



## CAPÍTULO II

# CURSILLOS

### Pensamiento Numérico

UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO  
JOSÉ DE CALDAS

JAIME HUMBERTO  
ROMERO CRUZ

Debo empezar por hacer referencia a los amigos y colegas de trabajo, en particular al grupo de investigación Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Matescud) pues del intercambio con ellos aparecen todas las ideas que expodré.

La Asociación Colombiana de Matemática Educativa ha decidido abordar en este encuentro un aspecto crucial para la mejor comprensión de las peticiones y obligaciones que se formulan en los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 1998). Entre las peticiones y obligaciones aludidas se encuentra, por ejemplo:

1. La adopción de una perspectiva didáctica centrada en la teoría de la transposición didáctica (Chevallard y Joshua, 1985) que asegura la diferencia entre el saber generado por las disciplinas específicas y el saber a enseñar en las instituciones escolares, diferencia que reconoce necesaria puesto que el profesor no trabaja con el saber científico mismo sino que recoge una adecuación del contenido disciplinar realizada por los didáctas, los organizadores de currículo y los escritores de textos, adecuación que es lo que finalmente dispone como enseñable en el aula.

2. La adopción de una perspectiva cultural de la educación matemática ya que “...se reconoce hoy el contexto cultural como elemento importante que puede proveer al individuo de aptitudes, competencias y herramientas para resolver problemas y para representar las ideas matemáticas” y además “ diferentes culturas han llegado a desarrollos matemáticos similares...y han realizado actividades matemáticas semejantes como el contar, medir, diseñar, jugar y explicar...” resolución de problemas como metodología
3. La adopción como uno de los propósitos de formación para los estudiantes el de su desarrollo de pensamiento matemático y de manera particular el desarrollo de su pensamiento espacial, métrico, variacional, aleatorio y numérico. Éste último concebido siguiendo a Mcintosh (1992) “...se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones”
4. Como consecuencia de la anterior adopción aparece el trabajo por resolución de problemas ya que de acuerdo con Dubinsky (1991 p. 103) “...estos actos de reconocer y resolver problemas, de formular nuevas preguntas y crear nuevos problemas son (en nuestra opinión, esencialmente<sup>1</sup> los únicos) medios por los

<sup>1</sup> El énfasis es de Dubinsky.

*cuales un sujeto construye nuevo conocimiento matemático.*

Así, en realidad, los lineamientos curriculares propenden, y estoy de acuerdo, por la transformación cultural de la matemática escolar y de la educación matemática centradas en el aprendizaje de los estudiantes. Pero esta transformación cultural pasa por la del conocimiento base de los profesores y por la de sus concepciones acerca de su profesión. Desde este último punto de vista, para esta charla se impone el tema sobre el aprendizaje de lo numérico.

**Las tesis centrales** que defenderé en este cursillo son dos:

1. El carácter multiplicativo de la suma de números naturales
2. El poder generativo del aprendizaje de los niños y jóvenes al rededor de lo numérico se pierde progresivamente en la escuela principalmente por la imposición que esta institución realiza sobre y en detrimento del conocimiento de los escolares.

Dada la extensión que requiere este tratamiento, en este resumen presento además de lo ya dicho, una manera de concebir aprendizaje de matemáticas y conocimiento matemático.

### El aprendizaje

Para algunos autores como Vergnaud (1990) y Dubinsky (1991) es una modificación incremental de un esquema y desde allí debemos caracterizar el aprendizaje de las matemáticas. Piaget enfatizó en que ningún aprendizaje es producto de una abstracción de las cualidades de los objetos físicos, sino mínimo de las cualidades de las acciones del sujeto sobre su mundo de experiencia (esta es la abstracción empírica y produce los objetos físicos) por eso, afirma que *“Toda acción que es repetible o generalizable a lo largo de nuevos objetos, engendra... un esquema”* Piaget (1980), en la que debe entenderse que la posibilidad de la repetición recae sobre el sujeto que engendra su esquema, y al esquema generado como el aprendizaje del sujeto. Ahora bien, existe también la abstracción pseudoempírica que obtiene su material básico del generado mediante las abstracciones empíricas, produciendo entonces esquemas de relación entre las acciones del sujeto y los productos de la abstracción empírica, y finalmente la abstracción reflexiva obtiene su material básico de los productos de la abstracción pseudoempírica obteniendo relaciones entre estos productos, así que, en este punto tenemos que los esquemas generados son

relaciones de relaciones. La diferenciación de estos tipos de abstracción Dubinsky (1991, p. 99) la resume *“...la abstracción reflexiva difiere de la abstracción empírica en que trata la acción como opuesta a los objetos, y difiere de la abstracción pseudo empírica en que no trata tanto con las acciones mismas sino más bien con las relaciones entre las acciones”*. En ese último nivel se genera los esquemas que dan cuenta que se ha producido un aprendizaje en matemáticas; es decir, la abstracción reflexiva es el modo de producción de aprendizaje en matemáticas y por lo tanto, define también la naturaleza del pensamiento matemático. Conviene entonces detallar un poco más este modo de producción (que permite obtener formas metodológicas de mirar aprendizaje en el aula). Dubinsky (1991, p.101) propone cinco formas de abstracción reflexiva:

- **Interiorización.** Con la aparición de la habilidad para usar símbolos, lenguaje, dibujos, e imágenes mentales, los niños realizan abstracciones reflexivas para representar (Piaget, 1970a, p.64), esto es como una manera de construir sentido de los fenómenos percibidos...
- **Composición.** *...la composición, coordinación de dos o más procesos para construir uno nuevo. Esto se distingue de la frase de Piaget, “coordinación general de las acciones” la cual se refiere a todas las formas de coordinación de una o más acciones para construir nuevas acciones u objetos.*
- **Encapsulación** ...o conversión de un proceso (dinámico) en un objeto estático. Como dijo Piaget (1985, p. 49) *“...las acciones u operaciones llegan a ser tematizadas como objetos de pensamiento o asimilación”*. Consideró que *“A la totalidad de las matemáticas se les puede por eso pensar en términos de la construcción de estructuras, ... las entidades matemáticas se mueven desde un nivel hacia otro; una operación sobre tales ‘entidades’ llegan a convertirlo en un objeto de la teoría, y este proceso se repite hasta que investigamos estructuras que son estructuraciones alternativas o son estructuradas por estructuras más fuertes”* (Piaget, 1972, p.140).
- **Generalización.** Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema a una colección más amplia de fenómenos, decimos que al esquema se le ha generalizado. Esto puede ocurrir porque el sujeto se vuelve consciente de la más amplia aplicabilidad del esquema. También puede suceder cuando a un proceso se le encapsula en un objeto como, por ejemplo, la razón de dos cantidades, o también, cuando se aplica un es-

quema existente como igualdad o adición para obtener, respectivamente proporción o multiplicación. El esquema permanece igual, solo que tiene una mayor aplicabilidad. El objeto cambia para el sujeto en el sentido que ahora lo ve como asimilable por el esquema extendido.

- **Inversión.** Una vez existe internamente un proceso, es posible para el sujeto pensar en reversarlo, no necesariamente en el sentido de deshacerlo, pero sí como un medio para construir un nuevo proceso consistente en invertir el proceso original. Aunque Piaget no lo discutió en el contexto de la abstracción reflexiva.

## Esquema

Como Dubinsky (1991, p.102) lo concibe es “...una colección más o menos coherente de objetos y procesos” mientras que Von Glasersfeld (1980, citado por Steffe) opta por una caracterización funcional y entonces lo describe como un arreglo de tres partes, primero, existe una situación experiencial (es decir una situación concebida por el niño como, “provocadora, incitante” con la cual una actividad y sus resultados se les ha asociado); segundo, existe una actividad o procedimiento específicos del niño; y tercero, existe un resultado (nuevamente, percibido así por el niño) en la que resalta el carácter anticipatorio y propositivo del esquema. Este carácter funcional y propositivo Dubinsky (1991, p.102) se lo asigna más bien al conocimiento del sujeto como se constata cuando afirma “La tendencia de un sujeto a invocar un esquema para comprender, tratar, organizar o dar sentido a una situación problema percibida es su conocimiento de un concepto individual en matemáticas. Anotamos también que la idea de esquema ha sido trabajada por Duval (1999), D’Amore (2000) durante los últimos años a partir de los registros de representación semiótica, idea que tendré en cuenta para efectos de esta charla

## Conocimiento

A pesar que sus definiciones de esquema son diferentes, tanto Steffe como Dubinsky, comprenden lo mismo por conocimiento, en ambos casos aparece la intención de actuar para resolver una situación percibida como problema, sólo que Steffe asegura la intención a través de la existencia del esquema mismo mientras que Dubinsky la asegura a través de la “tendencia de invocar un esquema para...”. Esto significa que sin situación a resolver, sin problema a atacar, sin un sentido para la acción, no es posible hablar del conocimiento de un individuo, ni tampoco de conocimiento científico

como afirma Bachelard (1975) “Para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada viene solo, nada es dado. Todo es construido”. Así pues, lo que reposa en los libros y revistas es tan solo una posibilidad de conocimiento que se realiza cuando se lee aquello que allí reposa a propósito de un interrogante propio.

## Referencias bibliográficas

BACHELARD, G. (1975) *La formación del espíritu científico*. (J. Babini, trad.), Buenos Aires: Siglo XI

CHEVALLARD, Y. et JOHSUA, M. (1985) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble :La pensée sauvage

D’AMORE, B. (2000) *Semiotica e noética nell’apprendimento dei concetti matematici*. En: B: D’Amore (ed.) *Matemática e didattica: tra sperimentazione e ricerca*. Pitágora, Bologna 2000, 37-48.

DUBINSKY, E. (1991) *Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking* In: D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking*. pp. 127-139. Dordrecht :Kluwer Academic Publishers.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega, trad.), Cali: Universidad del Valle. (Publicación original 1995)

MCINTOSH, A.; REYS, B.; y REYS, R. (1992) *Proposed framework for examining basic number sense*. For the learning of mathematics 12, 3 (nóvember 1992) British Columbia Canadá : FLM Publishing Association. Citado en MEN (1998)

MEN (1998 ). *MATEMÁTICAS: Lineamientos Curriculares*. Bogotá :Creamos Alternativas

PIAGET, J. (1980) *The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance*. In *Lenguaje and learn: The debate between Jean Piaget and Noam Chomsky*, (Ed) Massimo Piattelli-Palmarini. Cambridge, MA :Harvard University Press. Citado por Steffe (1994)

PIAGET, J. (1985) *The equilibration of cognitive structures*. (T. Brown and K. J. Thampy, trans.), Harvard University Press, Cambridge MA (original published 1975). Citado por Dubinsky (1991)

STEFFE, L. (1994) *Children’s Multiplying Schemes*. In G. Harel and J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the Learning of mathematics. Research in Mathematics Education Series*. Albany, NY :State University of New York Press. pp. 3-39.

VERGNAUD, G. (1996) *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. (L. Ortega, trad.), México: Trillas. (Traducción de la tercera edición 1985)

von GLASERSFELD, E. (1980) *The concept of equilibration in a constructivist theory of knowledge*. In: *Autopoiesis, communication and society*, (Ed) F. Benceler, P. M. Hejl and W. K. Kock. New York :Campus. Citado por Steffe (1994)