32y=0; \quad (19)$$

este resultará

$$\begin{aligned} &+10.21.32-10.22.31-11.20.32 \\ &+11.22.30+12.20.31-12.21.30 \end{aligned} = 0 \quad (20)$$

Eu também considero como coeficientes esses fatores que não pertencem a quaisquer desconhecidos, como 10, 20, 30. (Ibid.)

Em função da análise realizada, não temos dúvida da contribuição de Leibniz para a Álgebra. Essa afirmação é corroborada por Smith (1929, p. 267), que na primeira correspondência ressalta o fato de esse matemá-

tico introduzir uma nova notação numérica; ao nosso ver, essa afirmação pode ser constatada em (20). A outra contribuição refere-se ao estabelecimento de uma regra para escrever a resultante de um conjunto de equações lineares, livre dos desconhecidos, exposta no final da segunda correspondência. Ressaltamos também a existência de uma *lei dos sinais* (grifo nosso) para as combinações resultantes da regra.

Queremos destacar, além dessas, uma terceira contribuição desse trabalho, no que diz respeito ao estabelecimento que Leibniz faz da relação entre a Análise Combinatória e os Sistemas Lineares, até então inexistente. Essa relação fica evidente principalmente quando Leibniz começa a enunciar a regra, no final de sua segunda correspondência “Faça todas as possíveis combinações dos coeficientes das letras, de tal modo que mais de um coeficiente do mesmo desconhecido e da mesma equação nunca se apareça junto [...]”. Nesta passagem, é nítida a necessidade da utilização de um outro conhecimento matemático, no caso a Análise Combinatória, para a sistematização de seu teorema.

Com relação aos elementos teóricos conceituais inovadores do trabalho desenvolvido por Leibniz, o que se destaca é a criação de uma operação matemática que elimina valores desconhecidos de um sistema de equações e o reconhecimento da utilização da Análise Combinatória na estrutura do processo da criação de tal operação.

Educação Matemática e o enfoque histórico-filosófico

Nossa intenção é buscar metodologias e estratégias alternativas para trabalhar conteúdos em sala de aula capazes de motivar os alunos, envolvendo-os em um clima propício para a aprendizagem do assunto matemático; de oferecer condições de respostas a questionamentos de *como, onde, por que e quando* o assunto estudado estruturou-se; e de entender o grau de importância de tal assunto no mundo contemporâneo e no âmbito escolar.

Muitas dessas indagações permanecem no cotidiano das salas de aula. Provavelmente, tal situação exista em virtude do predomínio da concepção formalista, que enfatiza a estrutura e a organização lógica dos assuntos estudados, não oferecendo oportunidade para uma reflexão crítica e uma análise contextualizada historicamente.

Em consequência da influência de tal concepção, grande parte dos livros didáticos aborda inicialmente o conteúdo de Matrizes, em seguida

Determinantes, e por último apresentam os Sistemas de Equações Lineares. Entretanto, como pudemos constatar na investigação histórico-filosófica apresentada, a humanidade, na tentativa de solucionar determinados problemas que envolviam Sistemas de Equações, desenvolveu generalizações e métodos para resolvê-los, os quais, posteriormente, solidificaram-se como teorias matemáticas, das quais destacamos os Determinantes e as Matrizes.

Acreditamos que os motivos que levaram alguns matemáticos do passado a desenvolverem estudos também possam motivar os educandos atualmente. O acesso à investigação histórica permite conhecer filosófica e conceitualmente alguns assuntos matemáticos, tais como o seu surgimento e desenvolvimento, o processo de sua sistematização, seu(s) criador(es), entre outros aspectos.

A reflexão, do ponto de vista filosófico, sobre tal investigação permite a análise crítica, tanto por parte do educador, quanto do educando. Entender por que determinado matemático desenvolveu uma teoria e séculos depois essa mesma teoria contribui de maneira decisiva para a organização e o desenvolvimento de alguns setores da sociedade atual parece ser um estímulo plausível para conhecê-la histórica e filosoficamente.

O acesso dos educandos à investigação histórica dá possibilidade de um estudo de qualidade. No entanto, a orientação do material é de fundamental importância, o que torna indispensável o trabalho do professor no sentido de instigar nos educandos a análise crítica e conduzir à reflexão do estudo em questão.

Mas como trabalhar a investigação histórico-filosófica em sala de aula?

Nosso objetivo não é reconstruir com os educandos todo o processo desenvolvido pelos matemáticos no decorrer do tempo, mas sim lhes apresentar situações que os instiguem a buscar um caminho que os conduza à solução de questões.

Iniciar o estudo a partir de um problema que contextualize uma situação corriqueira dos alunos pode estimular a sua curiosidade, levando-os a buscar uma solução. O enfrentamento de situações desse tipo tem conduzido muitos estudiosos a produzir conhecimento matemático no decorrer do tempo para a humanidade.

É possível vislumbrar a veracidade de tal afirmação em uma rápida investigação histórica, ao constatar a existência de problemas que

datam de dois ou três séculos a. C., os quais abordam questões relacionadas à agricultura. Como exemplo, podemos citar alguns problemas encontrados em registros de origem babilônia e chinesa.

Diversos métodos foram criados para solucioná-los, cada um apresentando características peculiares, de acordo com o conhecimento e a habilidade de seu criador. Alguns desses métodos são bem práticos e, portanto, viáveis de serem trabalhados em sala. Conhecer o desenvolvimento histórico de um determinado assunto como, por exemplo, dos Sistemas de Equações Lineares, pode viabilizar a escolha didática de métodos que melhor satisfazem aos anseios não só do educador como também dos educandos, pois a história é fonte de soluções alternativas.

Tendo como objetivo, por exemplo, *encontrar a solução* de um problema que culmine num Sistema de Equações Lineares, o método de Comparação desenvolvido pelo indiano Brahmagupta (598 – 668) e o sistematizado pelo alemão Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), denominado método de Eliminação, são métodos práticos, de fácil resolução, e apresentam processos de resolução parecido com métodos já conhecidos pelos educandos no Ensino Fundamental. Portanto, apresentam-se como métodos interessantes para serem trabalhados em sala de aula.

Assim como os métodos acima citados foram criados, outros estudiosos com o objetivo de *eliminar os valores desconhecidos* (incógnitas) de um Sistema de Equações também desenvolveram métodos para tal. O primeiro matemático a desenvolver esse processo, como vimos na investigação histórica, foi Seki Kowa, seguido por Leibniz, que o fez independentemente.

Em ambos os casos acima citados (encontrar a solução de um problema e eliminar valores desconhecidos de um sistema de equações), é possível perceber que o que impulsiona alguém a produzir um estudo é o enfrentamento de um problema, tal como é explanado na filosofia da ciência. Podemos constatar que o resgate histórico da pesquisa é também o resgate do fazer matemático, com uma explicitação mediante a discussão filosófica.

Acreditamos, assim como Laudan, que a ocorrência do ensino e da aprendizagem e, conseqüentemente, da evolução da ciência pode se dar pela capacidade de resolução de problemas com os quais os educandos e os educadores se deparam. Assim, os problemas que levaram Seki Kowa e Leibniz a desenvolver a mesma operação para eliminar incógnitas de um sistema de equações, os quais denominaremos de *problemas geradores*,

tomam lugar de destaque segundo nosso estudo, pois foi a partir do enfrentamento deles que uma nova concepção teórica surgiu.

Como colocamos anteriormente, Laudan comenta que um conjunto de idéias só pode ser compreendido quando permite o conhecimento detalhado dos problemas aos quais ele foi dirigido (Laudan, 1977, p. 175-176). A abordagem histórico-filosófica permite o acesso a tal compreensão, pois possibilita conhecer os problemas geradores, o contexto histórico em que cada um estava inserido e a tradição de pesquisa (estrutura teórico-metodológica) a que os matemáticos estavam sujeitos. Desse modo, a abordagem defendida neste artigo contempla de maneira satisfatória o objetivo não somente de Laudan, com também das autoras proponentes.

Embora os problemas apresentem contextos diferentes, o conhecimento da reflexão e da análise que esteve presente no pensamento dos pesquisadores ao desenvolverem seus estudos, séculos atrás, ou seja, o conhecimento da estrutura e das articulações produzidas pelo pesquisador em seu estudo pode não somente saciar a curiosidade dos educandos como também ajudá-los a aprender sobre o que existe, como existe, porque existe.

Esse aspecto filosófico, tão ausente das salas de aula atualmente, pode fundamentar o trabalho desenvolvido pelos educadores. Tal enfoque filosófico apresenta-se como essencial na estrutura de qualquer atividade produzida, pois leva a reflexões tais como: Como agir em determinada situação? Como analisar os dados disponíveis? Alguém já se deparou com uma situação parecida como esta? Em caso afirmativo, como resolveram a questão? Há uma solução mais prática atualmente para solucioná-la?

É interessante notar que o fio condutor de tais reflexões começa a ser tecido pelo educador, então, é de fundamental importância que ele realize questionamentos como esses. Tal caracterização pode causar inicialmente uma certa insegurança; porém, é no surgimento de questões como essas e de reflexões oriundas desse tipo de trabalho que reside a dinâmica do trabalho educacional.

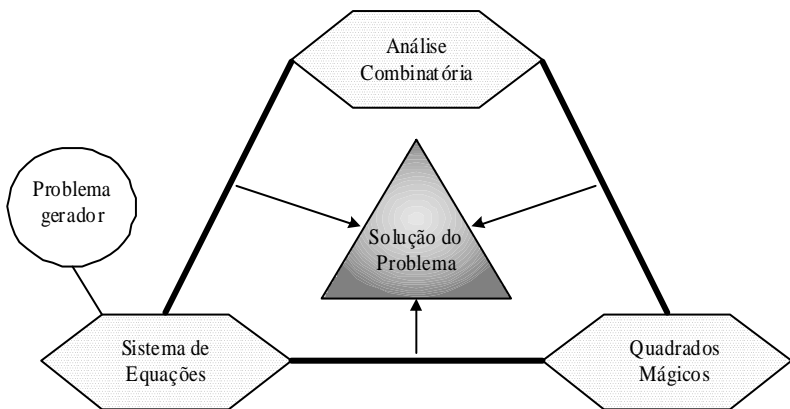
Na investigação histórica desenvolvida no item anterior é possível notar que Seki Kowa, envolvido com um problema geométrico e com o intuito de solucioná-lo, se deparou com uma série de sistemas de equações e, conseqüentemente, com um novo problema: Como simplificar tais sistemas? Com tal dificuldade o pesquisador, que havia desenvolvido na mesma época estudos sobre Quadrados Mágicos, os quais envolvem

também a combinação de elementos, cria uma operação que permite eliminar os valores desconhecidos de sistemas compostos por várias equações.

Ao submeter a investigação histórica a um olhar teórico-metodológico é possível perceber que um assunto toma várias formas até sua sistematização. Em alguns momentos, o determinante, entendido como uma operação, foi reconhecido como uma *regra* (assim como Cramer descreveu em sua *Introduction à l'analyses des lignes courbes algebriques*), como uma *resultante* (assim como Vandermond se referiu em sua *Mémoire sur l'élimination*) e também como um *método* (como afirma Lima em sua obra *Álgebra Linear* ou Boldrini et alii em sua obra cujo título também é *Álgebra Linear*) utilizado não só para resolver sistemas de equações como também para calcular áreas, volumes, entre outros.

Em função das variadas formas que um assunto toma a partir de sua criação, a análise ontológica e epistemológica é fundamental para sua sistematização enquanto teoria matemática. Daí a importância do conhecimento da estrutura e da análise das articulações estabelecidas para a constituição do tema estudado.

Conhecendo o trabalho produzido por Kowa, percebe-se que o mesmo encontra-se estruturado em três assuntos e que a articulação entre eles, estabelecida pelo matemático, é que resultou na operação que mais tarde tornou-se conhecida como Determinante.



Esquema 1 – Estrutura do trabalho produzido por Seki Kowa

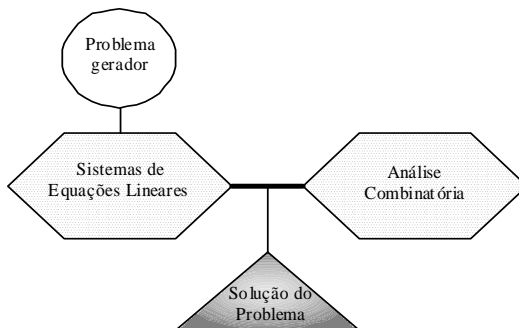
No esquema acima, o problema gerador envolve um assunto da Geometria Espacial. Ao tentar encontrar o lado superior de uma pirâmide truncada de base quadrada, Kowa se depara com uma série de sistemas de equações. Tais sistemas são compostos por várias equações com o mesmo grau, porém, esses sistemas apresentam graus variados. Ao se deparar com diversos sistemas de equações, ele procurou simplificá-los ao máximo para conseguir resolver seu problema inicial.

Como comentamos anteriormente na investigação histórica, Kowa havia desenvolvido estudos relacionados com Quadrados Mágicos, inclusive produzindo generalizações para determinados tipos de quadrados. Podemos constatar que no próprio trabalho com os quadrados é exigida, mesmo que de maneira intuitiva, a habilidade para combinar elementos que estão envolvidos num determinado somatório.

A análise combinatória se faz fortemente presente na obra do matemático, principalmente na operação *koshiki*, em que ele realiza a permutação de equações.

Portanto, a articulação dos assuntos conhecidos atualmente como Quadrados Mágicos, Análise Combinatória e Sistemas de Equações resultou na operação que conhecemos hoje como Determinante. Evidencia-se, assim, como uma análise teórico-conceitual (filosófica) dos elementos colhidos na história é essencial para a explicitação de conhecimentos tácitos que se fazem presentes na estruturação e na articulação de um conhecimento.

Processo semelhante percebe-se na análise do trabalho desenvolvido por Leibniz, porém este o estruturou com número menor de assuntos, o que gerou uma quantidade menor de articulações, mas não menos importante.



Esquema 2 – Estrutura do trabalho produzido por Leibniz

No caso de Leibniz, o problema gerador é a necessidade de mostrar a versatilidade da utilização da notação numérica sobre a algébrica. Ao tentar convencer um amigo, também matemático, Leibniz lança mão de um exemplo, e para tal, toma um sistema composto por três equações lineares.

Como vimos na investigação histórica, Leibniz tinha uma concepção filosófica de mundo que envolvia a Análise Combinatória. A seu ver, tudo no mundo é composto pela combinação de determinados elementos e Deus, ao criá-lo, o fez com as combinações mais perfeitas.

A idéia da combinação de fatores, como podemos ressaltar, se faz presente no trabalho do matemático. Leibniz aliou essa idéia à sua habilidade com cálculos e daí produziu uma regra para eliminar valores desconhecidos de um sistema de equações lineares, ressaltando nela a combinação dos fatores envolvidos no sistema e não o cálculo desenvolvido para atingi-la.

Pode-se observar que Leibniz realiza cálculos para eliminar as incógnitas, deixando registrado o início destes e, posteriormente, fundamentado no resultado alcançado, ele enuncia sua regra articulando-a com a Análise Combinatória. Ele, também, consegue detectar a presença da combinatória universal em sua atividade, porém encontra dificuldade em utilizá-la diretamente para alcançar seus resultados.

Como pudemos notar na análise da produção de Kowa e de Leibniz, conhecer as estruturas de um determinado assunto oportuniza o surgimento de importantes reflexões, como: será que toda produção científica se dá por meio do estabelecimento de articulações? O conhecimento de diversos assuntos dá ao pesquisador uma oportunidade maior de desenvolver um trabalho não-convencional? Conhecer diversos assuntos garante, ao pesquisador, a produção de um trabalho diferenciado, consistente e coeso? A habilidade de estabelecer articulações favorece a criação e o desenvolvimento de tal trabalho?

Tais reflexões no âmbito educacional podem exprimir com clareza, a todos os envolvidos no processo, que o fato de conhecer diversos estudos que resultaram na produção científica atual e, principalmente, de saber estruturá-los e articulá-los, tem permitido à humanidade avançar e evoluir cientificamente.

O conhecimento da estrutura de uma produção científica como a de Leibniz ou de Kowa é de grande importância para qualquer pesquisador ou educador; contudo, há que se refletir sobre a importância de ensiná-

la. Se o objetivo de um educador é centrado somente em como realizar a operação de determinante ou resolver um sistema de equações lineares, por exemplo, não vemos necessidade de trabalhar tal estrutura.

No entanto, se o objetivo for o desenvolvimento de um trabalho mais amplo, que envolva o reconhecimento da importância da criação do assunto estudado ou de qualquer outro para a evolução da humanidade; mostrar como é possível interpretar e intervir em situações reais utilizando a Matemática e ressaltar a importância de conhecer a história e a filosofia da Matemática, evidenciando a contribuição da criação de conhecimentos matemáticos para a evolução da sociedade, entendemos que a apreensão da estrutura dos conteúdos estudados (nos exemplares históricos), assim como da articulação entre eles, é de grande importância, pois atua como uma concretização da meta que o educador pretende alcançar.

Comentários finais

Nesta investigação pudemos perceber que a reconstrução histórico-filosófica possibilita uma aproximação entre o ato criativo de um conhecimento científico e o educando por meio do estudo de problemas envolvidos no ensino e na aprendizagem. Essa aproximação dá-se principalmente pela análise crítica do processo desenvolvido, tanto em relação à estrutura do conhecimento sistematizado, como em relação às articulações existentes no processo cognitivo, realizada no contexto histórico em que o conhecimento foi concebido. Esse fator influencia diretamente a capacidade de resolver um problema, sendo este, de acordo com Laudan, o objetivo essencial da ciência.

Embora o conhecimento matemático denominado Determinante tenha sido sistematizado posteriormente à sua criação e utilizado nos dias atuais com objetivos diferentes do originalmente apresentado pelos matemáticos analisados neste estudo, podemos afirmar que a Análise Combinatória, considerada por nós como elemento fundamental da teoria analisada, permeia e sustenta o método utilizado no cálculo dos Determinantes.

Ao realizar uma análise comparativa entre o trabalho desenvolvido por Seki Kowa e Leibniz, verificamos que o problema gerador do primeiro trata da resolução de um problema geométrico, enquanto que a problemática do segundo matemático refere-se à apresentação da versatilidade do uso da notação numérica sobre a algébrica. Ambos depararam-se com

sistemas compostos por equações em seus estudos e estabelecem o mesmo objetivo, ou seja, *eliminar valores desconhecidos das equações que integram os sistemas*.

A partir daí, os dois matemáticos desenvolvem uma operação que satisfaz tal objetivo, sendo que o primeiro produz sua operação articulando os assuntos de Análise Combinatória e Quadrados Mágicos e, o segundo cria sua operação fundamentada somente no assunto de Análise Combinatória. O conhecimento desses estudos fortalece o trabalho educacional, tanto no processo de ensino quanto de aprendizagem, enriquecendo, assim, a Educação Matemática.

Esse caráter dinâmico proporcionado pela reconstrução histórico-filosófica permitiu, portanto, o acesso à análise das estruturas e das articulações dos processos desenvolvidos por Seki Kowa e Leibniz, tornando possível perceber *como e o quê* levou esses matemáticos, praticamente na mesma época, a desenvolverem a gênese do pensamento que fundamenta a teoria conhecida atualmente como Teoria dos Determinantes.

O mundo contemporâneo tem exigido cidadãos cada vez mais capacitados, que possuam uma visão global e que sejam capazes de analisar seus problemas, de refletir sobre a estratégia mais adequada e de argumentar criticamente sobre as decisões a serem tomadas, pois podem afetar direta ou indiretamente não só a comunidade em que estão inseridos, mas a todo o planeta.

O resgate histórico, quando realizado com enfoque filosófico, propicia a ampliação de tal visão, pois, conhecendo como e por que determinados povos em determinadas épocas resolveram seus problemas, pode-se compreender que é intrínseco à capacidade humana superar os problemas e os desafios que lhes são impostos; todavia, dependendo da maneira como são abordados, suas soluções podem ser obtidas rapidamente ou demorar séculos para serem alcançadas.

Concordamos com os autores pesquisados neste trabalho, que sustentam que uma abordagem histórica feita de maneira apropriada pode contribuir para que ocorra uma melhora no ensino; contudo, acreditamos que tal abordagem aliada à filosófica, ou seja, uma abordagem histórico-filosófica pode contribuir ainda mais para o alcance de um resultado positivo não só no ensino, como também na aprendizagem.

Procuramos, ao longo das páginas de nossa pesquisa, mostrar que essa abordagem pode ser considerada tanto um campo de investigação teórica como uma opção metodológica da qual a área educacional, principalmente a Educação Matemática, pode dispor para trabalhar.

Acreditamos que a abordagem histórico-filosófica pode apresentar resultados bastante satisfatórios no campo educacional se trabalhada de maneira adequada,⁷ pois ela é capaz de instigar a curiosidade dos envolvidos no trabalho, levando-os a conhecer aspectos pertinentes à estrutura do assunto estudado, reconhecer as articulações que o mesmo estabelece ao efetivar sua sistematização, funcionar como um fio condutor dos raciocínios, como um elemento na estrutura didática que favorece a cognoscibilidade dos conteúdos, que justifica racionalmente a coordenação didática desses, estabelecendo-se no próprio corpo integrado das estruturas de ensino e, como pretendemos, de aprendizagem. Esses objetivos alcançados por meio da análise crítica e reflexiva podem conduzir os envolvidos no processo educacional a uma ampliação ou até mesmo a uma mudança de visão de mundo.

Referências

- BATISTA, I. L. (1998). *A elaboração e os desdobramentos da Teoria Universal de Fermi*. In: VI ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA. *Atas VI EPEF (CD-ROM)*. Florianópolis.
- _____. (2000). *A universalização de teorias e o ensino da Física do século XX*. In: VII ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA. *Atas (CD-ROM)*. Florianópolis.
- _____. (2004). *O ensino de teorias físicas mediante uma estrutura histórico-filosófica*. In: IX ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA. *Atas (CD-ROM)*. Florianópolis.
- BOLDRINI, J. L. et alii (1980). *Álgebra linear*. 3 ed. ampliada e revista. São Paulo, Harper & Row do Brasil/Unicamp.
- CAJORI, F. (1991). *A history of mathematics*. 50 ed. New York, Chelsea Publishing Company.
- EVES, H. (1997). *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 2 ed. Campinas, Unicamp.
- FRIED, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, n. 10, pp. 391-408.

5 Um exemplar de proposta feita com os cuidados que consideramos adequados para a Educação Matemática no Ensino Médio, para essa aplicação, pode ser consultado em Luccas (2004).

- GERHARDT, C. I. (1992). "Leibniz – Vida e obra". In: LEIBNIZ, G.W. *Novos ensaios sobre o entendimento humano*. Tradução de Luiz João Baraúna. 5 ed. São Paulo, Nova Cultural (Col. Os Pensadores).
- LAUDAN, L. (1977). *Progress and its problems: towards a theory of scientific growth*. Routledge & Kegan Paul, London en Henley.
- LEIBNIZ, G.W. (1929). "Cartas I e II à L'Hospital". In: SMITH, D. E. *Source book in mathematics*. 1 ed. 4 impression. New York and London, Mcgraw Hill Book Company.
- _____. (1992). *Novos ensaios sobre o entendimento humano*. Tradução DE Luiz João Baraúna. 5 ed. São Paulo, Nova Cultural (Col. Os Pensadores).
- LIMA, E. L. (1996). *Álgebra Linear*. 2 ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Aplicada, CNPq, Coleção Matemática Universitária.
- LUCCAS, S. (2004). *Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: apresentação de uma proposta pedagógica*. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina.
- MATTHEWS, M. R. (1995). História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. *Science & Education*, v. 1, n. 1, p. 11-47. Tradução de Andrade, C. M.
- MIGUEL, A. (1993). *Três estudos sobre história e educação matemática*. Tese de doutorado, Faculdade de Educação, Unicamp.
- MIKAMI, Y. (1913). *The development of mathematics in China and Japan*. New York, N.Y., Chelsea Publishing Company.
- POPPER, K. R. (1982). *Conjecturas e refutações: o progresso do conhecimento científico*. Tradução da 4ª edição, revista, 1972 – original 1963. Brasília, Ed. Universidade de Brasília.
- SMITH, D. E. (1929). *Source book in mathematics*. 1 ed. 4 impression. New York and London Mcgraw Hill Book Company.
- VIANNA, C. R. (1995). *Matemática e história: algumas relações e implicações pedagógicas*. Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação, USP.
- ZÚÑIGA, A. R. (1990). "Sobre la enseñanza de la historia de las matemáticas: ideas de metodo. Las Matemáticas en Costa Rica". In: TERCER CONGRESO NACIONAL DE MATEMÁTICA. Memorias, San José-Costa Rica, oct.

Recebido em maio/2004; aprovado em jun./2004