La marque d'une transformation géométrique. Un exemple de modélisation didactique

MAMADOU SOULEYMANE SANGARÉ*

Résumé

Le présent texte est issu d'un travail de recherche en didactique des mathématiques, centrée sur la construction d'un modèle de l'objet « transformation géométrique » qui doit être à la fois correct sur le plan théorique et pertinent sur le plan didactique. Nous étudions d'abord les questions liées à la prise en charge par les élèves en début de lycée, des différents modes de correspondance entre figures objet et image par une transformation. L'accent est mis en particulier sur l'analyse des significations et statuts donnés aux traits de construction qui joignent les points de la figure objet à leurs homologues respectifs de la figure image. Nous situons ensuite le phénomène par rapport à un domaine théorique d'étude qui prend appui sur certains concepts de didactique des mathématiques. Nous proposons alors une modélisation des transformations géométriques à partir de ces traits. Enfin, nous présentons quelques résultats d'une étude de cas au Mali qui met à l'épreuve ces traits de construction, à la fois comme outils de modélisation des transformations de figures et comme moyen didactique d'évolution de conceptions d'élèves.

Mots-clés: transformations géométriques; transformations de figures; transformations de points; figures géométriques; représentation et traitement de figures; marques d'une transformation; modélisation didactique; conceptions d'élèves; conceptions « intrafigurales »; conceptions « interfigurales ».

Resumo

O presente texto é uma parte de uma pesquisa em didática da matemática centrada na construção de um modelo do objeto "transformação geométrica", modelo que deve ser, ao mesmo tempo, correto do ponto de vista teórico e pertinente do ponto de vista didático. Estudamos, em primeiro lugar, as questões ligadas à questão de como os alunos lidam, no início do ensino médio, com diferentes modos de correspondências entre figuras-objeto e imagem por uma transformação. O foco do estudo está colocado essencialmente sobre a análise das significações e estatutos dados aos traços de construção que ligam os

* Équipe de Didactique des Mathématiques (EDiMath) – D.E.R. de Mathématiques – École Normale Supérieure de Bamako, BP. 241, MALI. E-mail: mamadoussangare@yahoo.fr

pontos da figura-objeto aos pontos correspondentes respectivos da figura imagem. Situamos, depois, o fenômeno em relação a um campo teórico de estudo que se apóia sobre alguns conceitos de didática da matemática. Propomos então uma modelagem das transformações geométricas a partir desses traços. Enfim, apresentamos alguns resultados de um estudo de caso feito no Mali, envolvendo esses traços de construção, ao mesmo tempo como ferramenta de modelagem das transformações de figures e como instrumento didático para fazer evoluir as concepções de alunos.

Palvras-chave: *transformações geométricas; transformações de figuras; transformações de pontos; figuras geométricas; representação e tratamento de figuras; marcas de uma transformação; modelagem didática, concepção de alunos; concepções "intra-figurais"; "concepções-inter-figurais".*

Abstract

The present text is the result of a research study in didactics of mathematics. The study focuses on the problem related to the construction of a model of the object "geometric transformation", which must be both correct in terms of theory and relevant in terms of didactics. First, we study the questions related to the appropriation by students, when they start high school in Mali, of the different modes of correspondence between object-figures and image through a transformation. We particularly stress the analysis of meanings and of the statuses given to construction lines, which link the points of the object-figure to their respective counterparts in the image figure. We then situate the phenomenon in relation to a theoretical field of study, which relies on certain concepts of the didactics of mathematics. Afterwards, we propose a modelling of geometric transformation based on the lines. Finally, we present some results of a case study carried out in Mali, which tests the lines of construction both as modelling tools of figure transformations and as didactic instruments to make students' conceptions evolve.

Key-words: *Geometric transformations; Figures transformations; Points transformations; Geometric figures; Figures representation and treatment; Transformation marks; Didactic modelling; Students' conceptions; "Intra-figures" conceptions; "Inter-figures" conceptions.*

Introduction

La reforme des programmes de 1990 au Mali a consacré de façon institutionnelle, le retour de *la géométrie des figures* au second cycle fondamental[1] et au lycée. Ce choix de transposition didactique s'est traduit au niveau de l'enseignement des transformations géométriques planes, par l'étude de leurs actions respectives sur les «configurations de base au sens de A. Robert (1995, p.26 ». Les travaux de Destainville (1990) intitulés, « Transformations et configurations du collège à la seconde », se situent par rapport à ce point de vue. Cependant, on constate dans les pratiques de classes une forte « contextualisation » des transformations dans les seules configurations de base. Cela ne permet pas de rendre

1 Le second cycle fondamental au Mali correspond à peu près au collège en France.

problématique certaines de leurs propriétés géométriques. C'est le cas par exemple des propriétés de conservation liées aux transformations qui sont le plus souvent introduites de façon ostensive.

D'autres types de configurations peuvent jouer un rôle significatif de l'apprentissage des transformations du plan. En effet, pour la résolution de problèmes de construction de la transformée d'une figure, de problèmes de reconnaissance et (ou) de caractérisation d'une transformation, les élèves effectuent des constructions supplémentaires sur la figure initiale pour la recherche de parties homologues. En particulier, ils procèdent à des tracés de « traits » dans des tâches d'identification de couples de points homologues. Cet article expose comment peut-on modéliser une transformation géométrique à l'aide de ces traits, à la fois du point de vue de sa représentation dans le registre graphique, du point de vue d'une nouvelle configuration qui lui est attachée.

Problématique'

Les questions relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des transformations géométriques ont été l'objet de plusieurs travaux de recherche. Notre étude s'appuie principalement sur les résultats de Bautier (1988) comme apport à la modélisation des activités d'enseignement sur la symétrie orthogonale, de Grenier et Laborde (1988) à propos de « niveaux d'appréhension des transformations », de Laborde et Capponi (1995) à propos de la « modélisation à double sens » liée à l'apprentissage des transformations, et ceux de Jahn (1998) à propos de « rupture épistémologique par rapport à la transition collège/lycée » sur les transformations géométriques du plan.

L'objet d'Étude

Notre problématique peut être introduite par les questions soulevées par le problème ci-dessous.

Le triangle ABC est isocèle avec $AB = AC$. La rotation d'angle représenté par θ transforme ABC en XYZ qui a été effacé sauf le point X, transformé du point A. (Fig.1).

1) Peux-tu reconstruire le triangle XYZ ? Explique ta construction.

2) Détermine le centre I de cette rotation. Justifie ta réponse.

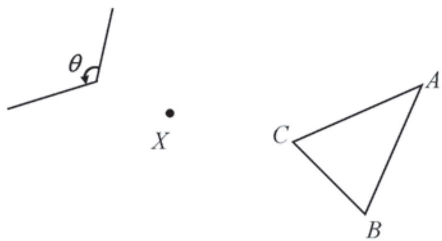


Fig. 1

L'utilisation des connaissances géométriques liées aux seules configurations de base ne permet pas a priori aux élèves de 10e de résoudre ce problème. Cette résolution suppose que certaines propriétés liées à la rotation sont disponibles et opérationnelles à leur niveau dans le contexte de configurations non usuelles dans nos pratiques de classe.

Etude de faits didactiques

L'analyse menée dans ce paragraphe porte sur quelques faits didactiques tirés de travaux de recherche relatifs aux transformations de figures. Il s'agit, d'étudier comment sont pris en charge les problèmes de correspondance entre figures objet et image par une transformation géométrique du plan.

L'expérimentation de Métrégiste

Une synthèse de l'expérimentation : L'expérimentation décrite par Métrégiste est menée avec des élèves de 4ème et de 3ème pendant deux années scolaires consécutives.[2] Les séquences proposées s'articulaient autour de trois environnements différents : le papier/crayon, les

2 1978-1979 et 1979-1980.

machines mécaniques réalisant des transformations et les calculatrices «*préprogrammables*» (HP29).

Les objectifs d'apprentissage pour les élèves sont les suivants :

– Transformer des figures par différentes méthodes de construction.
– Reconnaître et classer des transformations.
– Repérer les propriétés et les invariants de chaque transformation.
– Confronter différents modes de représentation avec la réalité physique. (Métrégiste, 1984, p. 37)

Deux résultats du test de contrôle : À l'issue de cette expérimentation un test de contrôle est effectué. Les exercices proposés doivent être résolus principalement dans l'environnement papier/crayon. Les élèves ont en général à exécuter des tâches de construction de transformées de figures ou des tâches de reconnaissance d'une transformation à partir de deux figures homologues.

Une réponse d'élève à une tâche de construction d'image : La situation proposée aux élèves comporte trois tâches relatives à la symétrie orthogonale (*Fig. 2*) :

– Construction du symétrique par rapport à une droite notée (D) d'un quadrilatère quelconque $ABCE$;
– Description de cette construction ;
– Description des propriétés observées liées à la symétrie orthogonale.

Pour cet élève, la description de sa construction est donnée par le texte ci-dessous, la figure obtenue est ci-contre (Fig. 2).

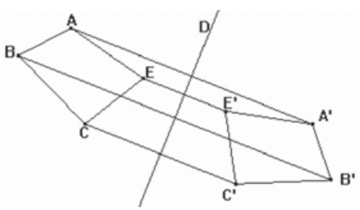


Fig. 2

> *J'ai tracé, avec l'équerre, les **droites de liaisons**[1] perpendiculaires à l'axe de symétrie D en passant par A, B, C, E. En pointant sur l'axe D j'ai pris l'écartement D-A ; même chose pour B, C, E, je l'ai reporté de l'autre côté de l'axe en faisant la même chose pour les 3 autres points. J'ai lié les 4 points pour former la figure.* (Ibid., 1984, p. 64)

Le même élève formule ensuite les propriétés liées à la symétrie orthogonale :

> *Les **droites de liaisons** sont coupées en leur milieu par l'axe D ;*
> *Elles sont perpendiculaires à cet axe.*
> *Elles sont parallèles entre elles.*
> *Si on prolonge les segments de droites de la figure ils se coupent sur l'axe de symétrie D.* (Ibid., 1984, p. 64)

Cette production d'élève est significative de certains rôles joués par ce qui est désigné dans la relation didactique par « droites de liaisons » :

> – Les «droites de liaisons» sont des outils[3] de construction de transformés des sommets du quadrilatère *ABDE*.
> – Les «droites de liaisons» ont permis à cet élève de formuler les trois premières propriétés sur les quatre observées, à propos de la symétrie orthogonale.

<u>Réponses d'élève à une tâche de reconnaissance d'une transformation</u> : Nous donnons ci-dessous les réponses d'un même élève dans trois tâches de reconnaissance d'une transformation donnée à partir de deux figures homologues (un couple de triangles) par, une translation, une symétrie centrale et une symétrie orthogonale.

3 Au sens de Douady (1986).

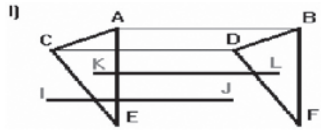


Fig. 3

C'est une translation rectiligne parce que les ***droites de liaison sont parallèles****. Elles sont isométriques. (ibid. p. 67)*

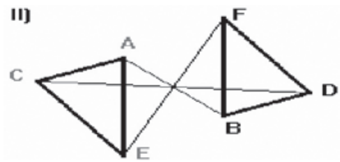


Fig. 4

C'est une symétrie centrale parce que ***toutes les droites de liaison sont concourantes****. Les points correspondants sont à égale distance du centre de symétrie. (ibid. p. 67)*

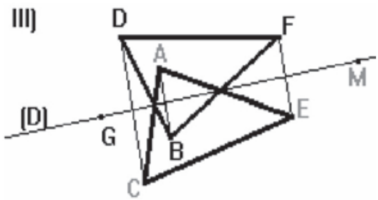


Fig. 5

C'est une symétrie orthogonale parce que ***les droites de liaison sont parallèles****,* ***se coupent en leur milieu par la droite D qui est la médiatrice*** *et 2 points invariants pour refaire la figure. (ibid. p. 67)*

Cette production suscite les remarques suivantes.

– L'interprétation géométrique de ces traits de construction conduit cet élève à formuler selon le cas, des relations entre droites comme c'est le cas dans l'expression « *les droites de liaison sont parallèles* » (Fig. 3) ou encore, des configurations entre segments de droites comme on peut le constater dans l'expression, « *les droites de liaison …se coupent en leur milieu par la droite D* » (Fig. 5).

– Les trois textes associés aux figures, montrent bien que les configurations obtenues à partir des «*droites de liaison*» apparaissent dans la démarche de résolution, comme des outils de contrôle.

En résumé, nous disons que ces traits de construction ne sont pas neutres dans la relation didactique même s'ils apparaissent en général sous la forme d'outils implicites de résolution de problèmes.

La notion de « trace » dans les travaux de Lemonidis

Les travaux de Lemonidis (1991) portent sur une expérience d'enseignement de l'homothétie en classe de seconde. Notre intérêt porte essentiellement sur la première séance « consacrée à l'aspect figuratif de l'homothétie et plus précisément sur la construction du centre d'homothétie (Lemonidis, 1991, p. 306) ». Le terme « trace », utilisé dans l'analyse des tâches de détermination du centre d'une homothétie selon que l'on a un rapport d'homothétie positif ou négatif est défini comme ci-dessous :

> On appelle **trace** la droite joignant un point à son image. Pour des configurations de figures homothétiques faisant apparaître des traces nous distinguons les deux types :
>
> a) configuration de figures homothétiques avec le rapport positif (C_1) ;
>
> b) configuration de figures homothétiques avec le rapport négatif (C_2).
>
> (Lemonidis, 1991, p. 308)

De plus, on peut lire que pour la configuration (C_1), « ***les traces sont concourantes en un point qui est le centre de l'homothétie***[4] (ibid. p. 308) ». Cette propriété est vraie aussi pour la configuration (C_2). Ainsi, la trace constitue chez Lemonidis non seulement un outil de détermination du centre d'homothétie mais aussi un élément constitutif de la structure de contrôle mise en œuvre pour cette détermination.

4 C'est nous qui le mettons en gras.

Synthèse

L'utilisation fréquente et variée de ces traits de construction dans la résolution de problèmes par les élèves, semble indiquer que l'on est en présence de faits didactiques non contingents. Appelés «droites de liaison» ou «traces», considérés tantôt comme segments, tantôt comme droites, ils sont significatifs de certaines connaissances géométriques mises en œuvre par les élèves. En conséquence, leur étude est pertinente en tant que phénomène didactique lié à l'enseignement et à l'apprentissage des transformations géométriques.

De leur statut d'outil implicite dans la relation didactique, nous nous proposons d'étudier ces traits de construction en tant qu'objet en cherchant des réponses aux questions suivantes :

- Quels sont les types de problèmes dans lesquels les élèves font intervenir ces traits de construction ?
- Quels rôles jouent-ils dans la résolution de problèmes ?
- Ces traits de construction sont-ils significatifs de l'état de connaissances des élèves à propos des transformations géométriques du plan ?
- Peut-on modéliser ces traits en termes d'objet de connaissances autour de nouvelles configurations liées aux transformations géométriques ?

Des faits didactiques au phénomène didactique

Les types problèmes

Les problèmes retenus dans cette étude sont parmi ceux qui sont proposés généralement dans nos pratiques de classes, au second cycle fondamental et au lycée.

- Problèmes de construction de la transformée d'une figure usuelle donnée ;
- Problèmes de reconnaissance et (ou) de caractérisation d'une transformation à partir de la donnée d'un couple de figures homologues.

Diversité du rôle de ces traits de construction ; leur caractère polysémique

L'analyse des deux travaux cités ci-dessus, montre que ces traits de construction jouent différents rôles dans la résolution de problème dont les plus importants sont :

– outil de construction d'une figure donnée par une transformation;
– outil de détermination des éléments caractéristiques d'une transformation;
– outil de contrôle d'une conjecture faite sur l'identification d'une transformation;
– représentation graphique de la relation fonctionnelle liée à la transformation en jeu ;
– représentation graphique de la distance entre deux points homologues par une transformation.

Par ailleurs, un trait de construction joignant un point de la figure à son homologue de la figure image par une transformation géométrique, peut être l'objet d'interprétations différentes en géométrie. On peut le considérer entre autres comme :

– une droite ;
– une demi-droite ;
– un segment ;
– un vecteur.

Construction du Modèle

Fondement théorique du modèle

Le modèle prend appui sur certains concepts de didactique des mathématiques. Nous donnons pour chacun d'eux, une idée sommaire sur les aspects qui interviennent dans le processus de modélisation.

Le modèle selon Durand

Durand (1994) définit le modèle comme ci-dessous :

> D'un point de vue épistémologique, le modèle a un statut intermédiaire entre l'objet réel et une théorie scientifique : il est une représentation du réel, simplifiée pour être intelligible ; par

> rapport à une théorie scientifique, il a valeur expérimentale, c'est souvent une étape intermédiaire dans la recherche du savoir, mais il peut aussi être partie intégrante de la théorie. (Durand D. 1994, p. 60)

Nous retiendrons pour cette étude à la fois le « statut intermédiaire » et la « valeur expérimentale » du modèle par rapport à une théorie scientifique, celle des transformations géométriques.

Le modèle par rapport à la transposition didactique

Le modèle à construire peut être considéré comme un « produit » relevant du processus de la transposition didactique. A ce sujet, nous partageons le point de vue de Amigues R. (2001) :

> L'école transmet des savoirs enseignés qui ne sont ni des savoirs savants ni des savoirs simplifiés, mais des savoirs scolaires spécifiquement reconstruits pour être transmis. La théorie de la transposition didactique rend compte de ce processus de transition, de fabrication et de transmission de contenus scolaires. (Amigues R., 2001)

La modélisation didactique proposée se situe dans le cadre de cette reconstruction permanente du savoir scolaire.

La représentation et le traitement des figures selon Duval

Pour les niveaux scolaires relatifs à la transition collège/lycée, les pratiques de classes observées par rapport à l'enseignement des transformations de figures planes, font essentiellement recours aux registres suivants de représentation et de traitement: le graphique, la langue naturelle, le langage algébrique.

L'utilisation de ces droites (ou segments) dans la résolution d'un problème relatif aux transformations de figures peut être considérée comme une opération de reconfiguration au sens de (Duval, 1995) :

> La reconfiguration est l'opération qui consiste à réorganiser une ou plusieurs sous-figures différentes d'une figure donnée en une autre figure. (Duval, 1995, p. 184)

Fondement méthodologique du modèle

Le modèle de transformation réalisé doit satisfaire trois conditions essentielles.

Une légitimité théorique : La première condition porte sur la « légitimité théorique » du modèle. De façon plus précise il faut que le modèle ait du sens en mathématiques.

> Faire des mathématiques c'est donc accepter de se décaler par rapport aux pratiques quotidiennes en se donnant pour objectif de transformer un questionnement qui intuitivement a du sens, mais qui, à bien y regarder, n'admet pas le plus souvent de réponse certaine, en un autre questionnement qui tout en essayant de garder une part importante du sens initial accepte néanmoins d'en perdre aussi (la réduction des possibles par l'acte de définition) pour pouvoir arriver à formuler un problème plus modeste, mais dont la solution sera beaucoup plus fiable. (Legrand M., 2003, p. 34)

Ainsi, pour que le modèle à construire possède une certaine *légitimité théorique*, il faut faire un choix univoque parmi les interprétations géométriques possibles du trait de construction qui joint un couple de points homologues par la transformation visée.

La dualité « continuité / rupture » dans l'apprentissage des mathématiques : Dans une optique constructiviste, l'apprentissage (en particulier l'apprentissage des mathématiques), s'effectue suivant un processus qui n'est pas linéaire mais discontinu, jalonné de ruptures successives par rapport à l'état des connaissances antérieures des apprenants.

Le problème du sens : Le type de modèle à construire doit avoir du sens pour les apprenants. Cette construction du sens se fait le plus souvent par la résolution de problèmes.

La notion de «marque» d'une transformation

Définition

La définition proposée est la suivante :

> Nous appelons marque d'une transformation, tout segment *{MM'}* qui joint un point *M* de la figure objet à son transformé *M'* sur la figure image.

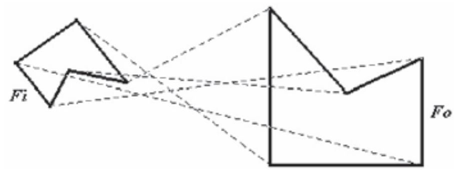


Fig. 6

Les marques constituent une représentation visuelle du lien fonctionnel de la transformation en jeu. Elles peuvent être tracées de façon effective comme elles pourraient être évoquées[2] au cours d'un processus de résolution de problème. Sur la figure ci-contre (Fig. 6), $\boldsymbol{F_o}$ et $\boldsymbol{F_i}$ désignent respectivement les figures objet et image par la transformation en jeu.

Le lien fonctionnel est matérialisé par les marques (traits en pointillés) d'extrémités un point de $\boldsymbol{F_o}$ et son image sur $\boldsymbol{F_i}$.

Remarques

- Pour une transformation donnée *f* et pour tout point M de la figure objet *F*, il existe une et une seule marque *{MM'}* telle que *M' = f(M)*. Cette unicité de la marque par rapport à la transformation et par rapport au point choisi sur *F* donne une signification théorique à cet objet. Cependant pour un point *X* donné, un segment *{XX'}* peut être une marque relative à plusieurs transformations. Cette propriété pourrait être sur le plan didactique, une source d'interférence entre des transformations qui coïncident (globalement ou ponctuellement) sur un ensemble fini (ou non) de points. Il offre ainsi la possibilité de concevoir des problèmes permettant aux élèves de construire des connaissances relatives à la caractérisation géométrique d'une transformation.
- Le choix du segment comme marque d'une transformation est justifié par le fait que dans la transition collège/lycée, la place de la « géométrie de traitement au sens de Rauscher (1994, pp. 291-297) » est encore importante. En effet, le segment est un objet géométrique dont la représentation dans le domaine spatio-graphique peut être entièrement située à l'intérieur de supports graphiques généralement utilisés dans l'enseignement

de la géométrie (feuille de cahier, tableau noir, support plan d'une machine mécanique, écran d'un ordinateur, etc.).

- Pour une transformation donnée *f*, l'existence d'une marque réduite en un point est significative de cette transformation : il s'agit d'un point invariant par *f*. Nous l'appelons ***marque ponctuelle*** ; l'ensemble de telles marques constitue alors l'ensemble des points invariants par *f* [5].
- Pour un couple de figures (*F ; F'*) homologues par une transformation *f*, le nombre de marques pouvant être appréhendées de façon perceptive est lié au nombre de points remarquables de la figure *F*. Sur la figure (Fig. 6), nous avons 5 marques remarquables.
- Enfin, pour la formulation de certaines propriétés géométriques, il est commode d'utiliser selon la propriété à formuler, les « *droites-supports* » des marques (ou des demi-droites liées aux marques) plutôt que les marques elles-mêmes.

Quelques exemples

Notons d'abord que les exemples choisis sont conçus par rapport au point de vue de Robert (1995), sur la différence entre transformation et application dans l'enseignement :

> Nous ne faisons pas de différence entre ces deux mots. Il est toute fois habituel de distinguer dans l'enseignement secondaire les transformations, désignation réservée aux bijections de (ou) sur lui-même, et les applications (de (ou) dans lui-même, non bijectives). (Robert, 1998, p. 25)

Les transformations choisies sont enseignées au collège et (ou) en classe de *2e*. Nous nous intéressons en particulier aux configurations nouvelles, obtenues à partir des marques attachées à ces transformations.

5 Ainsi, on peut écrire que : « *dire qu'une transformation f est l'identité du plan équivaut à dire que toute marque de f est ponctuelle* ». Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que les marques relatives à 3 points non alignés du plan soient ponctuelles.

La projection parallèle

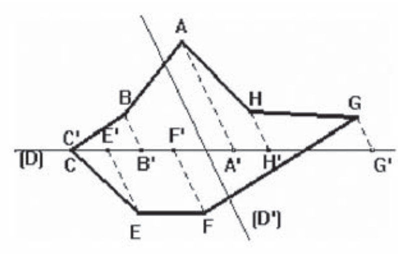


Fig. 7

Fig. 7 bis

Il s'agit ici d'une projection sur la droite (*D*) parallèlement à la direction de droites (*D'*) (Fig.7). Nous pouvons considérer la figure (Fig. 7 bis) comme un modèle extrait de la figure (Fig. 7). Il est alors possible de découvrir certaines propriétés de la projection parallèle à partir des marques. A ce sujet, on peut formuler les propriétés suivantes :

Pour une projection parallèle

(i) Les droites-supports des marques sont parallèles.
(ii) Les transformés de points sont alignés.
(iii) La direction de la projection est la direction de la droite support de toute marque non ponctuelle.
(iv) L'ensemble des marques ponctuelles est une droite qui est la droite de projection.

La symétrie orthogonale

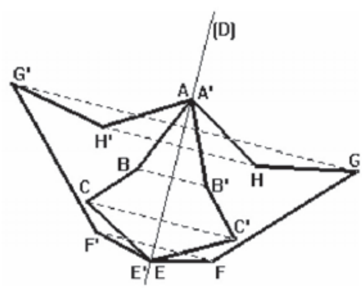


Fig. 8

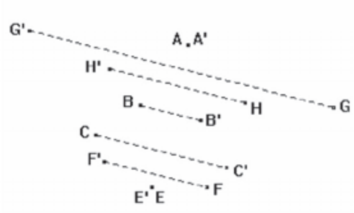


Fig. 8 bis

Il s'agit ici, d'une symétrie orthogonale d'axe *(D)* (Fig. 8). En considérant la figure (Fig. 8 bis) comme un modèle extrait de la figure

(Fig. 8), on peut formuler certaines propriétés de la symétrie orthogonale de la manière suivante :

Pour une symétrie orthogonale :
(i) Les droites-supports des marques sont parallèles.
(ii) Les marques ne sont pas de même longueur
(iii) L'ensemble des marques ponctuelles est une droite qui est l'axe de symétrie.
(iv) Les marques ont même médiatrice.

La symétrie centrale

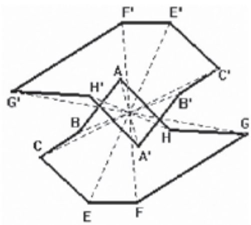


Fig. 9

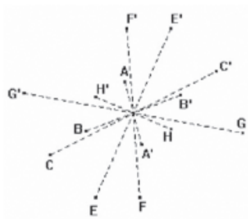


Fig. 9 bis

Il s'agit ici d'une symétrie centrale (Fig. 9). En considérant la figure (Fig. 9 bis) comme un modèle extrait de la figure (Fig. 9), nous pouvons émettre :

Pour une symétrie centrale :
(i) Les marques ont un point commun.
(ii) Les marques ont un milieu commun
(iii) Le centre de symétrie est le point commun à toutes les marques.
(iv) La seule marque ponctuelle est le centre de symétrie.

La translation

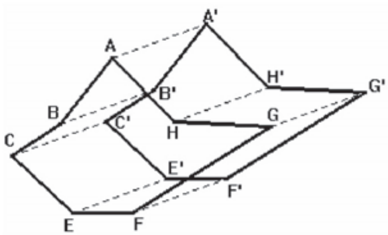


Fig. 10

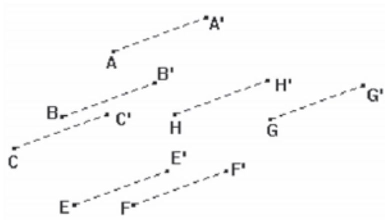


Fig. 10 bis

Il s'agit ici d'une translation (Fig. 10). En considérant la figure (Fig. 10bis) comme un modèle extrait de la figure (Fig. 10), nous pouvons émettre :

Pour une translation :

(i) Les droites-supports des marques sont parallèles.

(ii) Les marques ont même longueur.

(iii) Toute marque est un représentant du vecteur de translation.

(iv) S'il existe une marque ponctuelle, alors toute marque est ponctuelle et le vecteur de translation est le vecteur nul.

La rotation

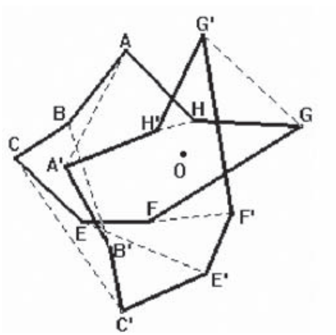


Fig. 11

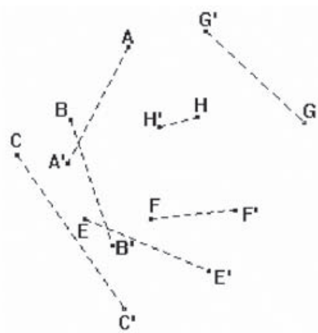


Fig. 11 bis

Le point *O* est le centre de la rotation en question (Fig. 11). La figure (Fig. 11 bis) extraite de la figure (Fig. 11), laisse apparaître visuellement très peu d'indices sur les propriétés de la transformation en jeu. Le modèle à lui seul s'avère sur le plan visuel inhibiteur dans une tâche de découverte de la rotation. Cependant, avec des tracés supplémentaires sur le modèle, nous pouvons émettre :

Pour une rotation :

(i) Les médiatrices des marques sont concourantes.

(ii) Le point commun des médiatrices des marques est le centre de rotation.

(iii) L'angle de rotation est l'angle sous lequel on «voit toute marque non ponctuelle à partir du centre de rotation».

(iv) La seule marque ponctuelle est le centre rotation.

L'homothétie

Nous examinons ici deux cas : lorsque le rapport d'homothétie est positif et lorsqu'il est négatif.

Homothétie de rapport positif :

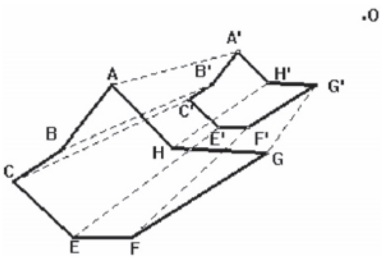


Fig. 12

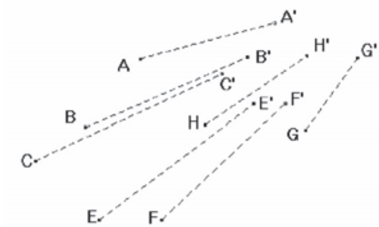


Fig. 12 bis

Nous avons choisi ici l'homothétie de centre O et de rapport 1/2 (Fig. 12). En considérant la figure (Fig. 12bis) comme un modèle extrait de la figure (Fig. 12 nous pouvons émettre à partir des marques, les propriétés suivantes d'une homothétie de rapport strictement positif :

Pour une homothétie de rapport strictement positif :

(i) Les droites-supports des marques sont concourantes.

(ii) Le point commun à toutes les droites-supports des marques est le centre de l'homothétie.

(iii) La seule marque ponctuelle est le centre d'homothétie

Remarque :

Pour ce cas, les marques ne donnent pas de façon immédiate une détermination du rapport d'homothétie qui semble être caché. Cependant, cette valeur peut être obtenue par le rapport des mesures des longueurs d'un segment image et de son antécédent ; il suffit d'avoir deux marques qui n'ont pas la même droite support. Par exemple sur la figure (fig. 12 bis), le rapport d'homothétie est $A'B'/AB$. De plus, le tracé de ces segments peut faire apparaître la propriété de conservation par l'homothétie de la direction de droites.

Pour des points distincts du centre, deux marques d'une homothétie de rapport strictement positif n'ayant pas la même droite support, n'ont aucun point commun : ce sont leurs droites-supports qui sont sécantes. Cette propriété peut être considérée dans le *spatio-graphique*, comme un des critères de distinction entre une homothétie de rapport strictement positif et une homothétie de rapport strictement négatif.

Homothétie de rapport négatif :

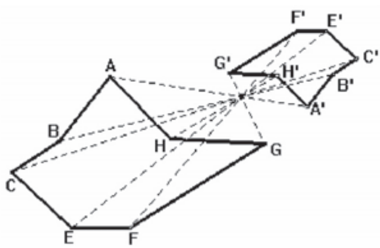


Fig. 13

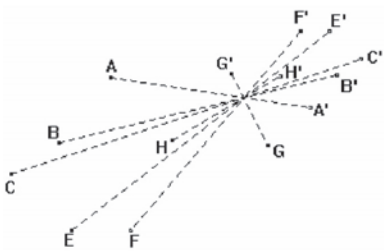


Fig. 13 bis

Nous avons ici une homothétie de rapport ($-1/2$) (Fig.13). En considérant la figure (Fig.13bis) comme un modèle extrait de la figure (Fig.13), nous pouvons émettre à partir des marques, les propriétés suivantes d'une homothétie de rapport strictement négatif :

Pour une homothétie de rapport négatif :

(i) Les marques sont concourantes.

(ii) Le point commun à toutes les marques est le centre de l'homothétie.

(iii) La seule marque ponctuelle est le centre d'homothétie.

(iv) La seule marque ponctuelle est située à l'intérieur de toute marque.

Remarque :

Avec $k < 0$, deux marques de droites-supports distinctes se coupent en la seule marque ponctuelle qui partage en mesure algébrique chaque marque dans le même rapport, celui de l'homothétie en jeu. Le centre d'une homothétie de rapport strictement négatif est obtenu par la propriété d'incidence relative à deux marques de droites-supports distinctes.

Perspectives d`application didactique

Les exemples présentés ci-dessus permettent d'envisager la notion de marque comme *objet géométrique auxiliaire* dans l'enseignement et l'apprentissage des transformations. Nous donnons quelques pistes tout en essayant de justifier leur pertinence.

Une classification des transformations géométriques selon les marques

A partir de cette modélisation, nous établissons une classification des transformations qui dans le domaine *spatio-graphique*, est fondée sur des propriétés relevant pour certaines, de considérations d'ordre spatial et pour les autres, de considérations d'ordre géométrique. Cette classification s'effectue selon deux variables.

Variable liée à la longueur des marques dont les valeurs prises sont :

– «l'égalité des longueurs des marques»;
– «l'inégalité des longueurs des marques».

Variable liée à la position relative des marques dont les valeurs prises sont :

– «le parallélisme des *droites-supports* des marques»;
– «les marques sont concourantes»;
– «les *droites-supports* des marques ne sont pas parallèles et les marques ne sont pas concourantes».

Dans ces conditions, la classification qu'on obtient selon les valeurs données à ces deux variables est la suivante (Tableau 1) :

Tableau 1

Longueurs des Marques / Position des Marques	Les marques sont de même longueur	Les marques ne sont pas de même longueur
Les marques sont parallèles	*Translation*	*Projection parallèle* *Symétrie Orthogonale*
Les marques sont concourantes		*Symétrie Centrale* *Homothétie de rapport négatif*
Les marques sont ni parallèles ni concourantes		*Rotation* *Homothétie de rapport positif*

Ce tableau nous permet de faire quelques observations sur cette classification des transformations par rapport aux configurations obtenues à partir de leurs marques respectives.

La symétrie centrale comme une homothétie de rapport k < 0 :

- Cette classification suivant des configurations liées aux marques, *rapproche* la symétrie centrale à une homothétie particulière de rapport négatif plutôt qu'à une rotation particulière.
- Par ailleurs, il est possible de préciser avec la configuration obtenue par les marques si une homothétie est de rapport positif ou négatif. En effet pour une homothétie de rapport k ($k \neq 0$), donnée :

– Si les marques sont concourantes alors $k < 0$;

– Si non, alors $k > 0$.

Une classification de certaines isométries :

La classification concerne uniquement, la symétrie orthogonale, la symétrie centrale, la translation et la rotation[6]. Ainsi, ces quatre isométries se distinguent les unes des autres à partir des marques puisque dans le tableau (Tableau 1), chacune occupe une et une seule case.

Cas spécifique de la rotation :

La rotation est plus complexe à appréhender à partir des marques que les autres isométries selon les configurations obtenues. En effet, la classification ci-dessus fait de la rotation une « isométrie isolée » pour deux raisons.

---

6 La symétrie glissée ne figure pas dans cette classification, elle doit apparaître en 10e selon les textes de programmes comme la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation. Néanmoins, on pourrait la classer dans la même case que la rotation et l'homothétie de rapport positif. Par ailleurs, les marques d'une symétrie glissée permettent de déterminer son axe par l'opérateur suivant : « L'axe d'une symétrie glissée est l'ensemble des milieux de ses marques ».

– Dans ce modèle, les marques de la rotation ne sont ni de même longueur ni concourantes. En conséquence, ces dispositions n'offrent aucune configuration géométrique significative de cette transformation par la seule « appréhension perceptive, (Duval, 1994, p. 123) ».
– Les éléments caractéristiques d'une rotation (son centre et son angle) étant *cachés* dans le modèle des marques, leur détermination exige la mise en œuvre d'un autre type de traitement de ce modèle, en particulier l'appréhension opératoire qui « est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures (Duval, 1994, p. 126) ». Le tracé des médiatrices des marques relève d'un tel type de traitement.

Une caractérisation de certaines isométries du plan selon la configuration des marques

Lorsque *f* est une isométrie du plan, (*X, Y, Z*) un triplet de points non alignés transformé par *f* en le triplet (*X', Y', Z'*), alors la configuration géométrique obtenue par les trois marques *{XX'}*, *{YY'}*, *{ZZ'}* peut être caractéristique de l'isométrie en jeu[7]. C'est ainsi qu'on pourrait énoncer les propriétés ci-dessous:

Soit *(X, Y, Z)* **un triplet de points non alignés** transformé en le triplet de points *(X',Y',Z')* par une isométrie inconnue *f*.

– Dire que les marques *{XX'}*, *{YY'}* et *{ZZ'}* ont même médiatrice équivaut à dire que *f* est une symétrie orthogonale.
– Dire que les marques *{XX'}*, *{YY'}* et *{ZZ'}* ont même milieu équivaut à dire que *f* est une symétrie centrale.
– Dire que les marques *{XX'}*, *{YY'}* et *{ZZ'}* ont même longueur et que les demi-droites *{XX')*, *{YY')* et *{ZZ')* sont parallèles et de même sens, équivaut à dire que *f* est une translation.
– Dire que les médiatrices des marques *{XX'}*, *{YY'}* et *{ZZ'}* sont concourantes en point *I* et que ces 3 marques sont vues sous le même angle orienté à partir de *I*, équivaut à dire que *f* est une rotation.

7 En effet, une application affine du plan affine dans lui-même est parfaitement déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images respectives.

Ainsi, on peut dire que de telles connaissances liées aux transformations de figures, sont engendrées par le modèle lié aux marques.

Le Modèle à l'Epreuve d'une Expérimentation

Objectifs généraux – Classe de problèmes – Consignes

Objectifs Généraux

Les objectifs généraux de l'expérimentation étaient les suivants :

– Consolider les connaissances d'élèves à leur sortie de 9^e (3^e en France) sur la symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation.

– Proposer des situations favorisant une évolution des conceptions d'élèves sur ces transformations géométriques dans une perspective de transition 9^e – 10^e en souhaitant la mise en oeuvre des marques comme outils de résolution par les élèves.

L'expérimentation s'est effectuée avec 16 élèves de 9^e qui venaient de réussir au D.E.F. (BEPC en France). Signalons qu'au second cycle fondamental, l'enseignement des transformations porte sur la projection parallèle[8], la symétrie centrale, la symétrie orthogonale, la translation et l'homothétie. La classe était organisée en équipes de 4 élèves chacune.

Classe de problèmes

Les problèmes proposés dans la séquence que nous allons décrire peuvent s'exprimer de la façon suivante :

« A partir de la donnée d'un couple de figures $(F_0 ; F_i)$, caractériser la transformation de nature connue, permettant de passer de F_0 à F_i. »

Cette classe de problèmes peut être représentée par le schéma ci-dessous de Vergnaud (1989) (schéma 1).

Schéma 1

8 Nous considérons ici le terme "*transformation*» au sens de Robert A. (1998, p. 25) selon lequel, elle ne fait pas de différence entre applications et transformation.

Les objectifs spécifiques pour cette partie sont les suivants :

– Déterminer le (ou les) élément(s) caractéristique(s) de la transformation indiquée qui permet de passer de F_0 à F_i.

– Construire des moyens de contrôle sur les transformations géométriques fondés sur des critères autres que les seules propriétés globales et spatiales des figures.

Consignes – Items proposés – Gestion de la classe

Consignes :

> *On vous donne la figure F_0 et son image F_i par la transformation indiquée sur la feuille de tâches. On vous demande d'écrire un message qui doit permettre à une équipe partenaire de déterminer l'élément caractéristique de cette transformation.*[9]

La classe est composée de quatre équipes de travail nommées respectivement (*Equipe 1; Equipe 2; Equipe 3; Equipe 4*). Au cours de la phase de bilan, les *Equipes 1 et 2* forment un seul groupe (*groupe 1*) qui est opposé au (*groupe 2*) formé des *Equipes 3 et 4*. Les items aux nombres de six, sont proposés comme suit (cf. annexe 1) :

– Les items $\{X_1, X_2, X_3\}$ pour les équipes *Equipe 1* et *Equipe 2*;

– Les items $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ pour les équipes *Equipe 3* et *Equipe 4*.

La gestion de chaque séquence s'effectue par le professeur assisté de quatre observateurs.

Phase 1 : La résolution et la rédaction du message s'effectuent au sein de chaque équipe.

Phase 2 : Les équipes partenaires se réunissent pour faire une synthèse des résultats trouvés.

Phase 3 : Il s'agit d'une phase de bilan organisée par le professeur entre les deux groupes adverses.

---

9 L'élément caractéristique, pour la symétrie centrale est son centre, pour la symétrie orthogonale sa droite de symétrie, pour la translation son vecteur.

Quelques éléments d'analyse a priori

Les variables didactiques

Les transformations en jeu dans cette séquence sont les trois isométries enseignées au second cycle fondamental[10], la symétrie centrale, la symétrie orthogonale et la translation. Deux variables ont été retenues pour cette expérimentation.

a) *La variable « configuration de base»* :

Nous retenons en général les figures familières au second cycle fondamental telles que :

– pour les polygones convexes, le triangle, le quadrilatère, l'hexagone ;

– pour les figures convexes curvilignes, le cercle par exemple.

La raison de ce choix est que sur les six items proposés (cf. annexes 1), quatre sont relatifs à des polygones convexes, les deux autres (X_3 et Y_2) sont relatifs à des figures curvilignes. Les trois transformations visées étant toutes des isométries, il faut que le couple de figures homologues (F_0, F_i) soit un couple de figures isométriques. Or le nombre d'isométries transformant F_0 en F_i, dépend de la forme de la figure choisie. Etudions par exemple le cas du triangle[11]. Dans ces conditions, (F_0, F_i) est un couple de triangles isométriques, donc le nombre de transformations[12] faisant passer de F_0 à F_i est $3\,! = 6$. Ainsi, le nombre d'isométries parmi les 6 transformations dépend des particularités du triangle F_0.

10 Au Mali les programmes du second cycle fondamental préconisent l'enseignement des projections parallèles en 7e, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale, la translation et l'homothétie en 9e.

11 En ce sens que le triangle est l'une des figures géométriques les plus sollicitées dans le cycle fondamental au Mali.

12 Ici le terme "transformation" est pris dans son sens théorique c'est à dire, une bijection affine.

F_0 est un triangle scalène (fig. 14) : Il n'existe qu'une seule isométrie parmi les 6 transformations qui font passer de F_0 à F_i. L'inégalité deux à deux des longueurs des trois cotés de F_0 permet d'appréhender assez facilement de façon visuelle, les couples de sommets homologues par cette isométrie. Au cas où cette isométrie serait l'une des trois visées, les élèves n'auront aucune peine à la reconnaître et à la caractériser.

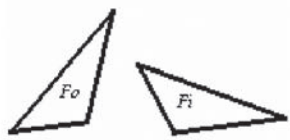


Fig. 14

F_0 est un triangle isocèle (fig. 15) : Il existe exactement deux isométries qui font passer de F_0 à F_i. On peut alors jouer sur la position relative des deux triangles pour que ces deux isométries soient parmi les trois enseignées au second cycle fondamental. Ainsi, la combinaison de certaines valeurs des deux variables « figure de base » et « position relative de F_0 et F_i », peut rendre problématique l'appréhension des couples de sommets homologues par l'isométrie en jeu.

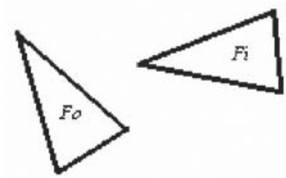


Fig. 15

F_0 est un triangle équilatéral (fig. 16) : Les 6 transformations qui font passer de F_0 à F_i sont toutes des isométries. Cette disposition offre encore plus de combinaisons possibles pour proposer des situations problématiques liées à l'appréhension des couples de sommets homologues par l'une des trois isométries visées.

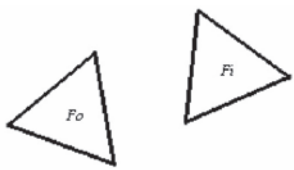


Fig. 16

C'est pour cette raison que les figures polygones intervenant dans les situations proposées auront le plus souvent un centre un axe de symétrie afin de rendre problématique au niveau des élèves la détermination des couples de sommets homologues par la (ou les) transformation(s) en jeu.

b) *La variable* « position relative de F_0 et F_i » :

Selon la position relative des figures objet et image, il est possible de passer de l'une à l'autre par au moins deux transformations connues des élèves. Certaines valeurs de cette variable peuvent a priori, provoquer chez des élèves des interférences entre transformations. C'est le cas par exemple de la situation ci-dessous dans laquelle il est dit :

(F_o ; F_i) représente un couple de carrés homologues par une translation. Détermine le vecteur de translation dans chacun des deux cas ci-dessous.

Fig. 17

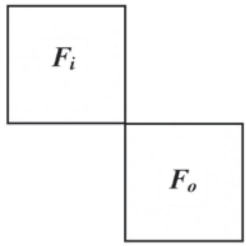


Fig. 18

- Le dessin (Fig.17) représente les deux figures objet et image (F_o et F_i) : leur position relative pourrait induire de façon perceptive d'autres isométries connues (symétrie centrale, symétrie orthogonale) des élèves.
- Le dessin (Fig.18) représente les deux figures objet et image (F_o et F_i) : en plus de l'appréhension d'autres isométries que la translation en jeu, le point commun aux deux carrés est à la fois « point objet » et « point image » ; le double statut de ce point peut être a priori, un facteur d'inhibition à l'appréhension des couples de points homologues.

Les types de contrôle sur les items

Notre stratégie de mise en évidence des types de contrôle exercé par les élèves dans la résolution de problèmes sur les transformations géométriques s'appuie principalement sur l'hypothèse ci-dessous.

Certaines valeurs de la variable « position relative de F_o et F_i » permettent de faire apparaître chez les élèves différentes significations attachées aux segments $\{MM'\}$ tels que $M' = f(M)$ où f est la transformation en jeu.

En effet, dans les pratiques de classes, les structures de contrôle se constituent le plus souvent autour d'une « configuration de base » comme le montre l'exemple ci-dessous. La même figure initiale, le parallélogramme

(Fig.19), peut être l'objet de différentes opérations de reconfiguration pouvant aboutir à l'une des trois sous-figures respectivement liées à la symétrie centrale (Fig. 19 a) et à la translation (Fig. 19 b et Fig. 19 c). Cependant, le contrôle exercé ici sur l'une de ces transformations en jeu s'effectue essentiellement en référence à la figure initiale :

– les points homologues traités sont le plus souvent des points remarquables du parallélogramme (les sommets homologues) ;
– Les « traits » permettant de joindre ces sommets homologues sont également traités dans le contexte du parallélogramme : (les diagonales ou encore les côtés opposés du parallélogramme).

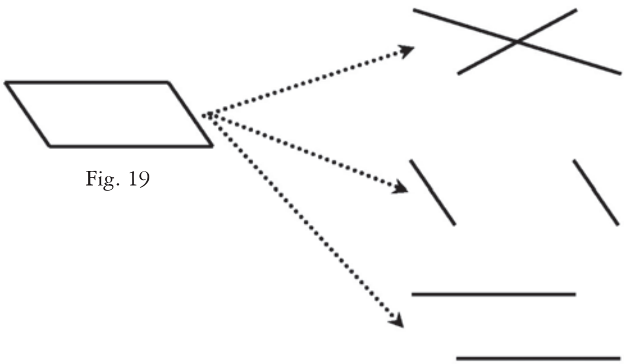


Fig. 19

Fig. 19a

Fig. 19b

Fig. 19c

Ainsi, les éléments constitutifs du contrôle se trouvent très fortement liés au parallélogramme. Un tel assujettissement à une configuration de base favorise a priori l'appréhension d'une transformation comme « relation entre deux parties d'une même configuration (le caractère fonctionnel est absent) » (Grenier D. et Laborde C., 1987, p. 66). Les valeurs attribuées aux deux variables du problème doivent inciter les élèves à chercher des types de contrôle fondés sur d'autres configurations permettant d'appréhender une transformation « comme relation entre deux configurations » (ibid., 1987, p. 66).

Principaux résultats

Deux approches différentes des transformations

La présentation des résultats d'élèves s'appuie essentiellement sur une analyse comparée d'interventions de représentants de chaque groupe lors de la phase de bilan. C'est ainsi que deux approches différentes des transformations apparaissent lors de la phase de bilan. A cet effet, nous nous appuierons sur deux extraits du protocole relatif au bilan, le premier à propos de la symétrie centrale pour l'item X_1, le second à propos de la translation pour l'item Y_3.

A propos de la symétrie centrale (item X_1) :

Il s'agissait dans cet item, de déterminer l'élément caractéristique d'une symétrie centrale (son centre) définie par un couple de triangles équilatéraux (F_o;F_i) disposés comme le montre la figure (Fig. 20).

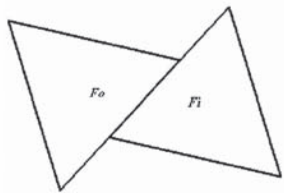


Fig. 20

La figure (Fig. 21) est celle produite par le *groupe 1* à l'issue de la phase de synthèse entre les deux équipes qui le composent.

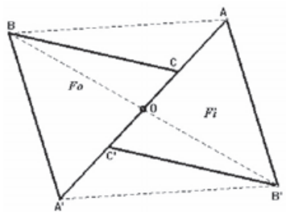


Fig. 21

C'est le représentant du *groupe 1*, désigné par « *Ama* » qui a exposé les résultats de leur groupe. Le représentant du *groupe 2* désigné par « *Mar*» a réagi au nom de son groupe sous la supervision du professeur désigné par « *Pr* ».

Nous donnons ci-dessous un extrait du protocole sur les propos tenus par les protagonistes pendant la phase de bilan.

75. **Pr :** *Alors ! Commençons par la symétrie centrale avec un représentant du groupe 1.*
76. **Ama :** Il part au tableau, il reproduit au tableau à partir de la feuille tâche, la figure (***Fig. 21***) puis, donne oralement la synthèse faite par les 2 *équipes* (*1* et *2*) constituant le *groupe 1*.
77. **Pr :** *Tu peux lire et expliquer.*
78. **Ama :** *Pour construire l'élément caractéristique de cette transformation, on prend d'abord les points AA' et BB' et…D'où ABA'B' est un parallélogramme. Alors on trace les diagonales de ABA'B' pour trouver le milieu.*
79. **Pr :** *Approchez-vous pour mieux voir. Mais le milieu….*
80. **Ama :** *Le milieu est le centre O de symétrie car c'est le milieu des diagonales AA' et BB'.*
81. **Pr :** *Les autres du groupe1 ?*
82. **Groupe 1 :** *C'est vrai ce qu'il dit….*
83. **Pr :** *Groupe2 ?*
84. **Mar:** *On n'est pas d'accord car on a dit que* F_i *est l'image de* F_o *par la symétrie centrale et eux ils nomment A' un point de* F_o *.*
85. **Ama :** *Mais dans tous les cas… la figure ne change pas et on a toujours un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu O qui est le centre de symétrie.*
86. **Pr :** *Alors, soyons clairs d'abord ! Entendez vous vous sur la figure objet* F_o *et la figure image* F_i *. Groupe 1!*
86. **Ama :** *Monsieur, il y a deux triangles collés.*
87. **Pr :** *Mais jusqu'à présent tu ne nous as pas dit ce qu'est* F_o *et* F_i *.*
88. **Ama :** *Mais…*
89. **Pr :** *Les autres du groupe 1 ?*
    Silence
90. **Pr :** *Le groupe 2 ?*
91. **Mar :** *Monsieur,* F_o *est le triangle en haut et à gauche* F_i *est le triangle en bas et à droite. Donc* F_o *est le triangle ABC et* F_i *est le triangle A'B'C'. Or lui* (il montre du doigt *Ama*)*, il a choisi un parallélogramme.*
92. **Pr :** *C'est tout ?*
93. **Mar :** *Non ! Maintenant, on peut voir que AA', BB' CC' se coupent en leur milieu.*
94. **Pr :** (s'adressant à *Ama* qui est toujours au tableau) *tu es d'accord avec ce que Mar a dit ?*
95. **Ama :** *Oui!*
96. **Pr :** *Les autres du groupe 1 ?*
97. **Groupe 1 :** *Oui !*
98. **Pr :** *Et vous au groupe 2 ?*
99. **Groupe 2 :** *Oui !*
100. **Ama:** *Mais Monsieur, nous on a pris le parallélogramme et on a le même point O ?*
101. **Pr :** *Alors il faut nommer les sommets des deux triangles* F_o *et* F_i *.*
102. **Ama :** *A, A', B, B',C, C'.*
103. **Pr :** *Alors A' se trouve sur quelle figure,* F_o *ou bien* F_i *?*
104. **Ama :** *Sur… Ah ! J'ai compris. Oueh ! Oueh ! Nous, on n'a pas séparé les deux triangles.*

L'analyse de cet extrait de protocole ci-dessus semble confirmer la présence des deux modèles d'appréhension(«intrafigural» et «interfigural»)[13] des transformations de figures chez les élèves. Cette présence se manifeste à travers le conflit cognitif qui a opposé durant toute la phase de bilan les représentants des deux groupes, « *Ama*» et « *Mar* ».

– Le représentant du *groupe 1*, « *Ama* » appréhende la transformation en jeu à travers le parallélogramme *ABA'B'* (fig. 21) qui apparaît

13 Les termes « intrafigural » et « interfigural » sont empruntés à Piaget et Garcia (1983, p. 128) à propos des stades psychogénétiques liés à l'appréhension des objets de la géométrie.

comme une sorte d'*enveloppe convexe* de $F_0 \cup F_i$ qui est de surcroît une configuration de référence liée à la symétrie centrale (lignes *78*, *80*, *85*, *100*, *104*). De plus, les segments *{MM'}* d'extrémités un point et son image prennent le statut d'éléments remarquables du parallélogramme (ses diagonales). La distinction entre les figures objet et image n'a alors aucune pertinence dans leur démarche. En conséquence, la démarche de « *Ama* » relève du modèle « intrafigural » d'appréhension des transformations de figures du plan, c'est à dire comme *une relation entre deux parties d'une même configuration de base*.

– Les répliques du représentant du *groupe 2* (« *Mar* »), montrent que la démarche de ce groupe est fondée sur la distinction entre F_0 et F_i (lignes *84, 91*).[14] D'autre part, les segments *{MM'}* d'extrémités un point et son image prennent le statut de représentation de la relation fonctionnelle c'est à dire les marques de la transformation en jeu; elles constituent aussi une structure de contrôle liée à la nouvelle configuration obtenue (ligne *93*). En conséquence, la démarche de « *Mar* » relève du modèle « interfigural » d'appréhension des transformations de figures du plan, c'est à dire comme *une relation entre deux configurations distinctes*.

A propos de la translation (item Y_3) :

Il s'agissait dans cet item, de déterminer l'élément caractéristique d'une translation (le vecteur de translation) définie par un couple de triangles équilatéraux (F_0, F_i) disposés comme le montre la figure (Fig. 22).

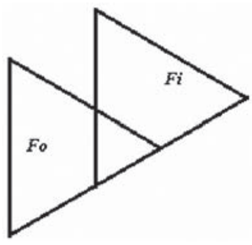


Fig. 22

14 L'intervention du professeur « *Pr* » (ligne *86*) a pu renforcer l'élève « *Mar* » dans son désaccord avec l'élève « *Ama* » mais elle n'est pas à l'origine car ce désaccord apparaît à la ligne *84*.

La figure (Fig. 23) est celle produite par le *groupe 1* à l'issue de la phase de synthèse entre les deux équipes qui le composent. C'est un autre représentant du *groupe 1*, désigné par « *Fat* » qui a exposé les résultats de leur groupe. Le représentant du *groupe 2* désigné par « *Mou* » a réagi au nom de son groupe sous la supervision du professeur par désigné par « *Pr* ». Nous donnons ci-dessous un extrait du protocole sur les propos tenus par les protagonistes pendant la phase de bilan.

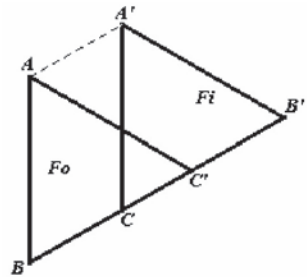


Fig. 23

213. ***Pr :*** *Bon ! On passe à l'exercice* Y_3. (*Fat*) part au tableau, et reproduit la figure (***fig.****22*). 214. ***Fat :*** *Pour* F_o *on prend ABC et pour* F_i, *on prend A'B'C'* (mais le codage est incorrect pour B',C et C'). 215. ***Pr :*** *Tu répètes la même erreur que ton camarade là* (il désigne ***Ama***). *Alors on recommence tout ! Dis -nous d'abord où est* F_o *et où est* F_i. *Ensuite tu rappelles: de quelle transformation il est question puis, quelles sont les images respectives des sommets de* F_o *par cette transformation, puis quel est son élément caractéristique d'accord?* 216. ***Fat :*** *Oui monsieur ! Bon,* F_o *est ce triangle et* F_i *est ce triangle* (il parcourt respectivement les triangles objet et image) . *Et puis…on a dit que c'est la translation.* 217. ***Pr :*** *(…) Alors si c'est la translation, regarde où est l'erreur sur tes nominations de sommets !* 218. ***Fat :*** (Après un temps de réflexion) *Oui, j'ai trouvé la faute ; c'est les points B, C, B', C'.* 219. ***Pr :*** *Et pour A, A' ?.*	220. ***Fat :*** *Ah, çà c'est juste !* (*Fat* veut rectifier pour les deux autres couples de sommets homologues). 221. ***Pr :*** *Non n'efface pas…Alors pourquoi A et A' c'est juste alors que pour les autres c'est faux ?* ***Ama*** lève la main pour répondre. 222. ***Pr :*** (s'adressant à *Ama*) *Tu veux répondre pour ton groupe* (le groupe 1) ? 223. ***Ama :*** *Oui !* 224. ***Pr :*** *D'accord !* 225. ***Ama :*** *Parce qu'on ne trouve pas de parallélogramme.* 226. ***Pr :*** *Parce qu'on ne trouve pas de parallélogramme! Le groupe 2, qu'est ce que vous en dites ?* 227. ***Mou :*** *Monsieur c'est pas clair !* 228. ***Pr :*** (s'adressant à *Mou*) *Tu peux nous rendre çà clair ?* 229. ***Mou:*** *Oui monsieur ! C'est pas juste car les vecteurs AA' et BB' doivent être les mêmes or, ce que lui il a fait ici, BB' est trois fois plus grand que AA'* (il s'agit de la figure (***Fig.*** *23*) reproduite par *Fat* au tableau).

Cet extrait du protocole relatif à l'item Y_3, fait ressortir une fois de plus, l'opposition entre les deux groupes d'élèves à propos du contrôle exercé sur un problème portant sur les transformations. Rappelons que la transformation en jeu était la translation.

- Le contrôle du *groupe1* (par les propos tenus par « *Ama*») sur la translation est fortement lié à l'appréhension d'une *configuration de référence*, le parallélogramme (ligne *225.*). En effet, « *Ama* » a dû percevoir de visu que les quadrilatères *AA'C'C* et *AA'B'*B (Fig. 23) ne sont pas des parallélogrammes, il en déduit que la figure prise globalement est mal codée. Selon ce type de contrôle, « l'existence d'une translation est liée à la visualisation d'un parallélogramme sur la figure initiale ou sur la figure obtenue après traitement »

- Le contrôle exercé par le *groupe 2* à travers la réponse donnée par « *Mou* », est fondé sur la configuration obtenue à partir des marques relatives aux sommets des deux triangles homologues (Fig. 23; *ligne 229.*). Selon ce type de contrôle, *« l'existence d'une translation dans une figure doit être perçue à partir de l'égalité entre des vecteurs liés aux marques».*

Les deux approches peuvent être caractérisées dans le tableau ci-dessous, selon le sens attaché au segment *{MM'}* tel que $M' = f(M)$ où f est la transformation en jeu dans le problème posé.

Tableau 2

Modèle « intrafigural » : Significations de {MM'}	***Modèle « interfigural » : Significations de {MM'}***
– *{MM'}* est un segment remarquable qui joint deux points homologues (par la transformation en jeu) d'une même figure familière. – Dans un polygone convexe familier, *{MM'}* est soit un côté, une diagonale, une hauteur, une médiane, un segment joignant les milieux de deux côtés, etc. Dans un cercle, *{MM'}* est un rayon, une corde, un diamètre etc. – Le contrôle de la transformation en jeu est essentiellement fondé sur les propriétés liées à la figure familière.	– *{MM'}* est une marque c'est à dire un objet géométrique "auxiliaire" qui matérialise la relation fonctionnelle entre deux figures distinctes. – Une marque ponctuelle est en général significative de la distinction entre la figure objet et sa figure image par la transformation en jeu. – Le contrôle de la transformation en jeu s'appuie essentiellement sur les propriétés liées à la configuration obtenue à partir des marques.

IV. 3.2. Les marques comme moyen didactique d'évolution des conceptions

La notion de marque est apparue également comme un moyen didactique pertinent pour faire évoluer les conceptions d'élèves. L'examen chronologique des protocoles montre le retrait progressif de certains termes liés aux configurations de base dans les interventions de l'élève (*Ama*) pendant les phases successives de bilan ; c'est le cas par exemple du terme «parallélogramme» (Tableau 3). De tels termes ne sont plus utilisés à partir de la phase de bilan relatif à l'item ($RT_{1.1}$; *ligne 141*).

Tableau 3

Items	Transformations en jeu	Interventions de (*Ama*)
X_1	- Symétrie Centrale	85. **Ama :** *Mais dans tous les cas… la figure ne change pas et on a toujours un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu O qui est le centre de symétrie.* 100. **Ama :** *Mais Monsieur, nous on a pris le parallélogramme et on a le même point O ?*
Y_1	- Symétrie Centrale	113. **Ama :** *C'est ça ! C'est à dire que….on a nommé A, B, C, D, et A', B', C', D', les sommets en confondant les deux parallélogrammes.*
Y_3	- Translation	225. **Ama :** *Parce qu'on ne trouve pas de parallélogramme.*
$RT_{1.1}$	- Symétrie Orthogonale - Translation	16. **Ama :** *Tu as tracé seulement la médiatrice de BB'… ça ne suffit pas pour dire que c'est une symétrie orthogonale.*
$RT_{1.1}$	- Symétrie Orthogonale - Translation	25. **Ama :** *J'ai dit que la médiatrice de BB' ne suffit pas pour dire que c'est une symétrie orthogonale.*
$RT_{1.2}$	- Symétrie Orthogonale - Symétrie Centrale	141. **Ama :** *(Aux autres membres de son équipe) Ah ! C'est donc ça…J'ai compris !* 142. **Obs. :** *Qu'est-ce que tu as compris ?* 143. **Ama :** *C'est à dire que… il ne faut pas voir les sommets mais chercher les images !*
$RT_{2.1}$	- Symétrie Orthogonale - Symétrie Centrale - Translation	221. **Ama :** *Voilà, Monsieur, les quatre médiatrices sont confondues.*
$RT_{2.1}$	- Symétrie Orthogonale - Symétrie Centrale - Translation	242. **Ama :** *Les segments BC', CB', AD' et le segment DA' se coupent en leur milieu.* 251. **Ama :** *C'est parce que dans une symétrie centrale, le milieu d'un segment d'extrémités un point et son image est le centre de symétrie.* 253. **Ama :** *Bon ! On a joint B et C', la même chose pour C et B', pour A et D', pour D et A'… puis on a pris leur milieu commun.*
IT_2	- Symétrie Orthogonale	**Ama:** *Ce n'est pas une symétrie orthogonale parce que (Δ) n'est pas la médiatrice commune de tous les segments.*

Cette évolution est due certes pour une part, à l'institutionnalisation progressive des connaissances visées, dont l'appropriation par les élèves n'est pas exemple de certaines règles contractuelles. Cependant, une analyse plus fine des protocoles permet d'avancer que l'intervention la plus significative du passage de cet élève du modèle «intrafigural» au modèle «interfigural», est celle faite lors de la phase de bilan de l'item ($RT_{1.2}$). En effet, (*Ama*) propose la symétrie orthogonale d'axe laissant globalement invariante une figure familière, le rectangle *ABMN* qui contient la figure $F_0 \cup F_i$, les deux figures admettent de surcroît la droite (Δ) comme axe de symétrie (Fig. 24).

Mais cette symétrie ne tient pas compte de la distinction entre figures objet et image, elle est rejetée par les autres élèves. C'est alors que (*Ama*) confie (presque en privé) à ses camarades d'équipe : «*…il ne faut pas voir les sommets mais chercher les images,* (*ligne 143*)».[15] Nous estimons que ces propos constituent une manifestation liée au changement de stratégie de résolution du problème :

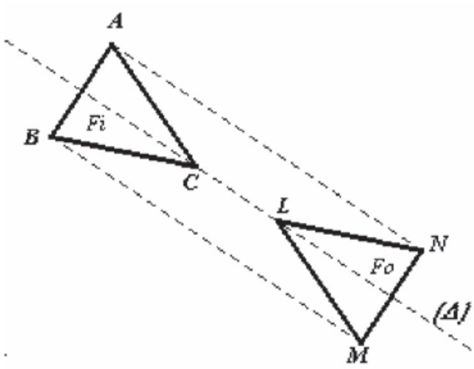


Fig. 24

- « *les sommets* » renvoient à des connaissances liées à la reconnaissance d'une configuration de base dont les éléments remarquables sont mis en relation deux à deux par la transformation en jeu.
- « *les images* » renvoient à des connaissances qui prennent en compte la distinction entre les figures objet et image, par la recherche de couples de points homologues au regard de la transformation en jeu, en occurrence les couples de points remarquables.

---

15 Le caractère presque privé de cette intervention nous conduit à émettre que le point de vue exprimé par (*Ama*) est le résultat de sa propre réflexion en interaction permanente avec le milieu de la situation dont les éléments constitutifs essentiels sont :
- les connaissances anciennes de (*Ama*) liées aux propriétés géométriques des figures familières du plan ;
- le modèle «intrafigural» des transformations géométriques du plan ;
- l'opposition répétée des autres équipes aux propositions de solution de (*Ama*) etc.

Conclusion

Figures familières et transformations

Les résultats obtenus ci-dessus montrent qu'une *forte contextualisation* des transformations dans les configurations de base peut être un facteur d'inhibition à l'appréhension de certains de leurs invariants. De notre point de vue, cette *contextualisation* est l'une des origines des *conceptions intrafigurales* au niveau des élèves pour lesquelles, la prise en compte de la distinction entre figures objet et image n'est pas pertinente. Il serait intéressant de mener une étude plus approfondie pour savoir de façon plus précise l'impact de cette forte *contextualisation* des transformations géométriques dans les configurations de base en tant que facteur de résistance voir de blocage à une perspective d'évolution des conceptions d'élèves en termes de transformations ponctuelles.

Les marques dans le cas spécifique des isométries nouvelles en 10^e^

La gamme des isométries s'enrichit mais se complexifie en même temps lors du passage de la 9^e^ à la 10^e^ avec un premier enseignement de la symétrie glissée et de la rotation. Leur reconnaissance (ou leur caractérisation) à partir des marques n'est pas immédiate. Les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves dans la résolution de tels problèmes peuvent être expliquées comme étant les effets conjugués de deux facteurs qui sont spécifiques à ces deux isométries.

- Le premier facteur est lié au fait que ces deux isométries admettent deux éléments caractéristiques alors que celles enseignées en 9^e^, à l'exception de l'homothétie[16] n'admettent qu'un seul. La symétrie glissée est caractérisée par son axe et son vecteur tandis que la rotation est caractérisée par son centre et son angle orienté.
- Le second facteur est que pour chacune de ces nouvelles isométries, les deux éléments caractéristiques ne sont pas au même niveau de traitement perceptif dans le spatio-graphique, l'un est un objet *géométrique de position* (l'axe pour la symétrie

16 Conformément aux instructions des textes de programme, l'homothétie est introduite uniquement avec des manipulations dans le cadre de l'agrandissement ou de la réduction de figures.

glissée et le centre pour la rotation) tandis que l'autre est un objet *géométrique de relation* (le vecteur pour la symétrie glissée et l'angle orienté pour la rotation).[17]

Les marques comme outil de « segmentation » des transformations

La notion de marque a permis également aux élèves de construire des conceptions liées à une «segmentation» des transformations. En effet, si f est la transformation visée, ses marques permettent de modéliser tout couple de figures homologues (F_o, F_i) en un nombre fini n de couples de points homologues[18] (donc en un nombre fini n de segments) tels que:

$$(M_k, M'_k)_{k\in[1,\ldots,n]} \quad avec\ (M_k, M'_k) \in F_O \times F_i,\ M'_k = f(M_k)\ et\ n \in \mathbb{N}^*.$$

L'intérêt de cette évolution des comportements d'élèves est qu'elle peut être considérée comme une étape intermédiaire significative dans le processus de passage très complexe des transformations de figures aux transformations ponctuelles. Dans cette «segmentation», chaque marque peut être considérée alors comme constitutive de la relation fonctionnelle liée à la transformation en jeu.

Mais cette possibilité d'évolution des conceptions fondée sur les marques ne permet pas seule à faire accéder les élèves au niveau «transformations ponctuelles», ceci pour trois raisons essentielles.

- Cette «segmentation» des transformations ne concerne qu'un nombre très réduit de couples points homologues de ($F_o \times F_i$), le plus souvent des couples de points remarquables. Nous ne sommes pas encore au niveau où la figure euclidienne est considérée comme ensemble de points.
- Cette «segmentation» est locale, c'est à dire appréhendée par rapport à une région du plan, le plus souvent perceptible de visu. Ceci se traduit au niveau de la représentation et du traitement des objets géométriques en jeu, par une délimitation dans le domaine spatio-graphique d'une région de la feuille de dessin, du tableau noir, du support plan d'une machine mécanique ou

17 Cf. M. Sangaré (2000, p. 37).

18 C'est le cas par exemple d'un couple de polygones homologues par une transformation à travers les couples de sommets homologues.

de l'écran d'un ordinateur. Nous ne sommes pas encore au niveau d'appréhension d'une transformation de tous les points du plan dans lui-même.

– Cette «segmentation» est contrôlée par des propriétés géométriques liées à la « configuration des marques » et qui sont spécifiques de la transformation en jeu.

Néanmoins, la notion de marque s'est avérée comme un *objet géométrique auxiliaire* opératoire sur les transformations de figures. Les élèves ont su construire des connaissances autour de cette notion qui leur ont permis de consolider et de réorganiser leurs conceptions sur les transformations. Ces résultats semblent conforter une de nos hypothèses de recherche[19] relative à l'existence au second cycle fondamental et au lycée, d'espaces de création d'objets pertinents de connaissances qui permettent de rendre problématiques certaines propriétés des transformations dans une perspective de passage connaissances pratiques/connaissances théoriques.

References

AMIGUES, R. (2001). "Compétences, capacités, savoirs», sur le web à l'adresse, http://recherche.aix-mrs.iufm.fr/pub/voc/n1/amigues5/notes.html#anchor-30408

BAUTIER, T. (1988). Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale. *Séminaires de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique IMAG-LSD*, n° 45, pp.163-227. Ed. Université Joseph Fourier de Grenoble 1.

BROUSSEAU, G. (1998). "Problème de Didactique des Décimaux". In: BALACHEFF, N.; COOPER, M.; SUTHERLAND, R. et WARFIELD, V. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Grenoble, Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1994). "Le processus de transposition didactique". In: Arsac et al. *La transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble, Pensée Sauvage (Collection Travaux et Thèses de Didactique).

19 Sur ce point, voir M.S. Sangaré (2000, p. 91).

DESTAINVILLE, B. (1990). Transformations et configurations du Collège à la Seconde. *Bulletin INTER-IREM* (1989-1990), pp.119-124.

DOUADY, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 7-2, pp. 5-31. Grenoble, La Pensée Sauvage.

DURAND, D. (1994). *La Systémique*. Paris, Presse Universitaire de France

DUVAL, R. (1994). Différents fonctionnements d'une figure dans une démarche de géométrie. *Repères – IREM*, n. 17, pp. 249-280.

______ (1995). *Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissage intellectuals*. Peter Lang.

GRENIER, D. et LABORDE, C. (1988). "Transformations géométriques: le cas de la symétrie orthogonale". In: *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Actes du Colloque de Sèvres, mai., 1987, pp. 65-86, Grenoble, La Pensée Sauvage.

JAHN, A. P. (1998). *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde*. Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1995). *Modélisation à double sens*. In: Actes de la 8ème école d'été de Didactique des Mathématiques, pp. 265-278. IREM de Clermont-Ferrand.

LEGRAND, M. et al. (2003). "A la recherche d'une cohérence pour une véritable activité mathématique en classe". In: COULOMB, J.; DOUAIRE, J. et NOIRFALISE, R. (coord.). *Faire de maths en classe ? Didactique et analyse des pratiques enseignantes*. INRP – Adirem.

LEMONIDIS, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, v.11, n. 2-3, pp. 295-324. Grenoble, La Pensée Sauvage.

MÉTRÉGISTE, R (1984). La géométrie des transformations: une approche en classe de 4e et 3e. *Petitx*, n. 4, pp. 35-71. IREM de Grenoble.

PIAGET, J. et GARCIA, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, Flammarion.

RAUSCHER, J.-C. (1994). "Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs". *Vingt ans de Didactiques des Mathématiques en France, Recherche en Didactique des Mathématiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

ROBERT, A. (1998). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques, I. Géométrie*. 2 éd., Ellipses.

SANGARÉ, M. (2000). *La rotation: approche cognitive et didactique; une étude de cas au* Mali. Thèse de l'Université du Mali, ISFRA, Bamako.

_____ (2002). *Interactions angle-rotation: pertinence et limite dans l'enseignement*. Actes du Deuxième Symposium Malien sur les Sciences Appliquées Université de Bamako. Oulu, Oulu University Press, 2003.

_____ (2003). La machine de Sylvester: Principes mécaniques et principes mathématiques. Une étude de cas au Mali, *Petitx*, n. 62, pp. 33-58, IREM de Grenoble.

VERGNAUD, G., (1989). Psychologie du développement cognitif et Didactique des mathématiques: cas des structures additives. *Petitx*, n. 22, pp. 51-67.

_____ (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, n. 10/2.3, pp. 133-170. Grenoble, Pensée Sauvage.

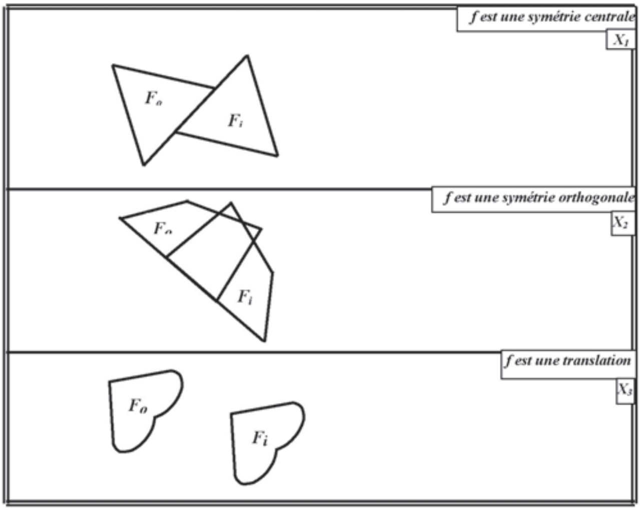
Recebido em dez./2006; aprovado em dez./2006.

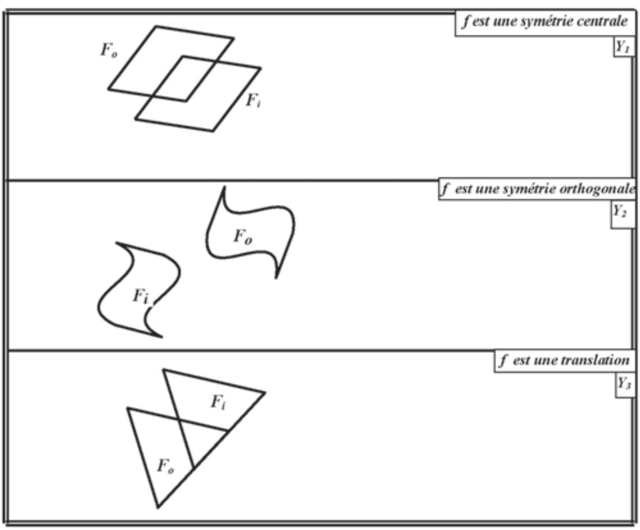
Annexe 1

__Consignes__ :

On vous donne la figure F_o et son image F_i par la transformation indiquée sur la feuille de tâches. On vous demande d'écrire un message pour une autre équipe afin qu'elle puisse déterminer l'élément caractéristique de cette transformation.

(Réduction de 37,5% des figures initiales)





Annexe 2

Consignes pour les items RT :

Dans chacun des cas suivants, voici les tâches demandées :

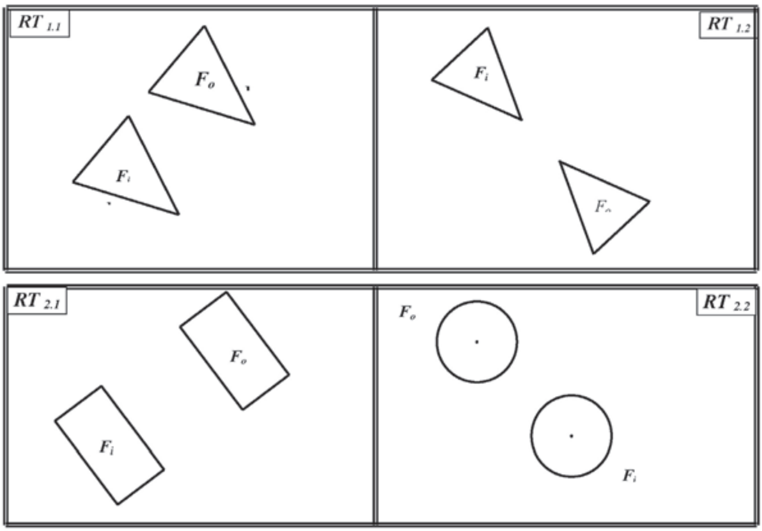
– *Quelles sont les transformations que vous connaissez et qui transforment* F_o *en* F_i *?*

– *Expliquez votre réponse.*

– *Pouvez-vous rédiger un message à un camarade absent pour lui permettre d'identifier chacune des transformations que vous avez trouvées ?*

(Réduction de 50% des figures initiales)

Items RT $_1$



IT $_2$