Analyses de situations didactiques*

MICHEL HENRY**
SADDO AG ALMOULOUD***
TÂNIA MARIA MENDONÇA CAMPOS***

Resumé
Le concept d'analyse théorique fait partie de la méthodologie des recherches en Didactique des Mathématiques. Mais il n y a pas généralement de définition standart pour ce concept. L'objectif de cet article est d'en proposer une et de proposer un canevas pour présenter une analyse théorique. L'article propose ensuite des exemples d'analyses de problèmes de rallye mathématique mettant en jeu le concept de fonction.
Mots-clé: Analyse théorique; Méthologie de recherche; Didactique des Mathématiques; Analyse de problèmes.

Resumo
O conceito de análise teórica faz parte da metodologia de pesquisa em Didática da Matemática. Mas, não há, geralmente, uma definição-padrão para esse conceito. O objetivo deste artigo é propor uma definição e um roteiro para apresentar uma análise téorica. O artigo propõe, depois, exemplos de análise de problemas de rallye *matemático envolvendo o conceito de função.*
Palavras-chaves: *análise téorica; metodologia de pesquisa; didática da Matemática; análise de problemas.*

Abstract
The concept of theoretical analysis is part of the research methodology in Didactics of Mathematics. However, generally speaking, there is no standard definition to the concept. The aim of this paper is to propose such definition and a script to present a theoretical analysis. Furthermore, the paper proposes examples of mathematical rallye problems analysis, related to the concept of function.
Key-words: *theoretical analysis; research methodology, didactics of mathematics; problems analysis.*

---

* Adaptation d'une communication aux journées d'études sur le RMT de Torre delle Stelle 2002 : *Le rôle de l'analyse a priori dans l'élaboration d'un problème de Rallye*, (Il ruolo dell'analisi a priori nell'elaborazione di un problema del rally), Actes bilingue (Français-Italien) des journées d'études sur le RMT de Torre delle Stelle 2002, A.R.M.T. Grugnetti, L. et Jaquet F. ed., Universita di Parma e di Cagliari, octobre 2003, p. 237-256.

** IREM, Besançon (France) Université de Franche-Comté.

*** PUC-SP.

Présentation d'une analyse théorique

Un concept à géométrie variable

Beaucoup de publications didactiques utilisent le concept d'analyse théorique. Il fait partie du langage courant. Ce concept va tellement de soi dans les discours des didacticiens, que les jeunes enseignants n'osent pas demander ce qu'on entend exactement par "analyse théorique" et sont étonnés de ne pas trouver de définition standard. Quand on creuse les différentes conceptions exprimées à ce sujet par les uns et les autres, on a le sentiment d'être en présence d'une véritable auberge espagnole.

Cette diversité d'interprétations ne serait-elle pas inhérente à l'objet? Comme nous le verrons plus loin, l'analyse théorique peut recouvrir un ensemble de questions extrêmement vaste, qu'il n'est sans doute pas souhaitable de mener exhaustivement dans toute étude. Le contenu d'une analyse théorique serait donc dépendant de l'objet de l'étude, des raisons pour lesquelles elle est menée, du public à qui elle est destinée.

Ainsi, un chercheur qui veut expérimenter une situation didactique, en vue par exemple d'une étude fine du milieu qu'elle détermine, afin d'en contrôler les variables et d'en tirer des arguments pour valider telle ou telle hypothèse théorique, ne présentera sans doute pas la même analyse que le formateur qui cherche à comprendre plus globalement ce qui dans cette situation peut être facteur d'apprentissages ou d'obstacles pour les élèves, ni la même que l'enseignant qui désire piloter sa classe dans des directions qu'il s'est fixées en fonction d'un projet déterminé par une progression spécifique.

Une définition

> *L'analyse théorique d'une situation didactique est l'ensemble des études qui concourent à:*
> *A – la connaissance du savoir en jeu (analyse épistémologique),*
> *B – la description de son fonctionnement dans l'évolution de la situation (analyse didactique).*
> *C – les comportements possibles des élèves et leur gestion (analyse pédagogique).*

Cette définition est courte et générale, elle appelle quelques remarques:

1 – L'analyse théorique n'a pas pour objet de tirer des enseignements des comportements réellement observés d'élèves agissant dans cette situation. Elle peut cependant s'inspirer des résultats de recherches ou d'expérimentations déjà obtenus à ce propos, dès lors qu'ils repèrent des invariants dans ces comportements, leur conférant un statut de connaissance théorique. Les élèves désignés dans une analyse théorique sont donc des élèves génériques.

2 – Il en est de même pour le rôle de l'enseignant (qui est souvent l'oublié des analyses a priori !). Cet enseignant est théorique, en ce sens que l'analyse ne prend pas en compte les choix personnels de l'enseignant Tartempion, bien connu pour son mauvais caractère, mais peut examiner les effets de différents types de rapport au savoir que l'on peut rencontrer chez les enseignants en général, tels que les révèlent les recherches spécifiques de ce domaine.

3 – Pour les raisons précédentes, l'analyse théorique est souvent appelée: "analyse a priori". Elle est donc développée indépendamment de la situation de classe réellement mise en œuvre. C'est pourquoi elle peut être menée avant cette mise en œuvre. C'est ce qui entraîne parfois des confusions chez les jeunes chercheurs ou enseignants, confondant l'analyse théorique avec l'*analyse préalable* qui a d'autres objectifs: ceux de préparer la gestion de la classe, s'appuyant éventuellement sur quelques éléments d'analyse a priori.

4 – C'est pourquoi il faut insister sur le fait que l'analyse théorique peut être développée, même si il n'est pas question de faire fonctionner réellement la situation. Elle peut être aussi affinée après enseignement, dès lors que les faits observés amènent à revoir la copie, parce qu'ils ont révélé des insuffisances dans l'analyse théorique. C'est sûrement le cas en formation, où l'analyse théorique, préparée par un jeune stagiaire, ne peut-être suffisante du premier coup et quand l'observation de la classe permet un retour réflexif sur celle-ci. Ce n'est donc pas "tricher" que d'y revenir après coup, comme le croient certains stagiaires, confondant souvent analyse théorique et exercice de divination dans le marc de café.

5 – Si l'analyse théorique permet de mieux comprendre le comportement des élèves vis à vis du savoir en jeu, elle n'a pas pour fonction essentielle l'anticipation sur le déroulement de la situation didactique, qui peut être très varié. Beaucoup de choix de gestion ne sont pas déterminés univoquement par l'analyse théorique et donnent lieu à

des évolutions divergentes. Il s'agit donc de bien préciser les fonctions de l'analyse théorique, c'est à dire à nouveau de savoir pourquoi on la produit.

6 – On a choisi de définir l'analyse théorique *de situations didactiques*, ce qui peut paraître trop général ou au contraire exclure d'autres applications possibles comme l'analyse des problèmes de bac par exemple. Mais cela a pour conséquence de devoir relier la notion d'analyse théorique à la théorie des situations, de lui donner un cadre théorique permettant de savoir ce que l'on dit. Notamment, la question du milieu va être centrale. Cependant, il ne faudrait pas restreindre l'analyse théorique à l'analyse du milieu.

7 – En présentant l'analyse théorique comme un ensemble d'études, on sous-entend qu'il n'y a pas de texte standard d'analyse théorique. En particulier, elle ne se développe pas nécessairement linéairement dans une progression obligée. Il y a donc *des études* qui peuvent être parties prenantes de l'analyse théorique. Diverses entrées ou thèmes peuvent servir de fil conducteur à ces études, pêle-mêle: épistémologie et histoire des concepts présents, étude des champs conceptuels, étude de la transposition didactique et de ses évolutions passées et présentes, prérequis, repérage des obstacles épistémologiques, stratégies de résolution, description des variables didactiques, jeux de cadres, registres sémiotiques intervenants, conceptions pré construites, pré acquis, obstacles didactiques et autres, compétences attendues, éléments de contrat didactique et effets de contrat, éléments de validation présents dans le milieu (ou absents), erreurs repérables, indices de maîtrise de savoirs, éléments d'évaluation des acquis, choix de formulations et d'institutionnalisation ... tout cela permettant de mieux cerner les objectifs didactiques de la situation et d'en contrôler la réalisation.

8 – Cependant, nous avons classé ces diverses études en deux grandes parties. Une troisième serait "l'analyse pédagogique": choix du dispositif pédagogique et de gestion de classe, analyse du temps didactique, attentes relatives aux comportements des élèves, gestion des effets de contrat et gestion des conjectures ou erreurs produites. Travail sur les formulations, propositions de tâches ou réinvestissements, dispositifs d'évaluation...

Cette partie pédagogique ne semble pas relever de l'analyse théorique elle-même, mais de ses applications.

9 – Dans une analyse théorique, il y a danger de rechercher l'exhaustivité (comme le montre la liste précédente et le canevas qui suit), alors que suivant les situations et les objectifs de la recherche, on développera tel ou tel point de l'analyse théorique.

Un canevas pour présenter une analyse théorique

Les différents points de la liste ci-dessous peuvent être liés, faire l'objet d'études combinées et présentés en coordination.

Présentation de la situation

– Niveau de la classe, Progression dans laquelle s'insérera l'activité,

– Objectifs mathématiques (savoir ceci ou savoir faire cela...), didactiques (telle ou telle méthode pour apprendre, mise en place du contrat didactique...) et pédagogiques (habitudes de travail, rapport au savoir...).

– Présentation de la tâche et des consignes telles qu'elles sont proposées aux élèves,

– Description des choix pédagogiques successifs éventuels de gestion (exposé magistral, rappels, travail autonome ou en groupes, comment ceux-ci sont-ils constitués, découpage proposé du temps de l'enseignement, les consignes de compte rendu, les objectifs d'évaluation).

– Les attentes concernant les apprentissages produits et le repérage de leurs effets.

Éléments d'analyse théorique

Analyse du savoir en jeu

Analyse mathématique:

– Notions mathématiques explicitement présentes dans le milieu.

– Notions connexes implicites.

– Stratégies de résolution.

– Cadres mathématiques et registres de représentations possibles.

– Pré-requis (connaissances mathématiques nécessaires pour telle ou telle stratégie).

– Champs conceptuels en jeu.

– Éléments de validation présents dans le milieu.

Analyse épistémologique:

– Histoire des notions et concepts clés, contextes de leur émergence et de leur évolution.

– La place de ces concepts dans les mathématiques contemporaines (savoir savant), leur présentation formelle.

– Le fonctionnement des connaissances visées dans la pratique sociale.

– Les obstacles épistémologiques repérables dans l'Histoire et dans les pratiques.

Transposition didactique:

– Les différentes présentations de ce savoir en vue de l'enseigner.

– Les phénomènes de transposition didactique, les créations didactiques de savoir à enseigner.

– Évolution des programmes d'enseignement, mise en perspective de l'activité proposée.

Analyse didactique

Les connaissances des élèves:

– Leurs connaissances préalables (pré acquis), conceptions pré-construites, théorèmes et définitions en acte.

– La mémoire de la classe.

– Le contrôle des pré-requis (tests ?).

– Les obstacles didactiques (psychologiques, ontogéniques...) possibles.

– Les erreurs généralement observables dans cette situation.

L'analyse de la tâche:

– Analyse des variables didactiques, leurs effets sur les stratégies de résolution.

– Changements de cadres possibles en fonction des consignes.

– La décontextualisation ou les généralisations possibles.

– Les réinvestissements envisageables

L'action du professeur:

– Analyse de la dévolution.

– Éléments de contrat didactique, niveaux des preuves et démonstrations attendu.

– Les connaissances et formulations à institutionnaliser.
– Le dispositif d'évaluation.
Le rôle de l'enseignant:
– Sa place dans la situation a-didactique.
– Les éléments de savoir scolaire qu'il peut apporter dans le milieu.
– Effets de contrats à sa disposition.

Gestion de la situation (analyse pédagogique)

– Choix pédagogiques en regard de l'évolution de l'activité.
– Choix de variables didactiques préférentielles.
– Contexte de la dévolution.
– Gestion des conjectures et stratégies proposées par les élèves.
– Gestion des erreurs (cf. la grille de l'INRP par exemple).
– Gestion du temps de l'enseignement et du temps de l'apprentissage (phases didactiques et a-didactiques).
– Gestion des effets de contrat
– Décisions d'institutionnalisations.
– Choix d'exercices et de problèmes de réinvestissement
– Mise au point et analyse du dispositif d'évaluation.

Le concept de fonction, exemples d'analyses de problèmes de rallye mathématique[1]

Enjeu didactique et objectifs d`apprentissage

Le concept de fonction est l'un des plus fondamentaux en mathématiques. Pour des mathématiciens, il ne semble pas faire de difficultés, tellement il est omniprésent dans la pratique quotidienne. Pourtant son apprentissage concerne toutes les classes de l'école secondaire, et progresse encore à l'Université. Les élèves rencontrent avec lui des obstacles très forts, de nature épistémologique et didactique, qui se révèlent par de nombreuses résistances, hésitations et erreurs dans la résolution de problèmes. Le vocabulaire qui lui est associé n'est pas familier

1 Cette étude a été menée dans le cadre des journées d'étude de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin qui s'est tenu les 15 et 16 octobre 2005 à Arco di Trento (Italie). A paraître dans les actes des journées d'étude de Bourg en Bresse et de Arco di Trento, ed. ARMT.

et demande du temps d'assimilation. Le terme même de *fonction* induit fortement l'idée d'une relation causale entre une grandeur variable et la grandeur qu'elle détermine. Cet obstacle épistémologique s'accompagne souvent d'un obstacle didactique quand les élèves débutants interprètent ce lien comme un lien de proportionnalité. L'abandon de cette causalité, condition sine qua non d'un saut déterminant dans l'apprentissage en mathématiques, sera vécu comme "un véritable repentir intellectuel" selon les termes de Gaston Bachelard[2], quand l'esprit de l'élève passera d'une appréhension naïve à une véritable connaissance scientifique.

Il a fallu des siècles[3] pour que l'idée de fonction, entrevue consciemment par Leibniz à la fin du 17ème siècle, devienne notion avec Euler au 18ème, avant d'acquérir au début du 20ème siècle le statut de concept abstrait que nous lui donnons aujourd'hui. De la notion vague de dépendance entre variables où l'univocité n'était pas repérée comme critère fondamental, à la recherche systématique de formules de calcul pour expliciter une "expression", de nombreuses hésitations ont parcouru cette tranche d'histoire des mathématiques. Un seul exemple célèbre: au 18ème siècle, l'expression $\sqrt{x^2}$ détermine une belle et bonne fonction de la variable réelle x, par contre la disjonction logique "x si $x \geq 0$, $-x$ si $x < 0$" n'est pas admise comme fonction.

Une notion que l'on ne définit pas mais que l'on décrit par de multiples exemples ne peut accéder au rang d'objet mathématique susceptible de figurer dans des démonstrations. Une telle définition est apparue au 20ème siècle avec la théorie des ensembles, intégrant le concept de fonction dans un cadre théorique. Mais il est significatif que, mise à part la courte période des "mathématiques modernes" des années 70, les manuels scolaires ne produisent pas cette définition (un graphe fonctionnel dans un produit cartésien), tellement abstraite qu'elle ne permet pas aux élèves d'atteindre une compréhension opératoire du concept[4]. Nous

2 *La formation de l'esprit scientifique,* début du chapitre premier: *La notion d'obstacle épistémologique.*

3 L'histoire du concept de fonction a fait l'objet d'un article clair et synthétique:, *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle* de Adolf YOUSCHKEVITCH dans *Fragments d'histoire des mathématiques*, brochure APMEP n° 41, 1981, p. 7-68.

4 Cf. l'article de Sylviane Gasquet: *Les fonctions,* dans le livre coordonné par Pierre Legrand: *Profession enseignant*, *les maths en collège et en lycée,* Hachette Éducation, 1997, p. 190-213.

sommes ainsi placés devant un enjeu didactique très fort: faire acquérir l'un des outils de base les plus essentiels des mathématiques sans en donner de définition ni de mode d'emploi général, concevoir cependant ces outils comme des objets appartenant à des espaces déterminés par des propriétés caractéristiques: fonctions linéaires, algébriques, trigonométriques, solutions d'équations aux dérivées partielles, etc.

Une telle acquisition sera donc le fruit d'un long processus d'apprentissage, allant au fil des années du plus simple au plus complexe, procédant de l'usage progressif et expérimental sans attendre une appréhension globale, explorant les multiples facettes de la notion, découvrant et testant son efficacité dans la résolution de problèmes. Les rallyes mathématiques peuvent-ils contribuer à ce processus didactique? Dans quelle mesure a-t-il été jusqu'ici pris en compte par les concepteurs des problèmes et mis en avant dans les analyses a priori? La problématique peut être introduite par les deux questions suivantes:

1 – Certains problèmes du rallye peuvent-ils être considérés comme une introduction au concept de fonction en tant qu'outil implicite de résolution de problème?

2 – Dans quelles conditions didactiques les exploitations en classe de ces problèmes permettent-elles une exploration explicite de la notion et du vocabulaire associé?

Une étude antérieure du Rallye Mathématique Transalpin (RMT)

Dans l'article *Le traitement d'une fonction, obstacles et représentations,* publié dans les actes des 3ème et 4ème journées d'études sur le RMT de Sienne et Neuchâtel, François Jaquet avait dégagé les observations suivantes:

– le concept de fonction est fréquent dans les problèmes de rallye, mais il n'est pas nommé explicitement. Des types très différents de fonctions sont proposés, mais le concept n'apparaît pas encore très clairement, ni dans les intentions des auteurs de problèmes qui le recèlent, ni dans les analyses a priori, bien que les méthodes de résolution les plus efficaces (du point de vue de l'adulte mathématicien) y fassent clairement appel.

– Il est introduit dans des problèmes des degrés 3 à 8 (9 à 15 ans). Les jeunes élèves utilisent volontiers le cadre géométrique par étapes successives, puis avec une plus grande maîtrise numérique, ils passent au cadre arithmétique où ils s'appuient sur la notion de "suite".

– Un des obstacles les plus importants à la résolution de ce problème se situe dans une conception mécaniste de l'évolution de la "suite " du nombre de cases des grilles, selon ce que nous avons appelé le "modèle exclusif de linéarité ". Il ne s'agit peut-être que d'un effet de contrat didactique reposant sur un répertoire important de problèmes où "lorsqu'on double une grandeur, toutes les autres doublent aussi " et il paraît plus prudent de ne pas évoquer encore ici le concept de fonction.

– La plupart des problèmes permettant d'aborder la notion de fonction demandent une maîtrise préalable des nombres et opérations. Ce n'est que lorsqu'on a pu surpasser le stade du calcul un à un des termes d'une suite qu'on peut envisager son type de croissance et ses liens fonctionnels avec le rang des termes. Ce n'est qu'à partir des degrés 7 et 8 (13-15 ans) qu'on peut voir s'esquisser des procédures véritablement fonctionnelles.

– Pour qu'une procédure fonctionnelle soit mise en oeuvre par des élèves qui n'ont pas encore abordé l'étude des fonctions, il faut qu'elle soit ressentie comme nécessaire, c'est-à-dire qu'elle permette d'éviter des calculs fastidieux de tous les termes d'une suite. Il ne faut donc pas s'attendre à la voir émerger dans des problèmes où une résolution "pas à pas" s'avère plus économique.

Remarques générales

1) Certains problèmes peuvent être résolus dans des cadres spécifiques autres que le cadre fonctionnel, cadres géométrique (constructions expérimentales), arithmétique (raisonnement malin), logique (analogies, inductions), numérique (essais, approximations) etc. Au niveau des problèmes de rallye, ces possibilités de résolutions à "moindre coût " que le recours au cadre fonctionnel, constitueraient un obstacle didactique ou pour le moins un possible contournement de ce cadre, ce qui amènerait les élèves à douter de son intérêt et à refuser de se l'approprier.

2) Quand la fonction sous-jacente à la résolution du problème peut être traduite par une formule algébrique assez simple, une procédure algorithmique peut être engagée pour effectuer un calcul directement sur les données numériques de l'énoncé, sans atteindre la généralité que le cadre fonctionnel permet. Il y a donc deux niveaux de conceptualisation bien distincts et un problème qui peut être traité par une procédure algorithmique suffisamment simple peut contribuer à ce que les élèves

contournent l'obstacle épistémologique très fort consistant à concevoir le problème dans la généralité du cadre fonctionnel.

3) Les habillages proposent des situations discrètes où le concept de suite numérique vient naturellement. Le concept de fonction opère alors dans le cas particulier des fonctions d'une variable entière (est-il pertinent?) et non dans le cadre général des fonctions de variable réelle. N'y a-t-il pas là une facilité didactique qui ferait obstacle à une généralisation ultérieure? On sait d'expérience la difficulté pour des étudiants de plus de 18 ans, ayant acquis les bases élémentaires du concept de fonction, de considérer une suite numérique comme une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

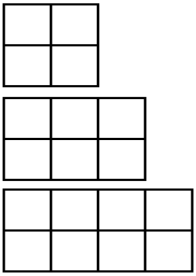
4) Le concept de fonction est intimement lié à celui de variable. Ils sont indissociables. Dans quelles conditions la notion de variable (entière ou réelle) peut-elle apparaître lors de la résolution d'un problème comme un support clarificateur de la pensée et comme un outil générateur du calcul littéral?

5) Quels sont les éléments de base du vocabulaire fonctionnel (objets, images, antécédent, vocabulaire ensembliste,…) qui peuvent être appelés pour la résolution d'un problème? Quelle institutionnalisation possible?

A titre d'illustration, nous proposons de reprendre trois problèmes typiques posés dans des épreuves du RMT de l'année 2005, pour voir dans quelle mesure ces remarques s'y appliquent et pour pointer les connaissances mathématiques qui se situent à la base du concept de fonction dans ces problèmes ou dans leurs exploitations possibles.

Premier exemple: Grilles d'allumettes (RMT 13, problème I-9, Cat. 5-6-7, 11-14 ans)

Énoncé



Pour construire cette figure, il a fallu 12 allumettes.

Pour cette deuxième figure, il a fallu quelques allumettes de plus !

Et pour cette troisième figure, encore davantage d'allumettes !

En continuant à construire des figures de la même façon, combien d'allumettes seront nécessaires à la construction de la 100$^{\text{ème}}$?

Justifiez votre réponse.

Diverses procédures de résolution

Le cadre fonctionnel n'est pas proposé et il n'est pas attendu de la part des élèves. Plusieurs procédures peuvent être mises en œuvre dans ce problème, il convient de regarder si la notion de fonction est présente dans l'une ou l'autre.

Procédure algorithmique

C'est la première procédure indiquée dans l'analyse de la tâche. Elle est clairement présente et facilement accessible: il suffit à l'élève de compter combien il doit ajouter d'allumettes pour passer d'une figure à l'autre à partir de la première formée de 7 plus 5 allumettes, pour voir l'algorithme des comptages successifs suffisant pour dresser le tableau indiqué.

La question porte sur la 100$^{\text{ème}}$ figure. Cette variable didactique semble insuffisante pour imposer la recherche d'une règle générale qui se dégagerait de cet algorithme: multiplication du rang de la figure demandé par 5 et ajout de 7. De plus, cette règle, très simple, peut être entièrement conçue dans le cadre arithmétique sans faire appel à la fonction affine, dès lors que le rang de la figure demandée est numériquement fixé. Car il n'a alors pas besoin d'être symbolisé par une lettre n qui pourrait prendre le statut de variable seulement si plusieurs cas de figures étaient envisagés.

Procédure géométrique

Elle consiste à tirer parti de la configuration particulière proposée: compter les allumettes horizontales et les allumettes verticales. La 100$^{\text{ème}}$ figure comportant 101 carrés de base, il y a donc 3x101 allumettes horizontales et 2x102 allumettes verticales (problème classique d'extrémités d'intervalles), d'où 507 allumettes en tout. La réponse est aussi immédiate pour tout autre rang de figure demandée et exclut tout référence au cadre fonctionnel. La question didactique qui se pose est ici: pourquoi l'analyse a priori proposée n'évoque-t-elle pas cette procédure et pourquoi la plupart des élèves ne s'inscrivent pas spontanément dans ce cadre géométrique? Sans doute parce qu'il n'est pas naturel d'imaginer qu'une réponse géométrique peut être attendue (effet de contrat didactique) si elle est basée sur une aussi grande figure.

Suite récurrente

Une procédure experte s'inscrivant dans le cadre fonctionnel (des fonctions d'entiers) peut être proposée. Si u_n désigne le nombre d'allumettes composant la figure de rang n, la base étant formée de $u_0 = 7$ allumettes et la figure de rang $n+1$ étant formée avec 5 allumettes de plus que la figure de rang n, on a $u_{n+1} = u_n + 5$, d'où $u_n = 5n + 7$.

Mais, bien qu'une suite puisse être présentée comme fonction définie sur N, le langage des suites ne situe pas de manière évidente le problème dans le cadre fonctionnel. Seule la notion de variable intervient ici et la formulation de la réponse avec le langage des fonctions alourdit inutilement l'exposé.

Commentaires

Pour conclure, il apparaît que le cadre fonctionnel n'est pas nécessaire pour résoudre ce problème. En fait, la question porte sur un nombre et non pas sur un procédé. Le cadre fonctionnel exigerait que la question porte sur le procédé ou sur l'expression d'une loi. Par exemple en demandant une règle qui explique une suite donnée: A dit 4, B répond 18, A dit 10, B répond 102, A dit 8, B répond 66… A doit proposer le moins de valeurs possibles pour deviner le calcul que B fait: $y = x^2 + 2$

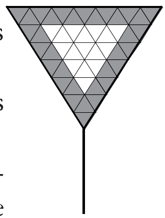
Le cadre fonctionnel ne semble pas vraiment approprié pour fournir des outils de résolution de problème dans des situations numériques simples portant sur des entiers, quand des raisonnements algorithmiques et arithmétiques suffisent ou quand le langage des suites s'introduit naturellement avec une variable n. Il en irait autrement si la variable considérée était une variable réelle et si la question posée portait sur le lien fonctionnel entre cette variable et les valeurs demandées. On peut proposer un autre habillage du problème des allumettes, si l'objectif est de placer les élèves dans le cadre des fonctions:

> Un ressort au repos mesure 7 cm. Étant suspendu par l'une de ses extrémités, on accroche à l'autre différentes masses qui ont pour effet de l'allonger. Par exemple, avec une masse de 10 g, il mesure 7,5 cm, avec 20 g, il fait 8 cm. Chaque fois que l'on ajoute 10 grammes à une masse déjà suspendue, il s'allonge de 0,5 cm. Quelle longueur fera-t-il si on suspend une masse de 1 kg? De 354 g, De x g?

L'habillage du problème est important, il faut cependant que le plaisir des élèves à résoudre la tâche soit aussi présente. Il y a lieu également d'être attentif au cadre et à l'objectif du problème: contexte du RMT, cadre évaluatif ou cadre didactique (dans le sens où l'enseignant a pour fonction de gérer des apprentissages). De plus, la facilité de résolution n'est pas garante du plaisir et son symétrique n'est pas toujours de mise non plus quand la difficulté de résolution ou la charge conceptuelle sont trop lourdes, la contrainte didactique peut aller jusqu'au déplaisir.

Deuxième exemple: Drôle de panneau ! (RMT 13, problème I-14, Cat. 7-8-9 (13-16 ans)

Énoncé



Ce panneau triangulaire est formé de petits triangles équilatéraux, tous isométriques.

16 d'entre eux forment un triangle intérieur et les 33 autres constituent la bordure extérieure à ce triangle.

Est-il possible de fabriquer un autre panneau triangulaire, de taille différente mais, pour lequel la bordure extérieure, toujours de même largeur, aurait le même nombre de petits triangles que la partie intérieure ?

Expliquez votre démarche et justifiez votre réponse.

Diverses procédures de résolution

Exploration numérique

Le langage des suites peut encore être évité, mais la réponse par des calculs de proche en proche est plus laborieuse que dans le problème précédent:

– Il faut dessiner d'autres figures, constater, au passage, que la mesure du côté du triangle intérieur vaut toujours 3 de moins que celle du triangle extérieur.

– Relever les dimensions et aires correspondantes des deux triangles et de la bordure, en prenant le petit triangle pour unité d'aire et son côté pour unité de longueur:

mesure du côté du triangle extérieur:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
mesure du côté du triangle intérieur:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
aire du grand triangle:	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
aire du triangle intérieur (I):	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
aire de la bordure (B):	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63

et éventuellement ajouter une ligne pour la différence entre l'aire de la bordure et celle du triangle intérieur, différence B – I:

intérieur, différence B – I:	9	14	17	18	17	14	9	2	-7	-18

– L'observation des dernières lignes mène à la conclusion qui s'impose: il n'y a pas de valeur qui permette d'obtenir un panneau répondant à la condition fixée.

Introduction d'une suite et solution arithmétique

L'utilisation du langage des suites simplifie la recherche. Il impose de préciser la variable n, premier pas vers le cadre fonctionnel. Mais un raisonnement purement arithmétique permet encore de l'éviter.

– Désignons par n la longueur du côté du triangle intérieur (en blanc sur la figure) et par a_n son aire. Une exploration simple montre que $a_n = n^2$ (somme des n premiers nombres impairs). L'aire du grand triangle est donc $(n+3)^2$ et celle de la bordure (en noir sur le dessin) est $(n+3)^2 - n^2$, qui devrait être égal à n^2 pour le panneau demandé.

– Or, si $(n+3)^2$ vaut $2n^2$, $n+3$ est pair (car le carré d'un nombre impair est impair) et $(n+3)^2$ est multiple de 4. n^2 est donc pair ainsi que n, ce qui impliquerait que $n+3$ soit impair ! Cette contradiction montre qu'il n'y a pas d'entier satisfaisant la condition sur n qui réaliserait un panneau dont la bordure ait la même aire que l'intérieur.

– Ce raisonnement peut être abrégé par l'argument algébrique que 2 ne peut être le carré de $(n+3)/n$, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel. Il faut reconnaître qu'il n'est pas accessible aux élèves des niveaux du RMT, ni dans l'esprit des problèmes posés dans ce rallye.

Etude de fonctions

Elle consiste à étudier les variations de $(n+3)^2 - 2n^2$, et étudier les racines de cette fonction trinôme qui s'écrit $-n^2 + 6n + 9$. La résolution algébrique donne la valeur positive non entière $3(1+\sqrt{2})$. On peut aussi faire une représentation graphique représentative de cette fonction et conclure par la négative à la question posée. Ainsi, si l'on se place dans le cadre fonctionnel, ce problème conduit à un exercice classique de trinôme.

Commentaires

La résolution de ce problème suppose d'abord d'avoir bien compris la relation entre l'intérieur et la bordure du panneau, ainsi que la manière de calculer les aires des triangles suivant leurs dimensions. Ces mises en relations pour des dimensions variables font implicitement pénétrer dans le cadre fonctionnel. Mais l'explicitation demande de définir une variable n, ce qui est une difficulté primordiale. Or dans ce problème, il existe plusieurs variables possibles. Il semblerait utile de proposer un choix aux élèves.

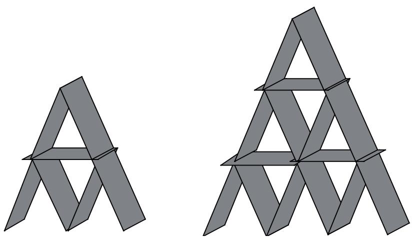
Afin de résoudre le problème, les élèves peuvent utiliser des suites numériques comme nous l'avons fait dans notre analyse des procédures. On constate que le cadre fonctionnel ne s'impose pas naturellement, mais qu'il peut être utile comme outil de résolution.

En classe, après l'épreuve, le professeur pourrait gérer ce problème dans le cadre des études de fonctions en examinant la croissance des deux suites mesurant les aires à comparer, en faisant admettre aux élèves que l'aire d'un triangles de côté n vaut n^2 avec les unités choisies. Cette gestion ne nous semble pas possible avant le niveau 9. Elle correspond plutôt aux programmes des classes supérieures.

Troisième exemple: Château de cartes (RMT 13, problème II-15, Cat. 7-8-9 (13-15 ans)

Énoncé

Andréa s'amuse à construire des châteaux avec des cartes à jouer. Elle a construit deux châteaux: le premier a deux niveaux et est fait de 7 cartes ; le deuxième a trois niveaux et est fait de 15 cartes.



Combien de cartes Andréa devrait-elle utiliser pour construire un château de 25 niveaux ?

Expliquez votre raisonnement.

Diverses procédures de résolution

Démarche algorithmique

La démarche conceptuellement la plus immédiate est de comprendre la règle de construction des châteaux successifs pour établir un lien entre le nombre de niveaux et le nombre de cartes. Le décompte devient vite fastidieux:

Niveaux	1	2	3	4	5	6	7 …	25
cartes	2	7	15	26	40	57	…	

L'algorithme à découvrir n'est pas simple: pour passer d'un château au château suivant, il faut ajouter un nombre de cartes égal à la différence entre les nombres de cartes des deux niveaux précédents augmenté de trois: +5, +8, +11, +14, +17, +20 , +23, …

On peut alors continuer numériquement jusqu'au 25^e niveau et écrire tous les résultats intermédiaires (en s'aidant éventuellement d'une calculatrice): 2, 7, 15, 26, …, 950.

Approches géométriques

Le château étant réalisé, on peut compter les niveaux à partir du sommet, constitué par un seul château élémentaire de 3 cartes. La configuration géométrique montre alors simplement que le niveau n est formé de n châteaux élémentaires, donc de $3n$ cartes, sauf le dernier (le 25^e dans ce problème) dans lequel les châteaux élémentaires ne sont formés que de 2 cartes. Le nombre total de cartes pour faire un château de 25 étages est donc:

$$3x(1+2+3+\ldots+24) + 2x25 = 3x12x25 + 2x25 = 950.$$

Cette procédure utilise la somme des 24 premiers entiers, aisément calculable sans connaître la formule classique. Il en irait autrement si la question était posée pour un château de 100 étages.

Une manière équivalente de faire ce décompte est de compter le nombre de châteaux élémentaires: $1+2+3+\ldots+25$, et de considérer qu'ils sont formés de 3 cartes sauf les 25 de base, d'où le nombre de cartes nécessaires: $3x(1+2+3+\ldots+25) - 25 = 950$

D'autres points de vue sont encore possibles. Par exemple, compter d'abord les cartes penchées: $2x(1+2+3+\ldots+25)$, puis les cartes horizontales: $1+2+3+\ldots+24$.

Ces différentes manières de compter utilisent les propriétés de la configuration géométrique et sont numériquement plus aisées que la démarche algorithmique calquée sur le processus de construction effective du château. Mais l'énoncé du problème met ce processus en avant, ce qui peut induire chez les élèves le choix algorithmique par effet de contrat.

Conditions pour faire appel au cadre fonctionnel

La relation clairement demandée entre le nombre n de niveaux et le nombre de cartes C_n nous place d'emblée dans le cadre d'une correspondance fonctionnelle. Cependant la donnée numérique fixée (25 étages) ne rend pas a priori nécessaire la définition d'une variable. Cette valeur 25 rend fastidieuse la procédure algorithmique, ce qui conduit à rechercher une expression générale de C_n. L'étude précédente donne alors une relation de récurrence: $C_{n+1} = C_n + (C_n - C_{n-1}) + 3$, dont la résolution semble dissuasive.

Par contre, dans une procédure géométrique, la valeur 25 autorise encore un décompte direct. Tel qu'il est posé, ce problème ne semble pas pousser les élèves à transformer l'idée implicite de relation fonctionnelle en une utilisation plus explicite de la notion de fonction comme outil de résolution. Un autre réglage de cette variable didactique (100 niveaux par exemple) peut-il répondre à cet objectif? On a vu que la clé du problème réside dans le calcul de la somme des n premiers entiers. Le professeur peut montrer aisément à de jeunes élèves que sont double vaut $n(n+1)$. Si l'on se limite à la valeur $n = 100$, le passage par le langage des suites est à peine nécessaire.

Cependant la demande d'une formule générale pour C_n conduit à une expression explicite d'une fonction: $C_n = 3n(n+1)/2 - n = n(3n+1)/2$. Son utilisation pour différentes valeurs de n s'avère alors efficace.

Commentaires

Ce problème paraît être assez prototypique de problèmes pouvant conduire à l'utilisation de fonctions comme outils de résolution.

On peut toutefois suggérer que le cadre fonctionnel ne peut être explicitement présent que s'il a fait l'objet d'une première introduction dans l'enseignement. Le problème du château de cartes montre que deux conditions sont alors requises:

– que le contexte rende nécessaire l'introduction d'une variable, soit en raison de la lourdeur d'une procédure directe arithmétique ou algorithmique, soit par la grandeur des valeurs numériques en jeu,

– qu'une formule générale soit demandée, sollicitant l'expression d'une loi pour la relation fonctionnelle étudiée. L'étude de suites numériques peut être un début pour déboucher sur un cadre fonctionnel, cependant limité aux fonctions d'entiers. Il conviendrait de poser aussi des problèmes mettant en jeu des variables réelles, comme des grandeurs géométriques par exemple.

Conclusion

Certains contextes sont susceptibles de concerner l'idée d'un lien fonctionnel se situant dans l'implicite à un niveau intuitif, très personnel. Une exploitation de ce type de problème dans le cadre didactique suppose de préciser comment un professeur peut faire passer ses élèves de cette appréhension de l'*idée* de fonction à la *notion* plus explicite de fonction comme outil de résolution du problème. Ce terme de notion renvoie, selon Larousse, à l'idée de *faire comprendre*. Cet objectif suppose donc d'avoir à considérer une relation entre des variables qui soit générale, tout en restant à la portée des élèves et ayant du sens par rapport au contexte habillant le problème.

Le *concept* de fonction, par contre, est plus particulièrement lié à la définition mathématique et aux propriétés intrinsèques des fonctions (univocité, variations, représentations analytiques et graphiques, continuité, …) et au vocabulaire associé. A ce niveau d'abstraction, se situant par rapport à leurs connaissances mathématiques un peu stabilisées, beaucoup d'élèves interprètent ce concept nouveau au travers de leur pratique de la linéarité ($(a+b)^2 = (a)^2 + (b)^2$) ou de la monotonie.

Les problèmes du RMT semblent trop simples en général pour faire intervenir naturellement la notion de fonction. Il serait nécessaire de leur adjoindre un obstacle épistémologique/notionnel, notamment l'introduction de grandeurs variables, qui rende nécessaire l'expression d'une loi modélisant la situation pour atteindre le niveau notionnel souhaité. Par ailleurs la plupart de ces problèmes concernent les nombres entiers et renvoient à des modèles linéaires. Les élèves peuvent dès lors faire appel à la proportionnalité et à son traitement numérique, algorithmique ou même arithmétique.

Il existe divers degrés de difficultés dans la mise en œuvre d'une solution se situant dans le cadre fonctionnel: tableau, représentation graphique, loi ou formule, traitement algébrique... Cependant ces types de résolutions ne sollicitent pas le même degré d'abstraction et s'ordonnent hiérarchiquement selon la complexité et le degré d'abstraction nécessaire à chacune. Le couple objet-image relève d'une abstraction élevée et n'est pas spontané. Il s'agirait donc de repenser le statut de ce couple dans les problèmes proposés.

Les objets mathématiques présents dans les problèmes du RMT relèvent de deux niveaux: le niveau expert (concept) et le niveau de type *mise en œuvre* (fonctionnement d'une notion comme outil de résolution de problème). Lors de l'élaboration d'un problème, il convient de s'interroger sur le niveau que l'on cherche à atteindre et, le cas échéant, de réfléchir sur les conditions nécessaires que devrait réunir une situation-problème pour conduire effectivement à l'élaboration du concept de fonction.

Bibliographie

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris, Vrin.

GASQUET, S. (1997). "Les functions". In: LEGRAND, P. (ed.). *Profession enseignant, les maths en collège et en lycée.* Paris, Hachette Education.

GRUGNETTI, L.; MAFFINI, A. et MARCHINI, C. (2001). "Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'Épistemologie et de l'Histoire des Mathématiques pour en clarifier le sens". In: RADELET-DE GRAVE, P. (ed.). *Histore et épistemologie dans l'éducation mathématique "De la maternelle à l'université".* Actes de l'Université d'été 1999 d'Épistémologie et Histoire des Mathématiques, v. I, pp. 421-443.

HAREL, G. e DUBINSKY, E. (eds.) (1992). The concept of function. *Mathematical Association of America*, v. 25.

JAQUET, F. (2001). "Le traitement d'une fonction, obstacles et représentation*s,* le funzioni, ostacoli e rappresentazioni". In: GRUGNETTI, L.; JAQUET, F.; CROCIANI, C.; DORETTI, L. e SALOMONE, L. (eds.). *Èvolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*. Actes des 3ème et 4ème journées d'études sur le RMT de Sienne et Neuchâtel*,* ARMT, pp. 38- 56.

MAFFINI, A. (2001). "Un analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore". In: ANICHINI, G. (ed.). *Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000* (in ricordo di Francesco Speranza). Atti XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'Insegnamento della Matematica: NUMI, suppl. al n.10, ottobre, pp. 150-152.

MARCHINI, C. (s.d.). "Il concetto di funzione nella scuola italiana". In: D'AMORE B.; FERRARI M.; MALARA N. A. e ZAN R. (eds.). *Volume di documentazione delle ricerche italiane per l'America latina*.

______(1998). "Analisi logica della funzione". In: GALLO, E., GIACARDI, L. et ROERO, C. S. (eds.). *Conferenze e Seminari Associazione Subalpina Mathesis 1997-1998*, pp. 137-157.

PIOCHI, B. (ed.) (1994). Funzioni, limiti, derivate. *4° Incontro NRD Scuola Secondaria Superiore, Siena 10-12 marzo 1994*. IRRSAE, Toscana.

TALL, D. (1996). "Functions and Calculus". In: BISHOP, A. J. et alii (eds). *International Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers, pp. 289-325.

YOUSCHKEVITCH, A. (1981). "Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXè siècle". In: *Fragments d'histoire des mathématiques.* Brochure APMEP n. 41, pp. 7-68. Bellemin J. M. (trad.). *Archive for History of Exact Sciences,* t. 16, Springer, 1976.

Recebido em jun./2006; aprovado em jul./2006.