

Enseñanza de la noción de límite a través de fractales

*Diana Marcela Camargo Amaya**
*Jenny Katherine Vásquez De Alba***

RESUMEN

Diversas investigaciones han mostrado la dificultad que existe en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de límite; más aún cuando este presenta diversos obstáculos (geométrico, horror al infinito, relativo a funciones y ligado al símbolo) que deben ser superados en su totalidad para aprender dicho concepto. De esta manera, el presente trabajo pretende mostrar cómo desde un contexto geométrico se hace uso de los

fractales, específicamente del fractal "árbol pitagórico", el cual se propone durante tres sesiones de clase en estudiantes de grado undécimo para ir construyendo la noción de límite. En este sentido, se busca promover un aprendizaje más dinámico y autónomo, donde el estudiante tenga un contacto directo con la construcción de dicho concepto.

Palabras clave: fractales, concepto de límite, contexto geométrico.

* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: diacamargo@hotmail.com.

** Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Dirección electrónica: jeka_vd@hotmail.com.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Los estándares curriculares establecen lo mínimo que deben conocer los estudiantes respecto a un tema; son tenidos en cuenta para la elaboración de las pruebas de Estado (Saber 11), pruebas que indagan por situaciones que requieren: nociones intuitivas de aproximación al concepto de límite en una función, sus propiedades, algoritmos de cálculo de límites, entre otras (MEN, 1998). Es allí donde se resalta la importancia y la problemática que hay en torno a este concepto, pues los bajos resultados en las pruebas de Estado son un indicador de que algo ocurre con los procesos de aprendizaje de esta noción en el aula.

De acuerdo con García (2008):

En la enseñanza de las matemáticas y particularmente en el análisis matemático, se ha encontrado que los resultados de las evaluaciones realizadas por estudiantes de bachillerato, no son las mejores para el nivel en el que se encuentran; es decir, tienden a adquirir un aprendizaje no significativo, llevándolos posiblemente a un fracaso en sus estudios superiores (p. 25).

En este sentido, la comprensión del concepto de límite es primordial en la Educación Media; sin embargo, la enseñanza tradicional de este conduce a sus aprendices a procesos netamente algorítmicos.

De esta manera este tópico es, sin duda, uno de los conceptos más difíciles de aprender y de enseñar, más aún cuando se le da un tratamiento estático, algorítmico y poco atractivo. En este orden de ideas, el cambio de contexto en el que se ha desenvuelto el concepto de límite en los últimos tiempos aportaría de cierta manera al proceso de enseñanza aprendizaje del mismo.

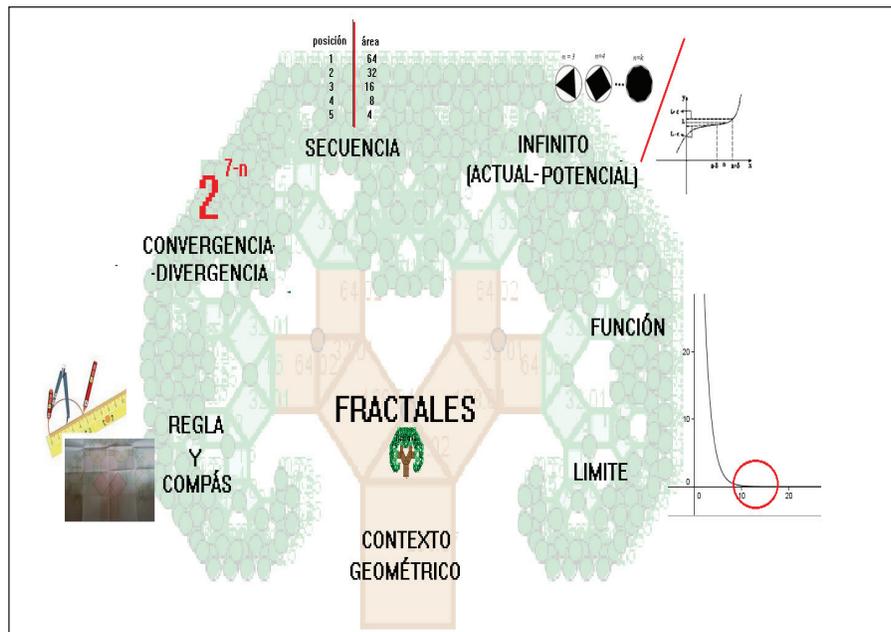
En relación con lo anterior, el contexto que aquí se propone es el geométrico dado que el concepto de límite se origina en dicho contexto al que apunta la investigación: "Una experiencia de trabajo colaborativo en sesiones virtuales y presenciales con estudiantes de grado undécimo para el tratamiento de obstáculos geométricos ligados al concepto de límite de una función". Las autoras encontraron que el empleo de fractales posibilita el tratamiento de varios obstáculos relacionados con el concepto de límite.

Autores como Cornu (1983, citado en Contreras et al. 2001) relacionan la concepción geométrica con situaciones que requieren de un contexto geométrico. Un claro ejemplo es la aproximación de las áreas de polígonos inscritos en un círculo al aumentar el número de lados, y los fractales se

encuentran dentro de este contexto, ya que surgen de la repetición de un proceso geométrico elemental infinito.

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El concepto de límite no necesariamente hace parte del pensamiento matemático avanzado; pues bien, todo depende del trabajo que se realice. En este orden de ideas y tomando algunos rasgos del concepto de límite, como su abstracción y complejidad, se puede ubicar este dentro del pensamiento matemático avanzado; sin embargo, cuando se aborda el concepto de manera algorítmica, este se puede ubicar dentro del pensamiento matemático elemental.



Ahora bien, en esta investigación no se realizan demostraciones formales ni cálculos de límites, ni tampoco se hace un uso de la definición formal de dicho concepto; pues bien, lo que se busca es un acercamiento intuitivo de la noción de límite desde el tratamiento del obstáculo geométrico y, por lo tanto, la investigación se ubica dentro de un pensamiento elemental. Para conocer más sobre este concepto, es necesario estudiar la evolución de la noción de límite, dado que es en la historia donde se desarrolla el obstáculo

geométrico y, por ende, se considera que para su posible tratamiento, las actividades que se diseñan deben tener una conexión histórica.

De esta manera, tales actividades tienen en cuenta dos aspectos para su planeación y revisión: un primer aspecto de carácter matemático que recoge aspectos del pensamiento matemático avanzado del concepto de límite, su evolución histórica, entre otros, y un segundo aspecto de carácter didáctico, donde se retoman teorías tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de dicho concepto. En cada uno de estos aspectos se retoman autores como Sierpinski (1990), Blázquez y Ortega (2000), Gatica (2006), entre otros, que fueron de gran aporte en dicha investigación

METODOLOGÍA

Las actividades fueron aplicadas en un curso de undécimo grado (36 estudiantes) con tres sesiones de clase. Las actividades que se diseñaron están apoyadas en la historia, dentro de un contexto geométrico. Como situación se propone la construcción del fractal "árbol pitagórico" y el estudio de este.

Actividad	Objetivo general	Conexión histórica
N° 1: "La discusión, pensando y hablando matemáticamente"	Cuestionar las ideas sobre infinito que tienen los estudiantes de undécimo grado, a través de un ambiente colaborativo y participativo por medio de la construcción con regla y compas del fractal árbol pitagórico.	Eudoxo de Cnido.
N° 2: "Inicios de aritmetización"	Posibilitar la interacción y las estrategias grupales, para que los estudiantes encuentren el área de una o varias iteraciones utilizando un esquema o tabla donde se evidencie la relación entre ellas.	Arquímedes y Cavalieri.
N° 3: "De lo geométrico a lo numérico"	Realizar aproximaciones numéricas partiendo de la relación obtenida en las iteraciones, permitiendo que se llegue a la noción de límite a través del tratamiento geométrico que se ha dado en los grupos.	Wallis.

ANÁLISIS DE DATOS

A partir de la información obtenida por los instrumentos de recolección: escritos de los estudiantes (cuaderno de apuntes), foros de discusión (espacios de debate virtual), intercambios sincrónicos en línea (chat), grabaciones audiovisuales y hoja de registro (observadora no participante) se realiza el análisis desde las siguientes categorías:

Categorías conceptuales y procedimentales

<i>Indicador Conceptual</i>			
Identificación de nociones como continuidad, infinito y tendencia.	Síntesis en el uso de gráficas para ilustrar el límite, vinculadas a tablas de valores a partir del énfasis que se hace en contenidos de aproximación.	Síntesis de las ideas de aproximación gráfica y aproximación numérica.	Identificación del valor al que se aproxima una sucesión mediante la observación de los términos.
<i>Indicador Procedimental</i>			
Realiza deducciones intuitivas de relaciones entre magnitudes geométricas.	Realiza aproximaciones de áreas, a partir de construcciones geométricas (con regla y compás) basadas en iteraciones.	Acude a la intuición geométrica y realiza extensos cálculos numéricos para hallar resultados cuantitativos.	Abandona el marco geométrico después de asociar los valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras.

Posteriormente, se compara la información recolectada donde se verifica el cumplimiento de los objetivos de esta investigación a partir de lo evidenciado en los tres instrumentos de información (vídeo, hoja del observador no participante y escritos de los estudiantes); de esta manera, se proponen posibles caminos, reflexiones y conclusiones que podrían llegar a ser ejes de una próxima investigación y, por qué no, de una nueva teoría sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de límite.

CONCLUSIONES

El uso de fractales en las matemáticas es una herramienta que posibilita a los estudiantes un mayor acercamiento a conceptos como límite, infinito, secuencia, función y convergencia; además, intervienen en aspectos como el lenguaje, la transposición de representaciones, entre otras. Por otra parte, el uso de fractales en el aula de matemáticas posibilita el tratamiento y superación de obstáculos ligados al concepto del límite como obstáculo geométrico, "horror" al infinito, relativo a funciones y transferencia de lo finito a lo infinito; todo depende de la forma en que se presente la situación y la forma como se trabaje.

En cuanto a esta investigación, los estudiantes logran intuir un proceso geométrico infinito en cada una de las sesiones que se proponen, intuición que evoluciona en el contraste entre lo geométrico y lo aritmético.

Finalmente, el desarrollo de la actividad depende, en parte, de la manera en que es presentada la situación; es por ello que la supervisión del profesor durante las sesiones de clase junto con la manera en que este interactúa con los estudiantes da lugar para que aumenten y se den de una mejor manera las interacciones personales entre los integrantes, factor que interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bustos, L., Camargo, D., y Vásquez, K. (2011). *Una experiencia de trabajo colaborativo en sesiones virtuales y presenciales con estudiantes de grado undécimo para el tratamiento de obstáculos geométricos ligados al concepto de límite de una función*. Memorias de XXIV Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas, Colima, México.
- Contreras, L. (2009). El papel de la resolución de problemas en el aula. Seminario dictado en el Primer Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 1 (1), 37-98.
- García, A. M. (2008): Significados institucionales y personales en la enseñanza del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de bachillerato. Tesis de grado dirigida por: Sánchez C. Universidad de Jaén. España.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998): Matemáticas lineamientos curriculares. Serie lineamientos curriculares. Republica de Colombia.