Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

Utilizando a Torre de Hanói para Promover Momentos de Dedução

Using the Tower of Hanoi to Promote Moments of Deduction

Saulo Silva Gusmão Filho[1]

Resumo

A matemática é considerada por muitos estudantes como uma matéria difícil e cansativa de ser aprendida. Foi justamente com o ensino tradicional e suas aulas expositivas que essas denominações foram ampliadas. Este artigo, cuja pesquisa pode ser classificada como exploratória e, ao mesmo tempo, descritiva de natureza aplicada, utiliza o método qualitativo, no qual é aplicada a técnica de análise de conteúdo segundo o pressuposto por Minayo (2007, p. 316 apud GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.84), visando apresentar uma proposta para a utilização da Torre de Hanói como base para o ensino e desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos, tais como sequência recursiva, funções, progressões e conversão de unidades de tempo. Este estudo foi desenvolvido de forma que os discentes possam formular hipóteses, fazer e validar conjecturas, observar e tentar encontrar relações com os dados recolhidos e deduzir fórmulas, proporcionando, dessa forma, a socialização entre os alunos, com momentos de aprendizagem compartilhada e desenvolvendo, nos mesmos, um novo olhar e uma nova forma de "pensar matemática". Esta experiência ocorreu com alunos do terceiro ano da escola EREM Padre Osmar Novaes da cidade de Paulista, PE e obteve êxito nas propostas mencionadas, com destaque para os momentos de aprendizagem compartilhada.

Palavras-chave: Jogos matemáticos. Torre de Hanói. Dedução. Abordagem Investigativa.

Abstract

Mathematics is considered by many students as a difficult and latent subject to be learned, and together with traditional teaching and its lectures that these denominations have been enlarged. This article, whose research can be classified as exploratory and at the same time descriptive of applied nature, using the qualitative method, where the technique of content analysis is applied according to the assumption of Minayo (2007, p. 316 apud Gerhardt and Silveira), 2009, p.84), presenting a proposal to use the Tower of Hanoi, as a basis for teaching and developing different mathematical concepts, such as recursive sequence, functions, progressions and conversion of time units. So that students can forma hypotheses, make and validate conjectures, observe and try to find relationships with the data collected and deduce formulas, providing, this way, a socialization among students, with moments of shared learning and developing, in them, a new look and a new way of thinking mathematics. This experience occurred with the third year students of the EREM Padre Osmar Novaes school in the city of Paulista, PE, succeeding the aforementioned proposals, with emphasis on moments of shared learning.

Keywords: Mathematical games. Tower of Hanoi. Deduction. Investigative Approach.

Introdução

A matemática é de extrema importância para a sociedade quando tratamos de seus avanços tecnológicos e descobertas científicas. Em poucos exemplos, pode-se dizer que ela é essencial no processo de construção do cidadão além de fornecer a base para o aprendizado das ciências da natureza, como a física, a química, e a biologia, sem contar com suas demais aplicabilidades. Tendo tal importância essa ciência deveria ser ensinada como afirma Piaget:

[1] Graduado em Licenciatura em Matemática; Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, Recife, Pernambuco, Brasil; sauloggf@gmail.com.

> Conduzindo à compreensão e não à memorização, desenvolvendo um espírito criativo e não repetitivo. O professor deveria criar situações que levem o discente a encontrar a solução correta, de acordo com o seu nível de desenvolvimento psicogenético, através de trabalhos práticos individuais ou em grupo, de diálogo entre colegas ou com o professor. (PIAGET, 1972 apud SOUSA, 2004, p. 15).

O presente trabalho trata de um relato de experiência, ocorrido na escola EREM Padre Osmar Novaes em Paulista - PE, com alunos de duas turmas do terceiro ano do ensino médio, e visa mostrar como a Torre de Hanói pode ser utilizada para o ensino de diversos conceitos matemáticos, como funções, potência, sequências e conjuntos, relações de recorrência, unidades de tempo e suas conversões, além das progressões aritmética e geométrica. Este trabalho também busca ressaltar como foi possível, por meio desta atividade, proporcionar a prática da dedução, de modo que os estudantes puderam formular hipóteses e prever resultados, fazer e validar conjecturas, experimentar e recorrer a esboços, a fatos conhecidos e propriedades, além de proporcionar aos alunos desafios que resultaram desses processos.

Primeiramente, o trabalho apresentará o referencial teórico, expondo a base para a pesquisa e construção da aula, explicando o conceito de jogo e sua importância frente ao modelo tradicional de ensino. Logo em seguida, falará do desenvolvimento do projeto e como ele foi dividido, passando para a sua execução, ocasião em que será relatada, em cinco partes, toda a experiência, desde a sua apresentação para os discentes até a realização do desafio final, com observações feitas a cerca de cada etapa para, em seguida, expor as conclusões realizadas com base nas referências utilizadas.

Referencial Teórico

A educação se renova, também, devido às mudanças que o mundo sofre, e, desse, modo surgem abordagens e estratégias de ensino que buscam caminhar ao lado das novas tecnologias ou maneiras de pensar a educação, tais como a abordagem investigativa e o uso de jogos ou materiais manipuláveis em sala de aula.

Essas mudanças levam ao avanço gradativo de novas maneiras de ensinar matemática, que, por ser considerada uma das disciplinas mais difíceis, ainda tende a conduzir um sentimento de aversão nos discentes. Sentimento este que pode ser explicado devido à forma mecânica e expositiva na qual esta disciplina vem sendo exposta aos estudantes, resumindo-se a um conjunto de regras e fórmulas para serem memorizadas, uma vez que o método utilizado par ensiná-la dá mais importância à memorização do que à construção do seu conhecimento.

Roque (2012, p. 30), em seu livro História da Matemática, inicialmente apresenta um motivo que explica a razão pela qual a matemática é considerada abstrata ou difícil, e esse motivo reside em como ela é ensinada.

De acordo com a autora, a matemática, na maioria das vezes, é ensinada de forma expositiva. Os conceitos, definições ou teoremas são simplesmente expostos em sua forma final aos discentes, sem as menções ao seu processo de desenvolvimento, seus motivos ou os caminhos que levaram seus desenvolvedores as suas conclusões. Vê-se tudo já finalizado e seu ensino segue um mesmo modelo: primeiro temos as definições, depois as demonstrações e, por fim, as aplicações.

O uso de jogos e materiais manipuláveis em sala de aula apresenta-se, então, como uma forma de facilitar o ensino e a aprendizagem da própria matemática, possibilitando a interação e a cooperação entre os próprios discentes, que se expande até o professor, proporcionando a socialização, além de permitir o conhecimento das regras e a construção do respeito às mesmas, o que gera, e também melhora o aprendizado de forma construtiva e natural, ao passo de que resolver problemas, pensar, dialogar e criar auxilia no desenvolvimento do senso crítico.

Como dito por Moura (2011), no livro Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação:

> O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que pouco a pouco será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados culturais para os conceitos matemáticos e estudo de novos conteúdos. (MOURA, 2011, p. 95).

Assim, o desenvolvimento de formas distintas de atuação dos jogos, de certo modo, deixará a disciplina mais “leve”, permitirá que os discentes comecem a se interessar mais pela Matemática e tenham, não somente um bom aprendizado, mas também prazer em estudar os conceitos que vierem a ser apresentados.

Nunca é demais insistir, sob a análise de outros resultados que, uma vez que o próprio Currículo Nacional do Ensino Básico (Brasil, 2001) cita que “a prática de jogos, em particular dos jogos de estratégia, de observação e de memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social”, contribui para a correta afirmação de que os jogos são de grande importância e utilidade para o ensino da matemática e, também, de outras ciências.

No presente trabalho, o “jogo” é definido como afirma Huizinga em:

> uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da "vida quotidiana". (HUIZINGA, 2000, p. 24).

E em se tratando dos materiais manipuláveis, segue-se a ideia de Reys (1981) que afirma que eles são "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que tem aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". (REYS, 1981, p. 551).

O ensino por investigação segue, dessa forma, como aliado dos jogos no ensino da matemática, tentando tornar os estudantes participantes da ação de desenvolver os conceitos, teoremas ou definições com a orientação do professor. Desse modo, eles são convidados a formular hipóteses, conjecturas, fazer registros, ou seja, investigar e deduzir, interpretar resultados, dados ou informações obtidos, realizando demonstrações para, então poder compreender de forma mais ampla e profunda os temas abordados.

Nesse sentido, Anna Carvalho (2013) diz que:

> No ensino expositivo toda a linha de raciocínio está com o professor, o aluno só a segue e procura entende-la, mas não é o agente do pensamento. Ao fazer uma questão ou propor um problema o professor passa a tarefa de raciocinar para o aluno e sua ação não é mais a de expor, mas a de orientar e conduzir os estudantes na construção do conhecimento. (CARVALHO, 2013, p. 5).

Para Carvalho (2013), o ensino por investigação não pretende fazer com que os alunos pensem e se comportem como cientistas, pois, segundo ela, eles não têm idade, conhecimento ou desenvoltura no uso das ferramentas científicas para tal realização. O que a pesquisadora pretende, e que também é pretendido na investigação proposta, é criar um ambiente investigativo em sala de aula, de forma que possa conduzir os alunos num processo simplificado do trabalho científico.

Apesar de tudo o que foi exposto, é fundamental ressaltar que as ideias aqui preconizadas não pedem pela extinção do método de ensino tradicional, tendo em vista que todos os assuntos dependerão do aluno e se ele pode ou não se familiarizar com o modelo de ensino proposto. Deve-se sempre lembrar que o professor precisa ter uma prática reflexiva e que ela leva a entender que os alunos não são iguais e, portanto, não podemos exigir que um único método de ensino torne-se válido para todos.

Desenvolvimento do Projeto

Devido às características da pesquisa, parece ser adequado classificá-la como exploratória e, ao mesmo tempo, descritiva de natureza aplicada. Exploratória porque partiu de uma revisão preliminar de pesquisas sobre os jogos na educação, ensino da matemática e a abordagem investigativa. E descritiva porque usufrui da pesquisa de campo para compreender e analisar, de forma clara, como a abordagem investigativa funciona na prática e se os projetos desenvolvidos, durante a pesquisa, poderão servir, da melhor forma possível, para alcançar os objetivos propostos.

Utilizando o método qualitativo, em que é aplicada a técnica de análise de conteúdo, segundo o pressuposto por Minayo (2007, p. 316 apud GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 84), o estudo aborda a técnica em três fases: a pré-análise, em que ocorrerá a organização do que será analisado por meio de várias leituras: a exploração material e tratamento dos resultados, os quais serão interpretados à luz do quadro, segundo aspectos éticos. Além disso, será feito o uso dos procedimentos de pesquisa bibliográfica, em que se realizarão levantamentos de referências publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos e páginas de *web sites*.

O objetivo geral do projeto foi proporcionar, por meio da Torre de Hanói, o aprendizado e a revisão de alguns conceitos matemáticos, como as funções, a potenciação, os conjuntos, as sequências e as relações de recorrência, unidades de tempo e suas conversões, incluindo as progressões aritmética e geométrica. Além disso, buscou-se proporcionar a formulação de hipóteses, fazer e validar conjecturas por meio da experimentação, recorrendo a modelos, esboços e propriedades. Para tanto, o projeto foi desenvolvido em quatro partes:

- apresentação da Torre de Hanói;
- acompanhamento, respondendo às perguntas e dúvidas;
- obtenção de dados e observação de relações encontradas manipulando a Torre;
- introdução dos conceitos e dedução de fórmulas.

Nessa última parte, foram apresentados problemas para serem respondidos pelos alunos, que poderão ser modificados para se adequar da melhor forma possível ao público. No final, foram realizadas observações extras e novos desafios a respeito do jogo, que podem ser trabalhados com os alunos após o domínio do jogo.

A execução do projeto

Apresentação da Torre de Hanói

Primeiramente, a Torre de Hanói foi apresentada aos alunos e, em seguida eles foram divididos em grupos. E, então, foi explicado o que é a torre, sua história de origem e as regras de como jogá-la, para que, dessa forma, pudessem manipular o jogo.

O objetivo do jogo é o de transferir todos os discos de uma estaca para a outra (**não importa qual**), com o menor número de movimentos possíveis, sem colocar um disco maior sobre o menor.

Após a apresentação, foi solicitado aos alunos que preparassem o celular para receber um emulador com o jogo, pois não havia torres em número suficiente para todos os grupos. O emulador é disponibilizado por Johan Moller no *Google Play* (https://play.google.com/store/apps/details?id=johan.moller.towerofhanoi&hl=pt_BR) e mesmo sem acesso a *internet*, por meio do *Bluetooth*, ele pôde ser transferido aos alunos. O compartilhamento durou cerca de 10 minutos. Os alunos sem celular ou os que tinham, mas apresentaram falha no momento da transferência do emulador, formaram grupos com os que conseguiram instalá-lo.

Após a introdução todos já estavam entusiasmados e jogando. Eles apenas apresentaram dúvidas sobre em qual estaca as peças deveriam estar no término do jogo. As demais dúvidas foram em relação às regras, mas foram respondidas pelos próprios alunos, dando início a um dos objetivos propostos: proporcionar a socialização do conhecimento entre os discentes, criando momentos de aprendizagem compartilhada.

Eles começaram a discutir sobre a quantidade de movimentos que cada um estava realizando. Nesse momento foi pedido para que anotassem em uma folha de papel a quantidade total de movimentos que estavam sendo realizados com a quantidade de peças.

Acompanhamento

Na segunda etapa da aula, foi prestada assistência aos alunos que ainda estavam com dúvidas e, após erros e acertos, depois que todos se familiarizaram com a Torre de Hanói, foi dada continuidade à aula. Na mesma etapa, cobrou-se dos estudantes que anotassem em um papel a quantidade total de movimentos realizados nas jogadas com uma até quatro peças, para que, no final pudessem comparar com a quantidade mínima de movimentos necessários para vencer o jogo de modo “perfeito”.

Desse modo, pôde-se observar o processo de socialização dos alunos com a aprendizagem compartilhada de maneira clara. No momento em que os alunos não estavam entendendo como jogar pediram assistência aos colegas e todos estavam acompanhando o desempenho de cada um.

Relações entre os dados encontrados. Introdução aos conceitos e início do processo de dedução.

Uma tabela que relaciona a quantidade de discos com a quantidade de movimentos foi desenhada no quadro. No início de seu preenchimento, foi perguntado aos alunos**,** com quantos movimentos ganha-se o jogo com uma até cinco peças. As respostas foram divergentes e algumas muito discrepantes.

Após anotar todos os resultados, foram postas na tabela as quantidades mínimas de movimento de cada peça, completando-a. Para que, em seguida, os estudantes pudessem avaliar se conseguiram mover os discos com a quantidade mínima de movimentos.

Tabela 1 – Relação da quantidade mínima de movimentos pela quantidade de discos.

Número de discos	**Quantidade mínima de movimentos**
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

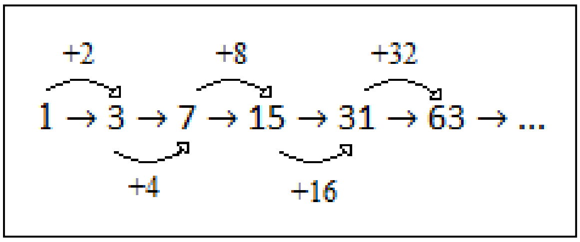
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 1 – Momento da análise de dados.

Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, foi dado início ao processo de análise de dados e proposto um desafio: notar alguma relação entre os números da tabela. Após um curto período de tempo, os dados da tabela foram novamente escritos no quadro; porém, em formato de sequência. E, novamente, pediu-se para que os estudantes procurassem por algum padrão.

Figura 1 – sequência escrita no quadro.



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma das primeiras observações que pode ser feita investigando os resultados da tabela é que o número adicionado ($+\mathbf{2}, +\mathbf{4}, +\mathbf{8}$) é sempre o dobro do anterior e que a quantidade mínima de movimentos ($\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{7}, \dots$) é sempre um a menos do número que foi adicionado. Ou ainda, que o número de movimentos multiplicado por dois, mais uma unidade, é igual à quantidade de movimentos seguinte para finalizar o jogo com n+1 peças.

Muitos alunos foram rápidos e logo perceberam que a sequência poderia se tratar de algum tipo de progressão. Aproveitando a oportunidade, foi explicado o que era uma sequência e sua diferença em relação aos conjuntos numéricos. Ainda foram revisados os termos de progressão aritmética e geométrica.

E já associando a sequência com uma progressão aritmética, alguns queriam encontrar alguma relação com a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$. Após um período de 10 minutos conversando entre si, indagando e deduzindo, chegaram a uma das conclusões esperadas: Multiplicando a quantidade de movimentos T por dois e adicionando uma unidade, descobriram a quantidade de movimentos necessários para completar o jogo com $n + 1$ discos, ou seja, o nível seguinte do jogo, com mais um disco.

Consequentemente, sendo T o número mínimo de movimentos com n discos, a quantidade de movimentos T de uma torre com n discos é igual à quantidade anterior com $n - 1$ discos multiplicada por dois e adicionado uma unidade.

Exemplo 1: Utilizando a Torre de Hanói é possível perceber que a quantidade mínima de movimentos com três discos é sete. Portanto, para quatro discos será: $T_4 = (2 \times T_3) + 1 = (2 \times 7) + 1 = 14 + 1 = 15$.

Exemplo 2: Qual a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo com cinco discos? Para responder é necessário saber a quantidade mínima necessária para quatro discos, que é 15. Então, $T_5 = (2 \times T_4) + 1 = (2 \times 15) + 1 = 30 + 1 = 31$.

Com isso, de forma geral temos que: $T(n) = 2T(n-1) + 1$.

Nesse momento, explicou-se sobre as relações de recorrência e foi lançado um desafio que deveria ser cumprido até o final da aula: descobrir quantos movimentos devem ser realizados para transportar 64 peças da Torre de Hanói.

A primeira ideia foi a de encontrar a quantidade de movimentos para cada uma das 63 peças anteriores a 64, e dessa forma encontrariam a resposta. Mas notou-se o quanto isso poderia ser trabalhoso e inviável, dado que deveriam ter a resposta até o final da aula.

O intuito desse desafio foi gerar nos estudantes a necessidade de encontrar uma fórmula geral, uma função que relacionasse **n** e **T** sem que fosse necessário conhecer a quantidade de movimentos da peça anterior.

Em virtude do que foi dito, foi narrado aos alunos a lenda da Torre de Hanói, que diz que um deus indiano havia dado uma tarefa a um grupo de monges, para que eles transportassem 64 discos de ouro de uma estaca para uma terceira estaca (dando surgimento a Torre de Hanói). E quando a missão fosse concluída, o universo chegaria ao fim. E por que chegaria ao fim? Quantos movimentos os monges deveriam realizar? Em quantos anos os monges levariam para transportar as 64 peças?

Agora existia um objetivo e eles precisavam descobrir como resolvê-lo. Dessa forma, eles ficaram atentos à aula e imersos no problema proposto. Deste modo, foi alcançado um dos propósitos do trabalho que é o de atribuir uma nova forma de ensinar, que percorre um caminho oposto ao do ensino tradicional.

Parte final da dedução e descobrimento da fórmula

Uma nova informação foi dada: foi solicitado que observassem os números “adicionados” mais atentamente. E em instantes, dois grupos descobriram que poderiam formar uma sequência com eles $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ e que essa nova sequência era uma progressão geométrica de razão dois.

Um grupo pensou em utilizar a fórmula da progressão geométrica $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ e com razão $q = 2$, pensaram ter descoberto algo: com $a_2 = 2 \times 2^1 = 4; a_3 = 2 \times 2^2 =$

8; $a_4 = 2 \times 2^3 = 16$, e que se subtraíssem uma unidade, teriam a quantidade mínima de movimentos T.

Os demais alunos entenderam o raciocínio dos colegas e sabiam que estavam próximos de descobrir algo, mas não sabiam ao certo o que era. Após serem parabenizados pela conquista, trabalhou-se juntamente com o professor para transformar o que havia sido descoberto em “linguagem matemática”, dessa forma pensou-se em $2^n - 1$.

Da mesma forma, fazendo $(2, 4, 8, 16, 32, 64)$ = $(2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6)$, pode-se encontrar a mesma conclusão.

A maneira utilizada para encontrar a fórmula é extremamente intuitiva e permanece dessa forma, visto que não foram cobradas provas de que ela é verdadeira e funciona para todos os números naturais, uma vez que não conhecem o Princípio da Indução Finita.

Nesse caso, bastou uma breve explicação da importância e da necessidade de se provar as fórmulas e como poderiam fazê-lo, mas que não teria necessidade no momento, já que não era o objetivo principal do trabalho.

Tabela 2 – Relação entre n e T com a fórmula descoberta.

Número de discos (n)	**Quantidade mínima de movimentos T(n)**
1	$T(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$T(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
3	$T(3) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
4	$T(4) = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
5	$T(5) = 25 - 1 = 32 - 1 = 31$

Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2 – Grupos durante o processo de dedução.

Fonte: elaborada pelo autor

Finalizando com o desafio

Agora é possível descobrir quantos movimentos os monges da lenda realizaram para finalizar a torre com 64 discos, bastava fazer (com o uso da calculadora) $T(64) = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.616$. Todos se espantaram com o resultado e não precisaram de cálculos detalhados para saber que os monges jamais conseguiriam transportar as peças.

E antes de calcular esse tempo, foi explicado sobre as unidades de tempo e como fazer as conversões entre segundos, minutos, horas, dias, e anos. Dessa forma, dando prosseguimento ao desafio: para facilitar o cálculo, toma-se que cada movimento realizado pelos monges para transportar uma única peça é de um segundo. Portanto, o tempo necessário seria de $18.446.744.073.709.551.616$ segundos, mas o tempo foi pedido em horas, então é necessário converter os segundos até encontrar os anos.

Para calcular quantos anos são necessários para concluir o jogo observa-se que um ano possui 365 dias, um dia tem 24 horas e dessa forma tem $365 \times 24 = 8.760$ horas. Cada hora possui 60 minutos, então um ano tem $8.760 \times 60 = 525.600$ minutos, e como cada minuto tem 60 segundos um ano tem ao todo $525.600 \times 60 = 31.536.000$ segundos.

De posse dessas informações, pôde-se calcular a quantidade de anos necessária para transportar todos os discos. Bastou dividir a quantidade total de segundos pela quantidade de segundos que cada ano tem, obtendo uma aproximação de 584.942.417.355 anos e dando término a aula.

Considerações finais

Percebe-se que houve a socialização entre os alunos durante as atividades, sem exceção, pois mesmo os poucos alunos que não participaram dos momentos de dedução, jogaram o jogo e tentaram realizá-lo da melhor maneira possível. Nota-se o processo de aprendizagem compartilhada nos momentos de explicação do funcionamento do jogo e suas regras, assim como nos momentos de dedução e realização dos objetivos propostos, como nas discussões a respeito das relações que poderiam ser encontradas nas sequências formadas, momentos que segundo o Currículo Nacional da Educação Básica (BRASIL, 2001), contribuem de forma articulada para o desenvolvimento pessoal e social.

A maneira como a aula foi ministrada permitiu aos discentes manterem-se ativos, interessados e atentos ao que lhes era proposto. Os alunos obtiveram a chance de ensinar e de serem ensinados pelos próprios colegas, pois diversos questionamentos foram realizados e respondidos entre si, sem a necessidade de intervenção direta do professor, que passou a atuar como mediador, pois é importante envolver o aluno como ator de sua aprendizagem. Isso porque, segundo pesquisa realizada por Santos, Oliveira e Bortoletto (2017)

> O professor que ensina matemática nas series iniciais deve atuar como mediador no processo de alfabetização matemática, proporcionando ao aluno infinitas ações sobre o objetivo de conhecimento, estar em constante interação com o meio social, para apropriação dos conceitos matemáticos, além de desenvolver práticas de leitura e escrita em matemática que por meio de instrumentos pedagógicos estruturados e alternativos capazes de desencadear o interesse do aluno, apoiar e orientar a sua compreensão. (SANTOS; OLIVEIRA; BORTOLETTO. 2017, v. 1, p. 135)

Compreende-se o professor mediador, de acordo com Menezes (2001) como sendo aquele cujas atitudes o faz atuar como facilitador da aprendizagem, colaborando para que o aluno chegue aos seus objetivos.

Em relação aos conteúdos matemáticos apresentados, pode-se dizer que o conceito de sequência e conjunto, suas diferenças e utilidades foram aprendidos rapidamente e sem complicações, assim como foi entendida a importância do uso e aprendizado das funções. A apresentação das progressões aritmética e geométrica foi vista, inicialmente, com dificuldade, gerando a necessidade de revisão do conteúdo que ao ser aprendido proporcionou a realização do objetivo principal do projeto: proporcionar momentos de dedução aos estudantes.

Com base no que foi proposto por Carvalho (2013), foi criado um ambiente investigativo em sala de aula, que pôde propiciar, tendo o professor como mediador, a formulação de hipóteses, a realização e validação de conjecturas, a observação de dados recolhidos, a dedução de fórmulas matemáticas e a realização de diversos desafios que conduziram a revisão, o contato e a utilização, na prática, de diversos saberes, num processo simplificado do trabalho científico.

Em síntese, percebe-se como é possível, de maneira simples e com o uso dos jogos pedagógicos, neste caso com a Torre de Hanói, promover uma aula dinâmica, agradável e diferente das aulas tradicionais de matemática, levando os discentes a pensar e construir, atos que, segundo Piaget (1972) citado por Sousa (2004), conduzem à compreensão e não à memorização, desenvolvendo um espírito criativo e não repetitivo.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica. **Currículo Nacional do Ensino Básico**: Competências Essenciais. 2001. 240 p. Disponível em: https://alvarovelho.net/attachments/article/39/LivroCompetenciasEssenciais.pdf Acesso em: 18 fev. 2020

CARVALHO, A. M. P. de (org.). **Ensino de Ciências por Investigação:** condições para implementação em sala de aula. 1. ed. [S.l]: Cengage Learning, 2013. 164 p. ISBN 8522114188

COLÉGIO SAGRADO CORAÇÃO DE JESUS. **A formação do professor, a prática reflexiva e o desenvolvimento de competências para ensinar.** Disponível em: http://www.cscj-ijui.com.br/downloads/formacao_prof.pdf. Acesso em: 01 nov. 2018.

GERHARDT, T.E.; SILVEIRA, D.T. (org.). **Método de Pesquisa**. 1. ed. [S.l.]: Editora da UFRGS, 2009. 120 p.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**. 4. ed. São Paulo: EDITORA PERSPECTIVA, 2000. Disponível em: <http://jnsilva.ludicum.org/Huizinga_HomoLudens.pdf>. Acessado em: 16 out. 2018.

JOGO **Dicionário infopédia da Língua Portuguesa**. Porto Editora. Disponível em: https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/jogo. Acesso em: 16 out. 2018.

MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos. **Verbete professor mediador**. *Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrasil*. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: https://www.educabrasil.com.br/professor-mediador/. Acesso em: 19 fev. 2020.

MOURA, M. O. de. A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (Ed.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011. cap. 4, p. 81-95.

MOTA, P. C. C. L. de M. **JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA**. 2009. 142 p. Dissertação — Universidade Portucalense Infante D. Henrique. Disponível em: http: //repositorio.uportu.pt/bitstream/11328/525/2/TMMAT108.pdf. Acesso em: 03 nov. 2018.

PONTES, J. P. **Novas tecnologias na aula de Matemática**. [S.l.]: Revista Educação e Matemática, 1995. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4470/1/95-Ponte%20EM%2034.pdf. Acesso em: 21 out. 2018.

REYS, R. E. Considerations for teachers using manipulative materials. **The Arithmetic Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 18, p. 551 – 558, Dezembro 1981. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/41186429?seq=1#page_scan_tab_contents. Acesso em: 18 jul. 2019

ROQUE, T**. História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. [S.l]: Zahar, 2013. 580 p.

SALEN, K.; ZIMMERMAN, E. **Rules of Play - Game Design Fundamentals**. Massachusetts London: The MIT Press Cambridge, 2004. Disponível em: <https://gamifique.files.wordpress.com/2011/11/1-rules-of-play-game-designfundamentals.pdf>. Acesso em: 20 out. 2018.

SANTOS, Anderson Oramisio; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; BORTOLETTO, Denise. A mediação pedagógica: o papel do professor na construção do conhecimento matemático. *In*: CONGRESSO INTERINSTITUCIONAL BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO POPULAR E DO CAMPO: CIBEPOC, 2017, Catalão/Go. **Anais** [...]. v. 1, p. 135-146. Disponível em: http://congressos.sistemasph.com.br/index.php/cibepoc/cibepoc2017/paper/viewFile/16/41. Acesso em: 19 fev. 2020.

SANTOS, H. V. de A. **A importância das regras e do *gameplay* no envolvimento do jogador de videogame**. 2010. 257 p. Tese (Doutorado em Artes Visuais) Universidade de São Paulo. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/27/27159/tde-22062010-102953/pt-br.php. Acesso em: 20 out. 2018.

SOUSA, P. M. L. de. O ensino da Matemática: contributos pedagógicos de Piaget e Vygotsky. **Psicologia.com.pt**, Coimbra, p. 1-26, 07.2004. ISSN 1646-6977. Disponível em: http://www.psicologia.pt/artigos/textos/A0258.pdf. Acesso em 20 mai. 2019

Recebido em: 31 de agosto de 2019.

Aprovado em: 09 de fevereiro de 2020.