Análisis didáctico de un proceso de estudio de la ley empírica de los grandes números*

JUAN D. GODINO
RAFAEL ROA
ANGEL M. RECIO
FRANCISCO RUIZ
JUAN L. PAREJA**

Resumen
Se analiza una aproximación intuitiva al estudio de la ley empírica de los grandes números, realizado por una pareja de maestros en formación, mediante el uso de un software de simulación de experiencias aleatorias y con la asistencia de un profesor. El análisis se realiza aplicando algunas herramientas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. En particular se valora la idoneidad epistémica, cognitiva e instruccional del proceso de estudio. Se concluye con algunas implicaciones sobre las características del dispositivo de simulación y del papel del profesor para incrementar la idoneidad del proceso de estudio
Palabras claves: enseñanza; aprendizaje; simulación probabilística; estudio de casos; idoneidad didáctica.

Abstract
In this paper we analyse an intuitive approach to the study of the empirical law of large numbers, carried out by a pair of student teachers. The learning is based on the use of a random experiment simulation applet, with feedback by a lecturer. The analysis applies some theoretical tools taken from the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction. In particular, we assess the epistemic, cognitive and instructional suitability of the study process. We conclude by providing some implications of the characteristics of the simulation device and of the lecturer's role to increase the suitability of the teaching and learning process.
Key-words: *teaching; learning; probabilistic simulation; case study; didactic suitability.*

Resumo
Analisa-se uma abordagem intuitiva do estudo da lei empírica dos grandes números, realizado por dois professores em formação, mediante o uso de um software *de simulação de experiências aleatórias*

---

* Proyecto Edumat-Maestros. Universidad de Granada.

** Versión ampliada y revisada de la Ponencia Invitada al *7th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 7). Brasil, Julio, 2006. E-mail: Godino: jgodino@ugr.es; Rafael: rroa@ugr.es; Francisco: fcoruiz@ugr.es

e com o auxilio de um professor. A análise realiza-se aplicando algumas ferramentas da abordagem onto-semiótica da cognição e educação matemática. Em particular, valoriza-se a idoneidade epistêmica, cognitiva e educacional do processo do estudo. Concluímos com algumas implicações das características do dispositivo de simulação e do papel do professor para incrementar a idoneidade do processo do estudo.
Palavras-chave: *ensino; aprendizagem; simulação probabilística; estudo de caso; idoneidade didática.*

Contexto y problema de investigación

En el contexto de la formación matemática y didáctica de profesores de educación primaria mediante el uso de recursos informáticos (Proyecto Edumat-Maestros, Godino y cols, 2004) hemos realizado experiencias de enseñanza de contenidos matemáticos específicos a diversos grupos de estudiantes en tres escenarios complementarios:

- Escenario 1: Clase habitual (salón de clase con pizarra, texto y cañón de proyección).
- Escenario 2: Clase de informática; manejo individual (o por parejas) de los programas, con el apoyo del formador.
- Escenario 3: Seguimiento clínico de parejas de estudiantes interactuando con programas informáticos con el apoyo de un profesor.

En este trabajo usaremos la información recogida en el escenario 3 correspondiente al estudio realizado por una pareja de alumnos del tema "ley del azar"(o ley empírica de los grandes números) mediante el programa de simulación "box-model" del NCTM, disponible en: http://illuminations.nctm.org/imath/6-8/BoxModel/index.html.

Los datos que usaremos para apoyar nuestras reflexiones corresponden a parte de una sesión de una hora de duración que fue audio-videograbada y transcrita, permitiéndonos describir las trayectorias epistémica, instruccional (particularmente el uso del recurso informático) y algunos aspectos de las configuraciones cognitivas de los estudiantes (Godino, Contreras y Font, en prensa).

Las cuestiones de investigación planteados fueron las siguientes:

¿Qué aprenden los estudiantes que han seguido este proceso de estudio?

¿Qué factores han condicionado su aprendizaje?

¿Cómo se podría mejorar la idoneidad del proceso de estudio?

Aunque se trata de una experiencia particular, los hechos observados y su interpretación con ayuda del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2006) permiten identificar fenómenos cognitivos e instruccionales de mayor alcance. Usaremos este caso, además, para ejemplificar la metodología de análisis didáctico basada en dicho marco teórico.

La evaluación de los resultados se basa en el análisis de las transcripciones de la grabación en video de las interacciones de la pareja de estudiantes guiados por un profesor. A partir de esta transcripción describiremos el proceso de estudio como un proceso estocástico compuesto de diferentes trayectorias (Godino, Contreras y Font, 2006): epistémica (conocimientos institucionales implementados), docente (papeles del profesor), discentes (papeles de los estudiantes), mediacional (uso de los recursos tecnológicos) y cognitivas (conocimientos de los estudiantes).

El análisis se centrará en identificar, las competencias logradas y los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales puestos de manifiesto en la trayectoria de estudio implementada. Previamente será necesario explicitar la configuración epistémica de referencia sobre la ley de los grandes números y nociones asociadas. Como resultado mostraremos el papel crucial del profesor en la optimización del proceso de estudio, así como el de la selección de unos recursos técnicos adecuados.

Descripción del proceso de estudio

Para la realización de las actividades prácticas en el aula de informática los estudiantes usaron una "guía de prácticas" en la que se describía el recurso a utilizar y las tareas propuestas. El software utilizado era el simulador "box-model" del NCTM disponible en el sitio web indicado anteriormente.

Los objetivos de la práctica eran:

a) Simular situaciones aleatorias en un entorno informático.

b) Estudiar y analizar los resultados obtenidos en esas simulaciones.

c) Contrastar los resultados esperados con los finalmente obtenidos.

d) Familiarizar al estudiante con el lenguaje y los conceptos probabilísticos elementales.

El programa tiene dos módulos. El primero permite la simulación de series de experimentos simples, tales como el lanzamiento de monedas, dados, etc, representar las distribuciones de frecuencias relativas y compararlas con las probabilidades de los sucesos. El segundo permite simular series de experimentos de lanzamiento de varios "dados" y estudiar la distribución de la suma y la media de puntos obtenidos. Aunque en la experiencia realizada los estudiantes utilizaron los dos módulos, en este trabajo sólo vamos a considerar el primero, por razones de espacio.

En el primer módulo se dispone de un "modelo de urnas" que permite explorar las relaciones entre las frecuencias relativas y las probabilidades de sucesos aleatorios. Un modelo de urnas es un dispositivo estadístico que se puede usar para simular experimentos probabilísticos, tales como el lanzamiento de una moneda, un dado, etc., sustituyendo el experimento original por otro equivalente consistente en la extracción de bolas de una urna. Para ello hay que decidir qué "ficha" sustituye a cada suceso elemental en el experimento original.

Descripción del uso del "applet" (Figura 1):

- Entrada de datos: Marcar las fichas numeradas que deseamos entrar en la urna. Por ejemplo, 0, "cara", 1, "cruz". Si se quiere que la moneda sea sesgada, por ejemplo, que obtener 0 tenga doble probabilidad que obtener 1 bastará incluir en la urna dos 0.
- Extracción aleatoria de fichas: Pulsar el botón Start (comienzo) para extraer al azar (con reemplazamiento) fichas de la caja y observar, en tiempo real, las frecuencias relativas de obtener una ficha dada a medida que se incrementa el número de extracciones. El dispositivo sólo permite extracciones con reemplazamiento, por lo que sólo se consideran experimentos aleatorios independientes.
- Parada de la extracción: Pulsar el botón de Pause (pausa). Marcando en cada barra del diagrama se muestra la frecuencia relativa del suceso correspondiente. En el modo de pausa se puede deslizar una barra para observar los números obtenidos.

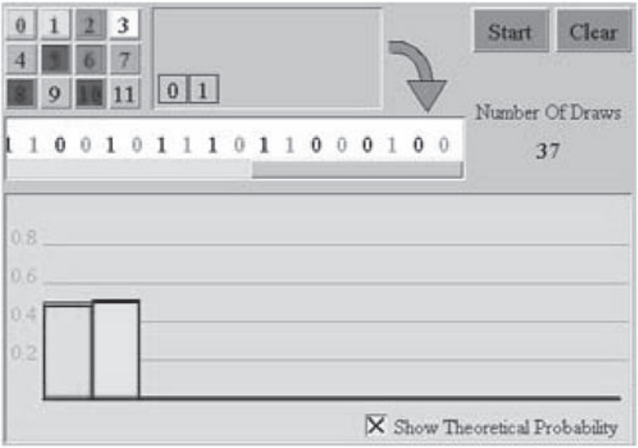

Figura 1 – Simulación del lanzamiento de una moneda con "box-model"

Sobre este módulo las cuestiones solicitadas en la "guía de prácticas" fueron las siguientes:

Simula el lanzamiento de una moneda 10 veces (introduce los números 0 (cara) y 1 (cruz) en la caja y pulsa Pause cuando se hayan hecho 10 extracciones). Observa el comportamiento de las frecuencias relativas de cada suceso respecto de la distribución de probabilidad teórica.

a) ¿Cuál es la frecuencia relativa de obtener cara cuando se han hecho 10 lanzamientos?

b) ¿Por qué es diferente de la probabilidad? Continúa la simulación hasta 50 lanzamientos.

c) ¿Hay ahora menores diferencias entre las frecuencias relativas y las probabilidades de obtener cara o cruz? Explica por qué.

Estas consignas son una versión abreviada de las dadas en la "lección" descrita en: http://illuminations.nctm.org/index_d.aspx?id=448

En este documento se incluían además las siguientes cuestiones:

- Haz una predicción del número de extracciones que consideres darían lugar a que los valores (de las frecuencias relativas y la probabilidad) estuvieran muy próximos entre sí.
- Prueba tu conjetura comenzando de nuevo la extracción y deteniendo la simulación cuando se llegue al número que hayas previsto. Repite la experiencia si fuera necesario hasta que consigas que los dos valores estén muy próximos.

- ¿Qué hipótesis puedes hacer en este momento sobre el número de extracciones necesario para asegurar que las frecuencias relativas y las probabilidades sean iguales?

En nuestro caso, se evitó el uso de la expresión "experimental probability", que no es nada oportuna ya que provoca una confusión entre frecuencia relativa y probabilidad. También se cambió el valor de 20 para el número de replicaciones en la primera simulación por 50, que sigue siendo excesivamente pequeño para mostrar una cierta estabilidad de las frecuencias relativas. Sin embargo, en la "lección" inglesa se plantean cuestiones que llevan al estudiante a repetir el experimento un número grande de veces, lo que no ocurre con la versión de la "guía de prácticas" que usamos en la experiencia.

Esta diferencia en las consignas dadas tiene importantes efectos en la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado, ya que si no se crean condiciones para que el número de repeticiones sea elevado, y se fije la atención en las rachas y fluctuaciones del proceso estocástico generado, se puede reforzar un sesgo bien caracterizado en la literatura de investigación conocido como "creencia en la ley de los pequeños números" (Tversky y Kahneman, 1982).

Análisis de los conocimientos pretendidos

El dispositivo de simulación "box model" permite abordar el estudio de la ley de los grandes números de una manera no formal, mediante la elaboración de secuencias de frecuencias relativas calculadas a medida que se incrementa el número de experimentos.

> La progresiva estabilización de las frecuencias relativas de un resultado dado en un número grande de experimentos, que ha sido observada durante siglos y fue expresada por Bernoulli como un teorema matemático, sirvió como justificación para la definición frecuencial de la probabilidad". ... "Esta idea no está libre de dificultades, debido a que la naturaleza específica de la convergencia aleatoria es difícil de comprender y la aparición de largas rachas, coincidencias y patrones inesperados son contra-intuitivos. (Batanero et. al., 2005, p. 30)

La situación-problema que da origen a este fenómeno se puede describir así. ¿Qué ocurre a las frecuencias relativas de un suceso cuando se incrementa indefinidamente el número de experimentos? Al lanzar una vez una moneda, por ejemplo, no podemos prever si saldrá cara o cruz; si la lanzamos 10 veces, la frecuencia relativa puede ser 0.5, pero no necesariamente. Sin embargo, se conoce que la frecuencia relativa de obtener cara, al lanzar *n* veces una moneda perfecta, f_n, se aproxima a ½ cuando *n* crece indefinidamente. Pero la "convergencia" de esta sucesión de valores no es del mismo tipo que la convergencia analítica de sucesiones de números reales; se trata de una convergencia "en probabilidad", lo que significa que la desviación entre las f_n y p, para un valor de *n* fijado, puede no ser menor que un valor prefijado. "La probabilidad de tener una desviación dada tras *n* lanzamientos disminuye a medida que *n* aumenta, esto es, $Pr(_n - p > \varepsilon)$ tiende a 0 cuando *n* tiende a infinito"

Además, esta convergencia estocástica puede ser lenta, mostrar fluctuaciones y rachas relativamente grandes. Estas son características que pueden ser exploradas mediante simulaciones de fenómenos aleatorios, a fin de construir intuiciones apropiadas sobre los mismos.

En la figura 2 mostramos una síntesis de los objetos y relaciones que se ponen en juego en el estudio de la ley de los grandes números agrupados en dos configuraciones: *inicial*, que indica los objetos conocidos de los cuales se parte, y *pretendida* o emergente como consecuencia del proceso de estudio programado. El diagrama muestra los objetos matemáticos que se ponen en juego clasificados en las seis categorías de entidades primarias propuestas en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002). Es una adaptación del denominado diagrama Ishikawa (o de causa y efecto). En este caso se quiere expresar que la ley de los grandes números es el efecto de la articulación de la red de objetos indicados.

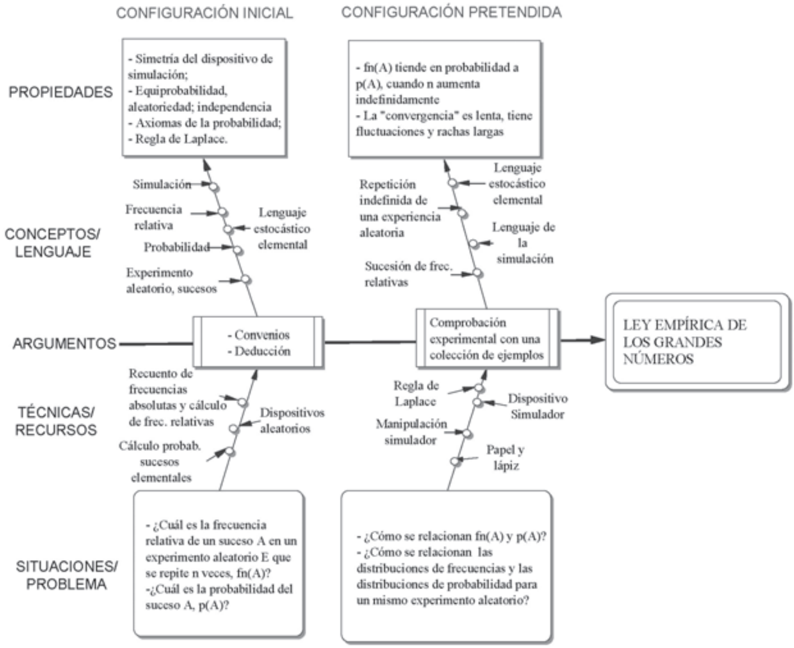

Figura 2 – Conocimientos asociados a la "ley empírica de los grandes números"

El dispositivo de simulación "box model" permite estudiar también un caso elemental del teorema central del límite mediante el 2º módulo, el cual simula la replicación del lanzamiento de dos o más dados y representa la distribución de frecuencias de la suma de puntos o la media de los puntos obtenidos. Las distribuciones de probabilidad subyacentes a las secuencias de experimentos son la distribución triangular (caso de la suma o media de puntos al lanzar dos dados), y la distribución normal a medida que se incrementa el número de replicaciones. Para hacer patentes estos modelos probabilísticos será necesario ir incrementando el número de experimentos hasta alcanzar el valor máximo que permite el dispositivo (9999).

Trayectoria didáctica implementada en la experiencia

En esta sección describimos el uso que se hizo en la experiencia del dispositivo de simulación, los conocimientos que se pusieron en juego en cada una de las tareas realizadas (secuencia de configuraciones epistémicas implementadas) y algunos aspectos de las trayectorias instruccional y cognitivas.

Trayectoria epistémica implementada

En los 45 minutos que estuvieron los estudiantes interactuando con el "applet" manejaron los dos módulos y simularon diversos experimentos con monedas y dados. El análisis lo vamos a centrar principalmente en la simulación del lanzamiento de una moneda mediante el primer módulo. En la "clase de teoría" (escenario 1) el profesor había introducido previamente las nociones básicas sobre experiencias aleatorias (sucesos, probabilidad, regla de Laplace, y resuelto algunos problemas sencillos de cálculo de probabilidades)

El formador presentó brevemente el uso del dispositivo de simulación, les instó hacia la reflexión y que manifestaran sus ideas.

Comienzan simulando el lanzamiento de una moneda 50 veces esperando observar "la estabilidad de las frecuencias relativas" alrededor de 0.5, valor de la probabilidad de cada suceso en el supuesto de que el dispositivo no esté sesgado. Esto no se discute. El simulador muestra en el diagrama de barras el valor de la "probabilidad teórica" de cada suceso, que el alumno A1 describe como "*el valor central que tiene que tomar*". Detienen el experimento después de 50 lanzamientos y observan que las frecuencias relativas son similares a las probabilidades (aproximadamente 0.5)

Después de simular el lanzamiento de varios dados (de 6, 12, 7 y 4 caras, siempre con una serie pequeña de simulaciones) se vuelve a repetir el experimento de lanzar una moneda otras 50 veces. En esta ocasión no obtienen los resultados esperados. Después de 50 lanzamientos las frecuencias relativas son 0.36 y 0.64, bastante diferentes de las probabilidades. No se continúa incrementando el número de replicaciones y se pasa a explorar el segundo módulo del "applet". Los alumnos se muestran "convencidos" que las frecuencias relativas se van a aproximar a la probabilidad:

A1: Mientras más repeticiones haya más va a tender al valor central, se supone.

Sin embargo, desconocen cómo es esta aproximación, en particular si hay rachas de experiencias en las que las frecuencias relativas son menores (o mayores) que la probabilidad, y cuánto duran tales rachas. Tampoco conocen cómo de rápida es la tendencia hacia "el valor central".

En la figura 3 resumimos la parte de la trayectoria epistémica implementada relativa a la simulación del lanzamiento de la moneda, indicando los tipos de objetos matemáticos puestos en juego, agrupados en dos configuraciones correspondientes a las dos veces que hicieron la simulación.

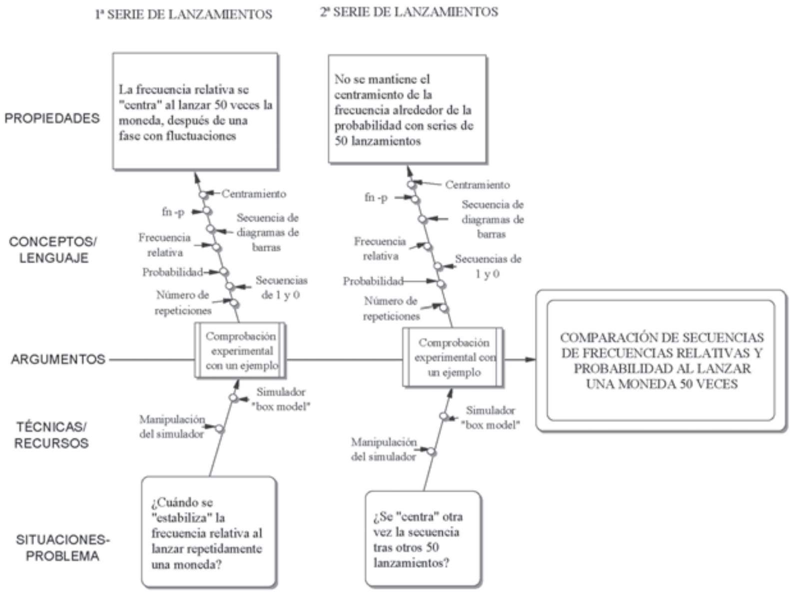

Figura 3 – Configuraciones epistémicas implementadas

Trayectoria mediacional

El uso del simulador "box model" interacciona con cada tipo de entidad que se pone en juego en la configuración epistémica, y por consiguiente cambia el significado de los objetos matemáticos (Tauber, 2001). En efecto, hace posible el planteamiento de la nueva situación de comparación de las frecuencias relativas y la probabilidad cuando el número de experiencias es alto; las posibilidades de cálculo y graficación permiten hacer la exploración en un tiempo breve, siendo imposible hacerla de otro modo. El simulador introduce aspectos nuevos en el lenguaje, como son las secuencias grandes de sucesos, y de secuencias de diagramas de barras representando las distribuciones de frecuencias; algunos convenios de expresión son específicos de este simulador (manera de mostrar los valores numéricos de las frecuencias relativas pulsando sobre los diagramas de barras, selección con reemplazamiento de las fichas a introducir en la urna, ...)

Permite generar ejemplos indicativos del concepto de "secuencia ilimitada de distribuciones de frecuencias", expresadas mediante los diagramas de barras, así como explorar visualmente las propiedades de las secuencias de frecuencias relativas para valores altos del número de experimentos. En cuanto a la argumentación (justificación) de las propiedades emergentes aporta una mayor convicción en el comportamiento del fenómeno, aunque siempre de una manera empírica-visual, no deductiva.

Visualmente la salida gráfica del programa muestra una cierta "estabilidad y convergencia de las frecuencias relativas" hacia la probabilidad teórica, incluso en pequeñas muestras como n=37, lo que puede reforzar la creencia en la supuesta "ley de los pequeños números". Esto pone de manifiesto la interacción de la trayectoria mediacional con las trayectorias cognitivas de los estudiantes. La resolución gráfica de la pantalla interfiere en la apreciación visual de la magnitud de las desviaciones entre las frecuencias y las probabilidades de los sucesos. La lentitud del proceso de extracción de cifras de la urna dificulta el ensayo con muestras verdaderamente grandes en un tiempo razonable.

> Quienes han estudiado el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han observado que la tecnología es mediadora del aprendizaje. Esto es, el aprendizaje es diferente al usar la tecnología. (Heid, 2005, p. 348)

Pero esta influencia es positiva dependiendo del tipo de tecnología y de cómo se utilice. En nuestro caso, el recurso utilizado no permite hacer un seguimiento del desarrollo del proceso estocástico generado. Las frecuencias relativas de obtener cara o cruz van cambiando a medida que se realizan nuevas extracciones; el dispositivo muestra en cada momento el "valor acumulado" de dichas frecuencias, pero no registra las anteriores. Esto tiene importantes consecuencias: la "historia" del proceso se pierde. La figura 4 muestra una salida de un programa (Statmedia) que permite resolver este problema. En este caso las diferencias entre las frecuencias relativas y la probabilidad (desviación final) se muestran también numéricamente. También se ve con claridad la existencia de largas rachas en las que $f_r < p$ (o $f_r > p$), y que estos cambios son "lentos".

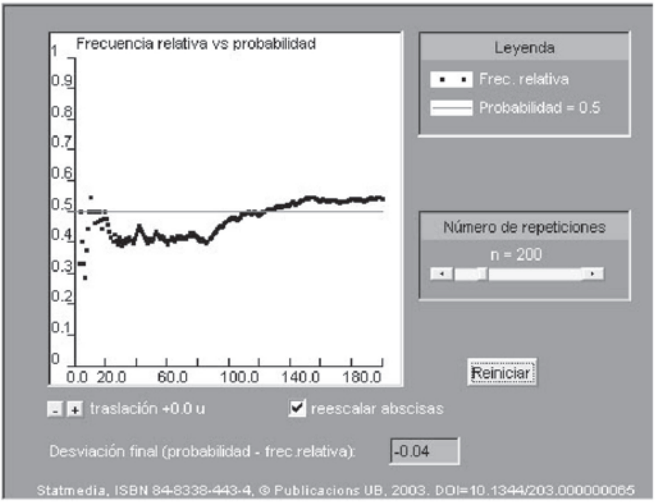

Figura 4 – Lanzamiento de una moneda con Statmedia

Configuraciones cognitivas

La grabación de las interacciones entre los estudiantes, el profesor y el dispositivo nos permite un acceso, al menos parcial, a lao conocimientos personales de los sujetos que participan en la experiencia con relación a los fenómenos estocásticos estudiados. En particular podemos observar algunas intuiciones correctas y sesgos probabilísticos, bien identificados en la literatura de investigación sobre este tema, y las reacciones del docente ante los mismos.

Confusión entre suceso y probabilidad

El estudiante A1 confunde los sucesos cara o cruz, con dos probabilidades (posiblemente quisiera decir, posibilidades).

> A1: Cogiendo números aleatorios podíamos ver el lanzamiento de una moneda. Como puede salir cara o cruz, *son dos probabilidades*, tomamos 0 y 1 y la lanzamos, pongamos, 10 veces.

Falacia del jugador:

En el siguiente pasaje se manifiesta con claridad el sesgo probabilístico conocido como "falacia del jugador": la creencia de que incluso en pequeñas secuencias de un experimento aleatorio, las desviaciones de las frecuencias relativas del suceso "obtener cara" respecto de "obtener cruz" deberán equilibrarse.

> P: ¿Qué os parece lo que va saliendo?
> A2: La tendencia debe ser al 50%, la probabilidad está equilibrada.
> P: ¿Qué quiere decir eso?
> A2: Que si salen dos unos pues luego salen dos ceros y se van igualando.
> ...
> P: ¿Va ocurriendo lo que esperabais?
> A2: Claro, es como si en una ruleta apostamos al rojo y sale negro, apuestas de nuevo al rojo el doble que antes y al final acabas recompensado.

<u>Intuición correcta del comportamiento límite del proceso</u>

Pulsan "*Show theoretical probability*" y aparece marcada de una manera gráfica la probabilidad correspondiente a cada valor.

> A1: Este es el valor central que tiene que tomar mientras más repeticiones...
> A2: Es 0´5.
> A2: Mientras más lanzamientos hagamos más se va a acercar, ¿no?.
> A1: Mientras más repeticiones haya más va a tender al valor central, se supone.

<u>Creencia en "la ley de los pequeños números"</u>

[El experimento se detiene después de 54 lanzamientos al observar que las frecuencias obtenidas son similares].

> P: En el caso de la moneda, ¿Cuándo se centró, más o menos, os acordáis?
> A1: Creo que en unos 50, o por ahí.
> A2: No, en el 38

En la segunda simulación del lanzamiento de la moneda, después de 50 lanzamientos, las frecuencias obtenidas son 0.36 y 0.64. Quedan "asombrados" del resultado pero no deciden incrementar el número de lanzamientos.

Idoneidad del proceso de estudio

La idoneidad didáctica de un proceso de estudio la descomponemos en tres dimensiones: epistémica, cognitiva e instruccional (Godino, Contreras y Font, en prensa).

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado, pretendido y global, que son usados como referencias.
2. *Idoneidad cognitiva*: el "material de aprendizaje" está en la *zona de desarrollo potencial* de los alumnos.
3. *Idoneidad instruccional*: las configuraciones y trayectorias didácticas posibilitan que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos y resolverlos. También incluye la adecuación de los medios, en particular del tiempo asignado al estudio.

En cuanto a la idoneidad epistémica ya hemos indicado que en el significado pretendido (plasmado de manera parcial y difusa en la guía de prácticas) no se han propuesto situaciones de análisis de las secuencias de frecuencias relativas con valores grandes del número de experimentos. Este es un aspecto clave en el significado global de la ley empírica de los grandes números, por lo que se ha dificultado apreciar la convergencia en probabilidad de las frecuencias relativas hacia la probabilidad.

En cuanto a la idoneidad cognitiva podemos calificarla de baja debido a carencias tanto del dispositivo de simulación (lentitud para simular grandes series de experimentos) como de las intervenciones del profesor. Es cierto que "el contenido" pretendido tiene un grado de complejidad alto si tenemos en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes. Sin una ayuda adecuada del profesor no es posible que, de manera autónoma, los estudiantes "reconstruyan" la ley de los grandes números y reconozcan sus características. Pero con una serie de tareas mejor planificadas y con explicaciones acertadas en los momentos claves del estudio es posible lograr una adecuada comprensión de los conocimientos pretendidos.

El tipo de formato de interacción entre estudiantes, profesor y medio podemos calificarlo de "dialógico", por lo que en principio es posible identificar los conflictos de significados que se ponen en juego. Pero de nuevo, bien por el "contrato didáctico" establecido (se pretende un trabajo práctico, autónomo y constructivista), o porque el profesor no domina la complejidad de los conocimientos pretendidos, ni es consciente de los sesgos en el razonamiento probabilístico, no ha habido oportunidad de superarlos. Por otra parte, el tiempo asignado es muy escaso para abordar el estudio de los dos módulos del simulador y los conocimientos probabilísticos implicados. Ya hemos indicado las carencias del simulador al no permitir registrar la "historia" de las desviaciones entre las frecuencias y la probabilidad.

En la figura 5 resumimos las principales características de la trayectoria didáctica implementada.

Un fenómeno didáctico que identificamos en estas interacciones podemos describirlo como "pasividad docente": en momentos críticos del proceso de estudio en los que se manifiestan conflictos semióticos, el profesor no es consciente de ellos y no interviene introduciendo los cambios necesarios en la trayectoria epistémica y mediacional; no aprovecha el contexto creado para apoyar sus explicaciones. Tampoco la interacción entre los estudiantes, uno de ellos con conocimientos más apropiados desde el punto de vista de los significados pretendidos, es garantía de superar los conflictos.

El análisis de la trayectoria epistémica implementada muestra una cierta "presión curricular", por la gran cantidad de tareas y conocimientos cuyo aprendizaje se ha propuesto en una sesión de sólo 45 minutos. Además de la simulación de una moneda, que como hemos visto resultó incompleto, se abordó la simulación del lanzamiento de "dados" de 6, 12, 7 y 3 caras con el primer módulo, y se continuó con la exploración del segundo módulo, donde se entra en contacto con el teorema central del límite (convergencia a la distribución normal de probabilidad de la suma y media de puntos obtenidos al lanzar repetidamente varios dados).

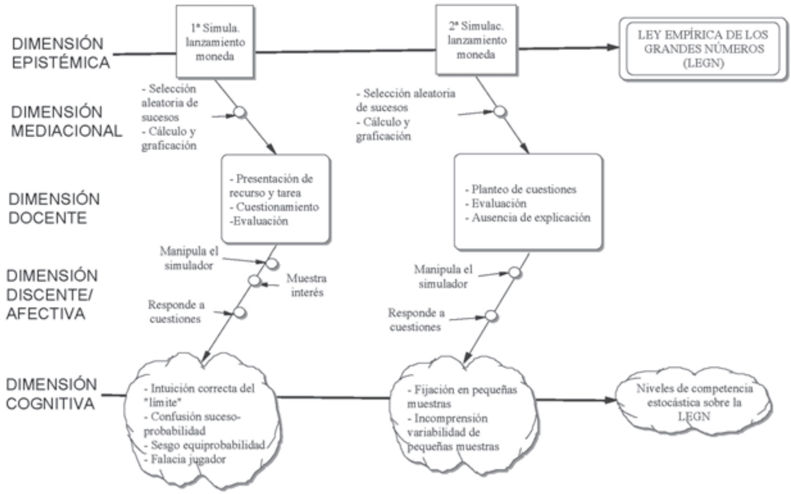

Figura 5 – Trayectoria didáctica

El uso de las "nuevas tecnologías de la información" puede favorecer la aparición de este fenómeno de "presión curricular": la pretensión de abarcar demasiados conocimientos sin tener en cuenta su complejidad y los recursos escasos de que se dispone, principalmente en cuanto al tiempo asignado.

Síntesis e implicaciones

Algunas conclusiones de nuestro estudio son las siguientes:

1. La "guía de prácticas", donde se diseñaron de manera parcial y difusa los significados pretendidos en el proceso de estudio, no incluyó consignas que llevaran a los estudiantes a observar el comportamiento de series grandes de simulaciones, la observación de las rachas y la rapidez de la convergencia. Desde el punto de vista del significado de referencia de "la ley empírica de los grandes números" esta es una carencia importante ya que los estudiantes tendrán dificultades para observar el comportamiento de las desviaciones de las frecuencias relativas y la probabilidad y la presencia de las rachas de sucesos.

2. El tiempo asignado a la exploración del simulador y al estudio de los conocimientos probabilísticos puestos en juego fue claramente insuficiente.
3. Los alumnos fueron incapaces de encontrar una explicación probabilística de los resultados de las simulaciones y la convergencia. Permanecen en un nivel puramente perceptivo, empírico, sin comprender la naturaleza y justificación de las regularidades o irregularidades que observan en la ocurrencia de sucesos y en las frecuencias relativas.
4. El profesor adoptó una "actitud constructivista", esperando que los estudiantes por sí mismos construyeran los conocimientos pretendidos. No actuó ante los conflictos cognitivos que se han presentado, particularmente sobre la convergencia en probabilidad de las frecuencias relativas a la probabilidad, ni aportó información a fin de superar tales conflictos y hacer progresar el aprendizaje.
5. Los momentos de regulación (institucionalización), en los cuales las explicaciones del profesor son potencialmente efectivas y "necesarias", pueden ocurrir en cualquier punto de la trayectoria didáctica. Sin embargo, esta función docente requiere de parte del profesor un dominio en profundidad del significado de referencia de los objetos estadísticos. Así mismo, es necesario que domine los conocimientos didácticos específicos de los contenidos que pretende enseñar, en este caso, conocimiento de los principales sesgos e intuiciones incorrectas sobre el comportamiento de las secuencias aleatorias.
6. Sería conveniente complementar el programa "box model" con otros recursos que permitan representar la secuencia de frecuencias relativas para ayudar en la superación de los conflictos cognitivos observados. Sería necesario estudiar con una tecnología tradicional de "papel y lápiz" las probabilidades a priori de los sucesos asociados a las experiencias aleatorias hacia las cuales se "centran" las frecuencias relativas.

Nuestros datos y reflexiones muestran la complejidad del trabajo del profesor, quien debe tener un conocimiento amplio de las configuraciones epistémicas de referencia, de las configuraciones cognitivas de los estudiantes con relación a los contenidos matemáticos pretendidos, ser capaz de identificar en momentos críticos los conflictos semióticos y tomar decisiones sobre el tipo de actuación que debe adoptar. La gestión de los recursos tecnológicos en cada momento de la trayectoria didáctica también plantea delicadas cuestiones.

El trabajo personal del estudiante, o en equipo, sobre tareas adecuadas, permite contextualizar los conocimientos matemáticos. Pero la progresión de los conocimientos y la optimización de la idoneidad del proceso de estudio requiere una secuencia de configuraciones didácticas de tipo dialógico y magistral que no siguen en principio un patrón regular, sino que su articulación depende de la aparición de conflictos que deben ser resueltos con cambios en las configuraciones didácticas. Como afirma Masalski (2005, p. ix), "encontrar modos efectivos de usar la tecnología en la enseñanza, aprendizaje y evaluación en matemáticas puede todavía ser una tarea desalentadora".

Los conocimientos didácticos del profesor deben abarcar el componente o dimensión epistémica (significados institucionales, sus adaptaciones y cronogénesis), dimensión cognitiva (significados personales, conflictos cognitivos descritos en la literatura), dimensión instruccional (patrones de interacción, tipos de configuraciones didácticas, su articulación, optimización de los recursos tecnológicos y temporales) y dimensión afectiva.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los Proyectos de Investigación BS2002-02452, y MCYT SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Ambos proyectos son cofinanciados con Fondos FEDER (UE).

Referencias

BATANERO, C.; HENRY, M. y PARZYSZ, B. (2005). "The nature of chance and probability". In: Jones, G. A. (ed.). *Exploring probability in school. Challenge for teaching and learning*. New York, Springer.

GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 22, n. 2-3, pp. 237-284.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. y FONT, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible em: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A. y FONT, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 26, n.1, pp. 39-88.

GODINO, J. D.; ROA, R.; RUIZ, F. y PAREJA, J. L. (2005). *Mathematical and pedagogical content knowledge for prospective elementary school teachers: the "Edumat-Maestros" project*. 15th ICMI Study Conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brasil. Disponible en URL: http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html

HEID, M. K. (2005). "Technology in mathematics education: tapping into visions of the future". In: Masalski, W. J. y Elliot, P. C. (eds.), *Technology – supported mathematics learning environments. Sixty – Seventh Yearbook*. Reston, VA, NCTM.

MASALSKIN, W. J. (2005). "Preface". In: Masalski, W. J. y Elliot, P. C. (eds.). *Technology – supported mathematics learning environments. Sixty – Seventh Yearbook*. Reston, VA, NCTM.

TAUBER, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1982). "Belief in the law of small numbers". In: Kahneman, D.; Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York, Cambridge University Press.

Recebido em out./2006; aprovado em out./2006.