Sociedade Brasileira de Educação Matemática

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

O RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO E OS EXPERIMENTOS MENTAIS NUMA PERSPECTIVA SEMIÓTICA

DIAGRAMMATIC REASONING AND THOUGHT EXPERIMENTS IN A SEMIOTIC PERSPECTIVE

Willian José da Cruz[1]

Resumo

Este artigo é um esboço da pesquisa desenvolvida no âmbito do programa de doutoramento em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, a qual apresenta a possibilidade de aplicação do conceito de experimentos mentais na Matemática e/ou na Educação Matemática, cujo objetivo é avultar o pensamento criativo por meio de representações e construções de diagramas. Este conceito está baseado principalmente em dois conceitos criados por Charles Sanders Peirce: abdução e o raciocínio diagramático. Apesar dos conceitos de abdução e de raciocínio diagramático serem problemáticos, ambos ajudam a entender como é possível a aplicação dos experimentos mentais na construção do conhecimento matemático. A abdução, por exemplo, descreve o processo de criação de uma nova ideia, mas não explica como é possível criar novas ideias. O raciocínio diagramático desenvolve o processo de construções de representações relacionais das áreas do conhecimento, em especial na matemática, experimentando com elas e observando os resultados. Os experimentos mentais são considerados formas que o sujeito tem de colocar seus próprios pensamentos (ideias) como objeto de consideração numa dada prova e dentro de um determinado contexto, por meio de uma representação, mostrando tanto a coerência do conceito, do ponto de vista do conteúdo, quanto a possibilidade de aplicação de tal conceito. A dinâmica de aplicação dos experimentos mentais na Educação Matemática começa, por assim dizer, de um pensamento abdutivo e se desenvolve por meio de um raciocínio diagramático.

Palavras-chave: Abdução. Sistema de representação. Signos. Educação matemática.

Abstract

This article is an outline of the research developed under the PhD program in Mathematical Education of the Anhanguera University of São Paulo, which presents the possibility of applying the concept of thought experiments in Mathematics and/or Mathematics Education, whose objective is to overflow creative thinking through representations and constructions of diagrams. This concept is based mainly on two concepts created by Charles Sanders Peirce: abduction and the diagrammatic reasoning. Although the concepts of abduction and diagrammatic reasoning are problematic, it helps to understand how it is possible to apply thought experiments in the construction of mathematical knowledge. Abduction, for example, describes the process of creating a new idea, but it does not explain how it is possible to create new ideas. The diagrammatic reasoning develops the process of constructing relational representations of the areas of knowledge, especially in mathematics, experimenting with them and observing the results. Thought experiments are considered as forms that the subject

[1] Doutor em Educação Matemática pela UNIAN - SP; Docente do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora / UFJF, Juiz de Fora, MG –Brasil. E-mail: williancruz990@gmail.com.

has to put his own concepts (ideas) as object of consideration in a given proof, and within a given context, through a representation, showing both the coherence of the concept, from the point of view of the content, as to the possibility of applying such a concept. The dynamics of application of thought experiments in Mathematics Education begins, so to speak, with abductive thinking and develops concepts a diagrammatic reasoning.

Keywords: Abduction. Representation system. Signs. Mathematics education

Introdução

O homem é essencialmente um "ser simbólico", conforme afirma Ernest Cassirer (1994) em seu livro *Ensaio Sobre o Homem*. Essa consideração substituiu gradualmente, no século passado, a caracterização aristotélica tradicional do homem como um "animal racional".

A linguagem, o mito, a arte e a religião são partes desse universo simbólico e todo progresso humano tanto em pensamentos quanto em experiências é influenciado por essa rede simbólica que pode ser considerada uma experiência humana. Tal perspectiva parece ter a maior importância para a cognição matemática, bem como para Educação Matemática. No entanto, pouca pesquisa tem sido feita sobre os fundamentos semióticos da epistemologia matemática e da cognição.

Este artigo tem a intenção de desenvolver conhecimentos acerca do conceito de experimentos mentais, associado a dois outros conceitos, a saber: abdução e raciocínio diagramático. Esse estudo se dará por meio da perspectiva semiótica peirciana.

Na primeira parte deste artigo, baseado na afirmação de que todo pensamento se dá por meio de uma perspectiva semiótica, buscar-se-á entender o que é semiótica e quais as funções das representações no processo de construção de conceitos e na compreensão do pensamento abdutivo.

O conceito de abdução de Charles Peirce é bem conhecido na filosofia da ciência como uma contribuição para entender como as descobertas científicas são possíveis. No entanto, será discutido, neste artigo, como o processo de formação de uma hipótese explicativa torna o conceito de abdução confuso, baseando-se em Hoffmann (2006).

Na sequência, concentrar-se-á em outro conceito de Peirce, o Raciocínio Diagramático, cuja ideia central é a necessidade de *representar* o que se sabe sobre algo, no intuito de resolver os problemas e de estimular a criatividade. Todo esse processo é possível por meio do desenvolvimento dos experimentos mentais, que são formas que o sujeito tem de colocar seus próprios pensamentos como objeto de consideração, por meio de uma representação, e associados a um sistema coerente de representações, ou seja, dentro de um contexto bem definido (CRUZ, 2015).

Ao final, pretende-se criar um conjunto de características que permitam entender como é possível identificar e/ou utilizar os experimentos mentais no desenvolvimento do conhecimento matemático, principalmente no que tange ao ensino dessa ciência.

O que é Semiótica?

Semiótica é a ciência que trata basicamente de como os signos de todos os tipos se relacionam com os seus objetos ou com outros signos. Charles Sanders Peirce e Ferdinand de Sausurre são considerados os pais da semiótica. Serão abordados neste texto os direcionamentos da semiótica sob a perspectiva de Peirce.

Para Peirce, o signo é uma relação de representação, ou seja, o signo medeia a relação entre os objetos e o interpretante. Ele oferece uma tríade e distingue entre os sinais: o *representâmen,* o sinal; o *interpretante,* o sentido ou significado feito pelo sinal, seja imediato (o significado *é* o sinal), dinâmico (o significado é um efeito) ou final (sentido normativo / ideal); *e o objeto,* representado pelo sinal, seja imediato (o objeto é representado no sinal) ou dinâmico (o objeto real) (BRENT, 1998).

Signo ou *representâmen* é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. O signo cria na mente da pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. O signo, assim criado, denomina-se interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Esse objeto não é representado em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia (fundamento do *representâmen*), no sentido de ter um conteúdo similar. Logo, pode-se concluir que o *representâmen* está ligado a três aspectos: o fundamento, o objeto e o interpretante. Isso se aplica, por exemplo, ao símbolo abaixo representado (pi):

Figura 1 – A letra ou número (pi)

$$\pi$$

O fundamento é a ideia que o símbolo gera na mente de quem o percebe. O objeto pode ser considerado um número ou uma letra. No caso do símbolo representado na Figura 1, o interpretante é o que gera significado, ou seja, esse número vale 3,14 (por exemplo).

O signo pode apenas representar o objeto e referir-se a ele. Todavia, tal representação não necessariamente proporciona familiaridade ou reconhecimento desse objeto. Um signo é tudo aquilo que está relacionado a uma segunda coisa, seu objeto, com respeito a uma qualidade, de tal modo a trazer uma terceira coisa, seu interpretante, gerando significado para esse signo.

A ciência semiótica apresenta três ramos, a saber: gramática especulativa pura, lógica e a retórica pura. Na gramática especulativa pura, a tarefa é determinar o que deve ser verdadeiro quanto ao *representâmen*, incorporando a ele um significado qualquer. Esse ramo é utilizado por toda inteligência científica. Já a gramática especulativa é a doutrina das condições gerais dos símbolos e signos e tem um caráter significante, ao passo que a lógica é a ciência do que é quase verdadeiro, a fim de que possa aplicar-se a qualquer objeto. Quanto à Retórica pura, sabe-se que permite criar leis pelas quais um signo dá origem a outro signo.

O signo apresentado na Figura 1, cujo nome é (pi), abordado segundo os preceitos da gramática especulativa, pode se referir a um número. Diante desse contexto, cabe questionar: Que tipo de número? Quais são as suas características? Em termos lógicos, pode ser um número racional ou irracional. Que leis garantem isto?

Ao se utilizar os preceitos da retórica pura, as leis seriam criadas para garantir se esse número é racional ou irracional. “Para Pierce, todo raciocínio é definido por tríades e uma tríade particularmente importante é a que envolve os três tipos de signos: o ícone, o índice e o símbolo” (CRUZ, 2015, p.33). O primeiro, ícone, é um signo diagramático que ostenta uma semelhança ou analogia com o sujeito do discurso. O segundo é o índice que, tal como um pronome demonstrativo ou relativo, chama a atenção para o objeto particular que está sendo descrito. E o terceiro é o símbolo, isto é, o nome geral ou a descrição que significa o objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e a característica do significado (PEIRCE, 2010).

O ícone é um signo que se refere ao objeto, apresentando características semelhantes às do próprio objeto; é a imagem ou a representação do objeto (CRUZ, 2015). Na Figura 2, por exemplo, ver-se a imagem de um cachimbo que pode ser compreendido como um ícone desse objeto, assemelhando-se e mostrando algumas características comuns a um cachimbo real. Pode-se concluir que um ícone refere-se a seu objeto por semelhança.

Figura 2 – Ícone do cachimbo

Fonte: René Magritte[2].

Já o índice é um signo que se refere ao objeto em virtude de ser realmente afetado por ele. O índice envolve uma espécie de ícone, um ícone do tipo especial e não uma mera semelhança com seu objeto (CRUZ, 2015).

Figura 3 – Índice pegadas na areia

Fonte: Tripadvisor[3]

[2] Ver Foucault (2014).
[3] https://www.tripadvisor.com.br/LocationPhotoDirectLink. Essa foto de Praia Cacimba do Padre. Acesso em 26/06/2016.

Na Figura 3, por exemplo, as pegadas em uma praia sugerem ou indicam que alguma pessoa caminhou por ali. É um índice de que alguém caminhou por aquele lugar, indicando também a direção pela qual o suposto sujeito seguiu. Em termos gerais, um índice representa uma relação direta com algo existente.

Quanto ao símbolo, um signo que se refere ao seu objeto, denotando uma virtude ou uma lei, normalmente encontra-se associado a ideias gerais. Essas operam no sentido de fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo ao seu objeto, ou seja, é uma convenção (CRUZ, 2015).

Figura 4 – Os símbolos do trânsito

Fonte: <https://image.jimcdn.com/app/cms/image/transf/none/path/secda7390bf058377/image/i24229310bbb48d97/version/1442700257/image.jpg>

Na Figura 4, há exemplos de símbolos, pois os sinais de trânsito são convenções capazes de significar algo, uma ordem, um alerta, a quem dirige um veículo ou ao pedestre. Um símbolo tem um significado definido em termos de convenção social.

As letras, na álgebra, são todas índices, ao passo que os diagramas algébricos são ícones das estruturas relacionais entre eles. Segue um exemplo: (A) $3 + 5 = ?$ Representa um valor de uma função, com os argumentos 3 e 5, (B) $3 + ? = 8$ é um ícone de uma relação, como o equilíbrio. Em construções assim, percebe-se que as crianças têm dificuldade em passar de (A) para (B)!

Símbolos, no entanto, são os mais importantes tipos de sinais e, portanto, resultam da consideração da matemática como uma linguagem formal. Símbolos são indispensáveis na matemática, em particular, por causa dos processos iterativos de hipostatização e de abstração reflexiva. O matemático substitui um grupo de sinais, ou de coordenadas, como em um vetor ou de uma matriz, por exemplo, por símbolos.

No cálculo diferencial, também, podem-se formar funções a partir de outras funções e assim sucessivamente. Ou pode-se apresentar a estrutura de um grupo de qualquer tipo, em termos axiomáticos, usando símbolos simples para representar os elementos do grupo, ignorando a sua natureza, suas complexidades internas ou estrutura. Representações icônicas ou indiciais são de nenhum uso a esse respeito, porque não reduzem as complexidades envolvidas na iteração.

O signo não representa o objeto em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia. O signo é conscientemente reconhecido pelo sujeito cognoscente e, para isso, o sujeito tem de criar outros signos e interpretações do primeiro. Significado é uma interpretação de um signo dentro de outro sistema de signos.

Para que um sujeito reconheça uma representação de um determinado objeto, este objeto já tem que significar algo para ele. O sujeito não consegue identificar, ou reconhecer, uma determinada representação, sem um conhecimento prévio do objeto em questão, isto é, é necessário ter uma noção do objeto representado.

Segundo Pierce (2010), um argumento é um signo que representa distintamente o interpretante, denominado de sua conclusão que deve ser determinada por ele. Aquilo que resta de uma proposição depois de seu sujeito ter sido removido é um termo denominado de seu predicado. O que resta de um argumento quando sua conclusão é removida é uma proposição que se denomina sua premissa. Há três tipos de argumentos: dedução, indução e abdução.

Conforme Peirce (2010), a dedução é o único raciocínio necessário, considerada como sendo o raciocínio matemático, pois parte de uma hipótese, cuja verdade ou falsidade não tem a ver com o raciocínio, sendo suas conclusões igualmente ideais. Já a indução é uma verificação experimental de uma teoria, justificando-se por ter suas conclusões passíveis de erros, mas, mesmo assim, a aplicação ulterior do mesmo método deve corrigir o erro. O teórico ressalta ainda que a abdução é de onde vêm todas as ideias da ciência, consistindo em estudar os fatos e projetar uma teoria para explicá-los. A dedução conecta os processos abdutivos e intuitivos e, por esse motivo, pode-se dizer que a matemática não é totalmente formal, mas é constituída de experimentos mentais.

O conceito de Abdução

Destaca-se, como foi dito anteriormente, que a ciência semiótica tem três ramos, a gramática especulativa pura, a lógica e a retórica pura. A gramática especulativa pura, como mencionado, incorpora um significado ao signo ou *representâmem*. Pode-se dizer que ela dá origem às ideias, ou seja, é uma espécie de abdução.

O conceito de abdução de Charles Sanders Peirce (2010) é bem conhecido na filosofia da ciência. Esse conceito é compreendido como uma contribuição que permite entender como as descobertas científicas são constituídas. No entanto, os apontamentos de Peirce a respeito da abdução tornam-se, por vezes, confusos, principalmente quando se trata de explicar como o processo de obtenção de hipóteses explicativas pode ser possível. De início, considera-se a seguinte definição de Pierce:

> Abdução é o processo de formação de uma hipótese explanatória[4]. É a única operação lógica que apresenta uma ideia nova, pois a indução nada faz além de determinar um valor e a dedução meramente desenvolve as consequências necessárias de uma hipótese pura. (PEIRCE, 2010, p. 220)

Para Peirce, abdução é o processo de formação de uma hipótese explicativa, mas na segunda metade de sua definição, ele apresenta uma explicação para ela, dizendo, implicitamente que existem apenas três operações lógicas que ele também nomeia como três tipos elementares de raciocínio, a saber: abdução, dedução e indução.

Dedução, segundo Peirce (2010, p.5), é o modo de raciocínio que examina as afirmações colocadas nas premissas de um argumento, elaborando um diagrama relacionado a essas afirmações e percebendo, nas partes desse diagrama, relações não explicitamente mencionadas, mas que estão asseguradas, por meio de elaborações mentais, sobre o diagrama, com o objetivo de concluir pela necessária ou provável verdade dessas relações.

A indução é o modo de raciocínio por meio do qual se adota uma conclusão como aproximada por resultar ela mesma de um método de inferência que, no final, deverá conduzir à verdade. Pode-se concluir que, segundo Peirce, qualquer forma de raciocínio que não seja dedução ou indução é abdução. Entretanto, há um problema nessa consideração, pois o conceito de abdução apresenta-se muito amplo.

Em linhas gerais, dedução diz o que algo deve ser, a indução mostra que alguma coisa é realmente operativa e a abdução simplesmente sugere que alguma coisa pode ser, ou seja, dá significado a algo (gramática especulativa pura). Os contextos apresentados na sequência ilustrarão esses conceitos.

Do ponto de vista histórico

[4] As expressões hipótese explanatório e hipótese explicativo são sinônimos nesse texto.

Há cerca de 2,5 milhões de anos, tem-se a evidência da existência de uma espécie, um tipo de australopiteco, que utilizou instrumentos para descarnar animais, como pode ser visto na figura 6. Supõe-se que essa espécie entendia que, ao se alimentar de um animal abatido, pudesse utilizar um instrumento, uma pedra lascada, para poder raspar ossos e, assim, não só aproveitaria os pedacinhos, mas também retiraria dos ossos nutrientes que não seriam acessíveis ao comer só com os dentes (D'AMBROSIO, 2001).

Figura 6 – O uso da pedra lascada

Fonte: <https://ogimg.infoglobo.com.br/in/15046337-c6d-86a/FT1086A/pedra-lascada-1.jpg>

Desse modo, passou-se a ter mais alimentos, de maior valor nutritivo. Segundo D'Ambrosio (2001) esse parece ter sido um fator decisivo no aprimoramento da capacidade cognitiva das espécies que dominaram essa tecnologia.

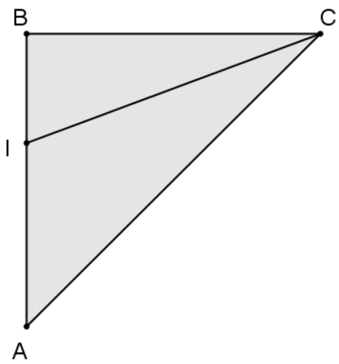
O pensamento abdutivo emergiu no momento em que esse australopiteco escolheu e lascou um pedaço de pedra com a intenção e o objetivo de descarnar um osso. Sua mente matemática se revelou nesse momento. Essa abdução permitiu que ele selecionasse a pedra, avaliasse sua dimensão e lascasse essa pedra o necessário e o suficiente para atender ao seu objetivo. Esse pensamento levou o australopiteco a avaliar e comparar dimensões.

Na observação da matemática em sala de aula

Esse segundo exemplo foi baseado no trabalho de Martim A. Simon (1994), intitulado, *"Beyond Inductive and Deductive Reasoning*: *- The Search for a Sense of Knowing*" desenvolvido em salas de aulas nos Estados Unidos. Esse exemplo, em especial, descreve o que Simon denomina de "*Transformational reasoning"* (raciocínio transformacional). Esse raciocínio transformacional pode ser considerado um pensamento abdutivo. Veja o exemplo:

O triângulo ABC tem um ângulo reto no vértice B. I é um ponto no lado AB situado entre A e B. Como a soma das medidas dos segmentos AB e BC (AB+BC) pode ser comparada com a soma das medidas dos segmentos AI e IC (AI+IC)?

Figura 7 – O pensamento abdutivo de Sam



Fonte: elaborado pelo autor.

Na Figura 7, há a representação geométrica do enunciado apresentado. Levando-se ambos em consideração, é possível afirmar que uma prova dedutiva pode ser gerada mostrando que a soma das medidas dos segmentos AB e BC é maior do que a soma das medidas dos segmentos AI e IC. No entanto, uma Abordagem do que Simon chama de raciocínio transformacional pode fazer uso da experiência do aluno em diferentes tipos de conhecimentos relacionados a esse problema. Considere a abordagem de Sam (um aluno do décimo ano de escolaridade nos Estados Unidos que pode ser comparado a um aluno do segundo ano do ensino médio aqui no Brasil):

O ponto A é minha casa e o ponto C é minha escola. Dentro do triângulo ABC há uma a área arborizada. Normalmente, eu ando da minha casa (A) até a esquina (B), viro à direita e caminho até a escola (C). Às vezes, enquanto estou subindo o quarteirão, corto o bosque (no ponto I). Eu sei que quando eu corto o bosque, o caminho é mais curto. Eu também sei que quanto mais cedo [mais perto de A que eu corto o bosque] o mais curto eu tenho que andar.

Nota-se que a sentença final do raciocínio transformacional permitiu a Sam elaborar um teorema mais complexo e abrangente do que o declarado no problema original (SIMON, 1994). Nesses contextos, nota-se que o pensamento abdutivo gerou possibilidades e novas ideias. O australopiteco, por exemplo, desenvolveu uma forma de utilizar instrumentos na obtenção de alimentos com mais nutrientes e o aluno Sam buscou uma possibilidade de demonstrar que a soma AB+BC é maior que a soma AI +IC.

Um dos problemas levantados por Hoffmann (2006), no entendimento do conceito de abdução, é que esse conceito se torna muito amplo. Não só encontra-se abdução na ciência com o processo de examinar uma quantidade de fatos e de permitir que esses fatos sugiram uma teoria (PEIRCE, 2010), mas também se encontra a abdução em qualquer *percepção*. Um segundo problema diz respeito à alegação de considerar a abdução supostamente como uma operação lógica. E um terceiro problema diz respeito à pergunta sobre o que exatamente a abdução faz (HOFFMANN, 2006).

Peirce insiste, por um lado, no processo de formação de uma hipótese explanatória ou explicativa e, por outro, na introdução de uma nova ideia. Entretanto, esses pensamentos do autor permitem diferentes interpretações. Em primeiro lugar, é possível que os dois conceitos referem-se a duas operações diferentes porque podemos formar uma hipótese explicativa sem gerar uma nova ideia. Se *a percepção* é um caso de abdução, ela poderia gerar uma série de hipóteses explanatórias em relação às entradas sensoriais, embora praticamente nenhuma nova ideia possa ser constituída. Por exemplo, ao ler uma palavra, a palavra lida é uma hipótese que explica uma sequência de letras. Nesse caso, uma hipótese explicativa é formada sem introduzir uma nova ideia, uma vez que a ideia que é associada a uma certa sequência de letras já existe na mente.

Em segundo lugar, não está claro se a ideia apresentada é apenas nova para os indivíduos ou nova para a sua cultura ou civilização. E, em terceiro lugar, uma ideia pode ser tanto o que foi discutido acima, como o resultado de uma reificação, isto é, algo que pode ser representado por um conceito singular, ou por um símbolo, ou poderia ser uma nova *perspectiva* sobre os mesmos dados como produzido por uma transformação teórica.

Em suma, a definição inocente e bem conhecida de Peirce pode descrever seis formas distintas de abdução, apresentadas por Hoffmann (2006), na tabela que segue:

Tabela 1 – Seis formas de abdução que são possíveis com base apenas em Peirce

	Se "ideia" significa algo que pode ser representado por um símbolo singular (Com base na reificação)	Se "ideia" é sobre dados, ou sobre uma representação (Transformação teórica)
Se uma explicação é possível, referindo-se a uma ideia já existente na mente	Identificando Abdução (Como na leitura) (a)	Mudança de forma (b)
Se criar uma ideia que é nova para o indivíduo, mas que já existe como parte do conhecimento de sua cultura	Abdução Reificação Analógica (c)	Abdução Teórica Analógica (d)
Se criar uma ideia inteiramente nova	Abdução Reificação criativa (e)	Abdução Teoria da criação (f)

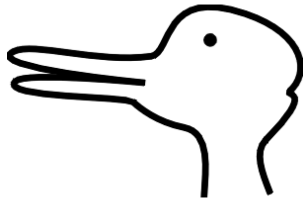
Fonte: Hoffmann (2006, p.9).

Pela interpretação dos dados da tabela, chega-se às seguintes conclusões:

1 - A identificação da abdução (a) parte de uma ideia já existente na mente, significando algo que pode ser representado por um símbolo singular. Um exemplo disso ocorre quando se fala ou escreve a palavra “triângulo” e, consequentemente, vem à mente a imagem de um triângulo equilátero.

2 - A mudança de forma (b), quer dizer em ver *algo como algo*, ou seja, em uma única representação, ver a imagem de um pato ou de um coelho, como apresentado na figura 8. É uma forma de compreender a ideia existente na mente por meio de dados ou uma representação.

Figura 8 – Isto é um pato ou um coelho?



Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=ver+pato+como+coelho&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiLkZ_Rqa3WAhVCkpAKHThABekQ_AUICygC&biw=888&bih=565#imgdii=23eLejorlZXM:&imgrc=IeBt99YZ_TtmN>

3 - Na reificação analógica (c), há uma ideia nova para o indivíduo, mas esta faz parte do seu universo cultural, podendo ser representada em uma forma

singular. A ideia de triângulo geral é um exemplo de reificação por analogia. Este triângulo geral existe no universo matemático do indivíduo, fazendo parte, teoricamente, de sua cultura, podendo ser representado por um triângulo particular.

4 - A abdução teórica analógica (d) traz uma ideia nova analisada por meio de dados ou representações. A ideia de Tales em colocar uma estaca para medir a altura de uma pirâmide, observando as relações entre a sombra da estaca e a sombra da pirâmide, pode ser considerada uma abdução teórica analógica.

5 - A abdução reificação criativa (e) traz uma ideia inteiramente nova que pode ser representada por um símbolo singular. Um exemplo tirado da topologia é a consideração de um quadrado como uma bola.

6 - A abdução Teoria da Criação (f) apresenta uma ideia inteiramente nova sobre dados ou uma representação. Por exemplo, a ideia de um número cujo quadrado é negativo, isto é, $i^2=-1$.

Estas formas de abdução estão presentes no desenvolvimento do conhecimento matemático, por isso se torna importante a atenção dada a esses seis tipos apresentados anteriormente. Hoffmann (2006) afirma que o problema mais importante com o conceito de abdução de Peirce diz respeito à questão de como a capacidade de inferir abdutivamente pode ser explicada. Peirce insinua a capacidade do homem de adivinhar os caminhos da natureza corretamente e também a parte incontrolada da mente, pois, segundo ele, uma série de atos controlados precisaria de um começo (PEIRCE 2010).

Entretanto, nenhuma dessas abordagens é suficientemente elaborada e a possibilidade de abdução permanece no final inexplicável. Nessa situação, deve-se concentrar em *métodos* que possam, pelo menos, facilitar a abdução. Este é o papel que o "raciocínio diagramático" e o uso dos “experimentos mentais” podem desempenhar numa teoria geral das descobertas científicas, em especial na Matemática e na Educação Matemática, isto é, o raciocínio diagramático e os experimentos mentais têm o papel de desenvolver tais *métodos.*

O raciocínio diagramático

Peirce define raciocínio diagramático como um processo de três etapas: (a) a construção de uma representação, (b) a experimentação dessa construção, e (c) a observação dos resultados. No entanto, a característica essencial do raciocínio diagramático, que torna este método muito interessante para a descrição das descobertas científicas, não se restringe aos três passos, mas engloba todo o processo que tem de ser realizado nos limites de um dado sistema de representação (HOFFFMANN, 2006). A esse respeito, Peirce afirma:

> Diagrama é um representâmen que é predominantemente um ícone de relações e é ajudado a ser assim por convenções. Índices são também mais ou menos usados. Isto deve ser realizado sobre um sistema perfeitamente consistente de representações fundada sobre uma ideia simples e facilmente inteligível (PEIRCE, 1979, 4. 418).

Quando Peirce definiu um diagrama como um *representâmen*, que é predominantemente um ícone de relações, devendo ser realizado em um sistema perfeitamente coerente de representação, ele trabalhou em uma série de definições para formular as bases da chamada Existência Gráfica, uma notação gráfica da lógica destinada a substituir notações algébricas (HOFFMANN, 2006).

Esse sistema de representação é caracterizado por um conjunto de convenções, cuja intenção é representar proposições e relações lógicas entre essas proposições, e indicar um conjunto de regras para a transformação de gráficos. Não há dúvida de que é preciso um sistema perfeitamente consistente de representação para mostrar implicações lógicas, e o mesmo é verdade para sistemas de representações em matemática.

Se quiser provar na geometria euclidiana, por exemplo, que os ângulos internos do triângulo somam 180°, pode-se usar uma reta paralela à base do triângulo como linha auxiliar para realizar a prova. A possibilidade de tal paralela, no entanto, é fornecida apenas na geometria euclidiana. Ou seja, os meios específicos de determinar, neste sistema de representação, o resultado de qualquer transformação de uma figura euclidiana tem que ser feito de acordo com as regras desse sistema.

Ao mesmo tempo, essas operações são também limitadas pelos meios disponíveis. Muda-se o sistema de representação, como tem sido feito no desenvolvimento das geometrias não euclidianas, abrem-se possibilidades inteiramente novas (HOFFMANN, 2006). Em suma, uma prova matemática é tão perfeita e consistente como o sistema de representação em que ela é realizada.

A consistência do sistema de representação é essencial quando se usa o conceito de raciocínio diagramático, além dos limites da lógica e da matemática, para uma teoria geral das descobertas científicas. Não só os sistemas axiomáticos em matemática devem ser consistentes, mas também, por exemplo, a descrição de estilos na arte, na gramática construída para entender a sintaxe das línguas no dia a dia e nas teorias da ciência.

Hoffmann (2006) afirma que além de consistência, há dois novos elementos que são comuns a todos os sistemas de representações. Por um lado, precisa-se deles para desenhar uma representação particular. Precisa-se de um sistema axiomático para a construção de uma prova matemática, por exemplo. Por outro lado, todos esses sistemas de representações desempenham um papel normativo; a lógica e a matemática podem verificar a validade de uma inferência, ou uma prova, por meio de regras e convenções definidas por um determinado sistema de representação.

O papel central do sistema de representação escolhido para o raciocínio diagramático se torna visível quando considera a sua função para cada uma das três etapas pelas quais o raciocínio diagramático possa ser definido. A consistência e normatividade do sistema escolhido para a representação são decisivas quando se trata da possibilidade de descobertas. Está contido nesse contexto um grau de pragmatismo (HOFFMANN, 2006).

Peirce destaca que o pragmatismo é uma ideia central para todos os raciocínios, em especial o raciocínio matemático.

> Tais raciocínios e todos os raciocínios, giram em torno da ideia de que se exercermos certas espécies de volição, experimentaremos, em compensação, certas percepções compulsórias. Ora, esta espécie de consideração, a saber, a de que certas linhas de conduta acarretarão certas espécies de experiências inevitáveis, é aquilo que se chama de "consideração prática". A partir do que, justifica-se a máxima, crença na qual constitui o pragmatismo. (PEIRCE, 2010, p. 195)

Tal inevitabilidade depende, obviamente, do caráter normativo do sistema de representação em que tal raciocínio é realizado (HOFFMANN, 2006). Pode-se destacar um fato evidente na matemática. Quando se opera 2+2, é evidente que a soma será 4, resultado das regras e convenções aritméticas como sistema de representação escolhido. Em outro sistema, tal resultado poderia não ser possível.

Esta experiência inevitável é a pré-condição mais importante para descobrir algo novo pelo raciocínio diagramático. Segundo Hoffmann (2006), podem-se distinguir duas possibilidades: por um lado, o desdobramento de novas implicações em um diagrama dentro de um determinado sistema de representação; por outro lado, o desenvolvimento de sistemas de representações pode, por si próprio, abrir novos horizontes e possibilidades, como tem sido o caso do desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

Na matemática e na lógica, podem-se formular uma clara distinção entre um sistema coerente de representação (por exemplo, um sistema axiomático, ou uma notação) e um diagrama construído por meio desse sistema. Isso não é tão fácil nas ciências em geral.

De um ponto de vista geral, o termo "sistema de representação" refere-se, em primeiro lugar, a essas condições de compreensão. Portanto, esse sistema só pode ser determinado com base em uma análise de representações concretas do que é em relação ao que ele supõe determinar.

Os experimentos mentais

A realidade do conhecimento pode ser conceituada como um processo semiótico que envolve o próprio sujeito. Otte (2012) conceitua cognição como o resultado de uma contradição dialética entre o sujeito cognoscente e a realidade objetiva que, no final, muda tanto o sujeito como a realidade objetiva.

O objeto de investigação não se revela de forma clara e óbvia, de modo a atingir o conhecimento com apenas a leitura de suas propriedades mais relevantes. É preciso que se estabeleça uma interação entre a sensação consciente e a reação objetiva, por meio de uma forma ou uma representação fixa, isto é, essa interação deve ser desenvolvida por meio de experimentos mentais.

Segundo Cruz (2015), os experimentos mentais são conceituados como formas que o sujeito tem para expor seu próprio pensamento, dentro de um determinado contexto, como objeto de consideração, por meio de uma representação, servindo a um duplo papel complementar: mostrar a coerência do próprio conceito do ponto de vista do conteúdo e permitir uma melhor compreensão das possibilidades de aplicação de tal conceito.

O experimento mental tem a característica de ser baseado em um sistema de atividades supostas, no qual as hipóteses são implicitamente assumidas. Permite o uso da intuição, combinando em si experiências e conhecimentos. Apresenta-se como um poderoso instrumento no aprimoramento e na compreensão sobre a natureza do conhecimento matemático; no entanto, a situação imaginada deve possibilitar ao cientista, ou ao experimentador, aplicar seus conceitos do mesmo modo como eram aplicados anteriormente, não procurando novos fatos (KUHN, 2011).

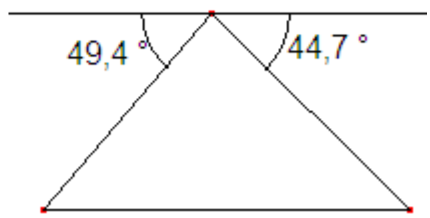
Os Experimentos Mentais também servem como fatos ou formas de estabelecer algum fenômeno, permitindo buscar algumas hipóteses para explicar tal fenômeno. Eles facultam ao cientista o acesso às informações que estão disponíveis para ele, porém não lhe são acessíveis, intensificando a crença na existência de objetos na Matemática e nas ciências em geral (CRUZ, 2015).

A importância de sua utilidade revela-se uma reflexão à base de dados conhecidos, ajudando a resolver confusões do modo de pensar. As verdades são consideradas sintéticas, do ponto de vista de Kant (1997) e estão relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio diagramático, na concepção de Peirce, na busca de generalidade. Na perspectiva dos experimentos mentais, a Matemática é compreendida como uma atividade, uma construção à base de possibilidades.

Veja um exemplo:

Para provar que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180° um aluno procedeu da seguinte maneira: traçou uma reta paralela à base e mediu os ângulos. Disse que os ângulos da base do triângulo mediam também 49,4° e 44,7° dando como justificativa o fato de serem alternos internos e finalmente chegou ao resultado sem medir nenhum ângulo interno do triângulo.

Figura 9 – A soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Cruz, (2015).

O exemplo dado é considerado um experimento mental, pois o aluno considerou situações não mencionadas nas premissas do problema como a reta paralela a uma das bases, utilizando dessa forma um raciocínio abdutivo, além de construir um diagrama, experimentá-lo e trabalhar nele. Para justificar a validade da prova do aluno, entende-se que essa prova só é possível no sistema de representação da geometria Euclidiana.

Otte (2012) escreve que, do ponto de vista semiótico, explicar significa representar. E uma representação é exatamente um aspecto da percepção, de certa maneira, numa determinada forma, isto é, um experimento mental. Ao fazer um julgamento perceptual, não se pode realmente fazer uma distinção entre o que vem do mundo externo e o que é procedente da própria interpretação.

Em um julgamento perceptual, a percepção de dados gerais ou de objetos ideais e a percepção de dados particulares parecem inseparáveis. Dizendo de outra forma, os processos de criação e de aplicação de representações simbólicas são inerentes, ou seja, de alguma forma estão ligados. A análise e a interpretação interagem uma com a outra e se constituem como passos de um raciocínio diagramático.

Otte (2012) afirma que uma prova que se pretende explicar tem de generalizar, pois a relatividade da diferença entre o mundo interno e o mundo externo do sujeito pode ser interpretada como uma forma de exigência na busca de conceituação em termos interativos e como conceito de representação, ou de um sistema de representação.

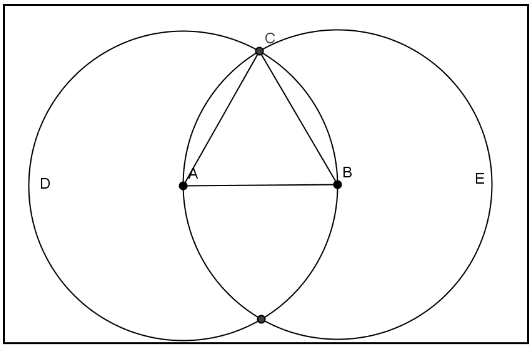
Olhando para a história da matemática e das ciências exatas, percebe-se que os experimentos mentais sempre desempenharam um papel importante para o desenvolvimento dessas ciências, supõe-se que desempenham também um papel importante no processo do pensamento matemático e na aprendizagem também.

Na verdade, todas as provas matemáticas até o final do século XVIII eram algum tipo de experimentos mentais, ao invés de provas no sentido da prática da matemática pura de hoje. As provas nos elementos de Euclides são exemplos clássicos de experimentos mentais. Veja a demonstração da proposição I de Euclides (2009, p.99):

> **Proposição 1** – Construir um triângulo equilátero sobre uma reta[5] limitada dada.
>
> **Demonstração:** Seja a linha reta AB de certo comprimento. Deve-se sobre ela descrever um triângulo equilátero. Com o centro A, e com o intervalo AB descreve-se o círculo BCD (isto é, o círculo que passa pelos pontos B, C e D); e com o centro B, e com o intervalo BA se descreva o círculo ACE (isto é, o círculo que passa pelos pontos A, C e E). Do ponto C, onde os círculos se cortam, traçam-se para os pontos A, B as retas CA, CB. O triângulo ABC será equilátero. Sendo o ponto A o centro do círculo BCD, têm-se AC = AB. E sendo o ponto B o centro do círculo CAE, tem-se BC = BA. Mas têm-se visto CA = AB, pois tanto CA, como CB, é igual a AB. Logo, será CA = CB. Portanto as três retas CA, AB, BC são iguais; e por consequência, o triângulo ABC, feito sobre a reta dada AB, é equilátero.
>
> A figura 10 indica o que deveria ser feito, conforme as instruções:

[5] Reta para Euclides é o que se conhece hoje como segmento de reta.

Figura 10 – Proposição I



Fonte: Euclides (2009, p. 99)

Segundo Mueller (1969), é possível entender a derivação euclidiana como um experimento mental visto que envolve um objeto físico idealizado, passível de representação em um diagrama, conforme demonstrado na figura 10. Cruz (2015) afirma que uma derivação euclidiana, então, é um experimento mental de certo tipo de experiência com a intenção de mostrar que uma determinada operação pode ser realizada e que certo tipo de objeto possui uma determinada propriedade.

O aspecto essencial dos experimentos mentais, e que não acontece num contexto de uma estrutura lógica definido em termos axiomáticos, é a capacidade de desenvolver um contexto de situações imagináveis, ou seja, um espaço de meras possibilidades. Toda a epistemologia de Kant é baseada neste fato. Por isso, defende-se, neste texto, a possibilidade de compreensão do conceito de experimentos mentais. Como estes se encontram envolvidos com as relações entre o aparato conceitual e uma realidade objetiva, o pensamento intuitivo desempenha um papel importante na aplicação desses experimentos.

Os experimentos mentais mostram o lado humano da ciência, enquanto a formalização, baseando-se nas relações de identidade e diferença, serve para eliminar os caprichos e as flutuações imprevisíveis do espírito humano e estabelecer uma implementação formal ou tecnológica do pensamento e do conhecimento. No experimento mental, cria-se a possibilidade de construção da referência à base de um pensamento especulativo. Não é uma simples intuição, mas uma experiência à base de um contexto teórico, um pensamento abdutivo, um passo intermediário.

Considerações

A Matemática precisa de generalização, por isso precisa de ideias e intuições. A atividade é um processo e o conhecimento é desenvolvido pela atividade que, por um lado, é determinada pelo objeto e, por outro, pelo indivíduo. A verdade de um teorema coincide com a possibilidade de formulá-lo. Nesse aspecto, verdade e certeza coincidem.

Peirce deu uma melhor caracterização da Matemática como atividade do raciocínio diagramático. Na matemática, construir diagramas permite ganhar uma intuição das relações e objetos considerados numa dada prova que, de outra maneira, não se tornariam visíveis. Esse pensamento diagramático pode ser traduzido como uma dinâmica de aplicação dos experimentos mentais, que produzem ideias para construir uma prova. Nesse caso, o raciocínio hipotético dedutivo torna-se uma interpretação do diagrama, ou seja, dos experimentos mentais. Os modelos de raciocínio diagramático (HOFFMANN, 2006) e de experimentação mental (CRUZ, 2015) podem ser resumidos da seguinte forma:

a) Há apenas uma situação na qual o processo de raciocínio diagramático e o processo de experimentação mental temporariamente cessam: quando se obtém o primeiro resultado possível de observar e analisar, isto é, o resultado não contradiz as expectativas. Nessa situação, a observação do experimento se torna uma implicação necessária do diagrama original, não ocorrendo alguma contradição. O processo pode ser encerrado. Algo novo é aprendido, embora nada possa surpreender.

b) Tudo, além dessa primeira possibilidade, conduz a uma série de etapas adicionais que finalmente permitem voltar ao primeiro passo, à construção de um diagrama. Isto significa que todo o processo está relacionado às atividades descritas.

c) Em relação aos meios disponíveis de representação, cada uma dessas voltas continua relacionada com o primeiro passo em um nível mais avançado: isto significa ser capaz de construir um *novo diagrama* por meio de um sistema de representação já utilizado desde o início, ou ser capaz de construir um novo diagrama baseado num *novo sistema de representação.*

De uma forma mais geral, pode-se até pensar que um experimento mental só produz hipóteses, enquanto uma prova formal produz certezas, mas, se assumirmos que uma prova matemática traz certezas, isso deve ser provado. Nas ciências naturais, os experimentos mentais são importantíssimos para a descoberta de novas leis e teorias. Sua aplicação na

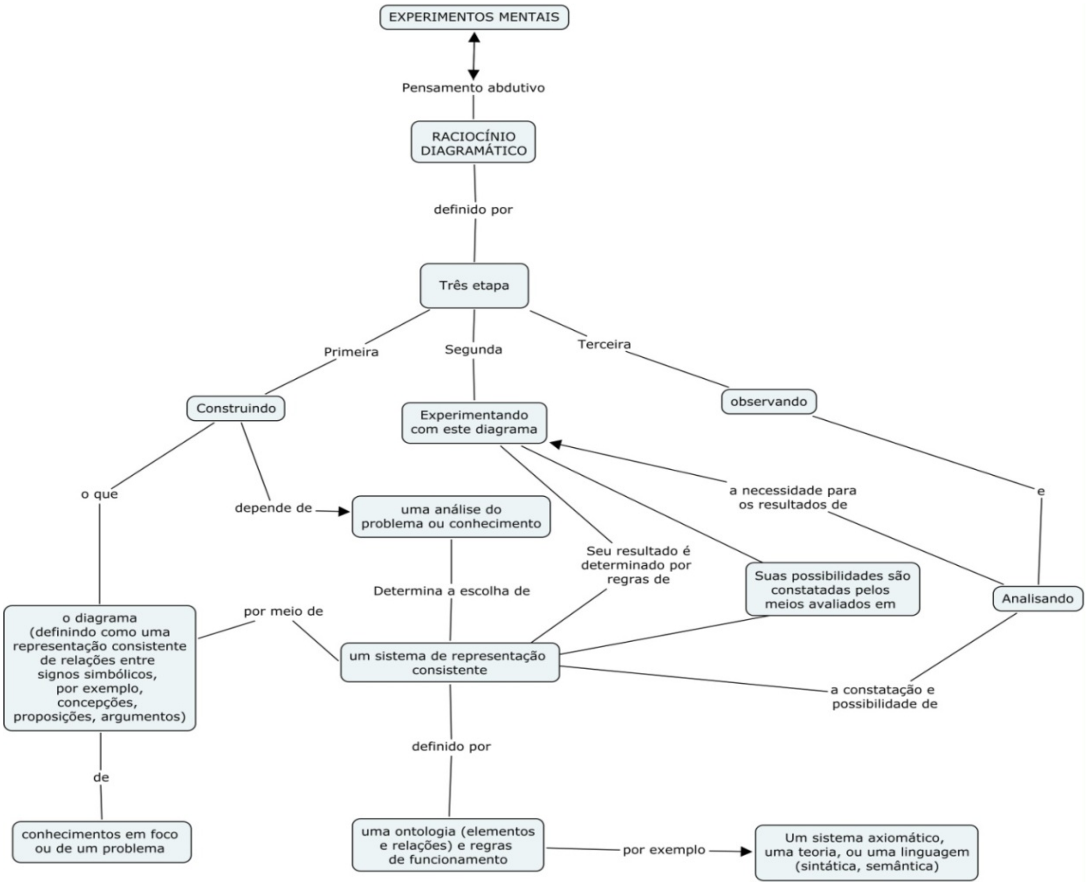
Matemática é uma questão de descoberta, mas há um problema em relação à fundamentação. Nesse sentido, não se podem dispensar as provas matemáticas formais.

Kuhn (2011) aponta que os experimentos mentais servem para criar e esclarecer conceitos abstratos, ou seja, constroem conceitos, mostrando que todo pensamento humano tem intensão e extensão. Tanto a intensão quanto a extensão dos nossos conceitos devem ser vistas como complementares entre si, sendo que, por um lado, elas funcionam de modo relativamente independente uma da outra, mas, por outro lado, estão ligadas circularmente (círculo hermenêutico).

A generalização de um conceito não é singular, pois há vários modos de realizá-la. Contudo, devemos seguir rigorosamente uma exigência. Qualquer conceito generalizado deve reduzir-se ao conceito original quando as condições originais forem preenchidas. A base da generalização é a construção de conceitos e um conceito pode ser qualquer imagem mental, ou seja, uma ideia.

Finalizando, segue um mapa conceitual, adaptado de Hoffmann (2006) para entender o raciocínio diagramático por meio do qual é possível sugerir uma noção mais ampla de como funcionam os experimentos mentais.

Figura 10 – Uma definição de raciocínio diagramático por Hoffmann



Fonte: Hoffmann (2006).

Referências

BRENT, J. **Charles Sanders Peirce:** a life. Revised and Enlarged Edition, 1998.

CASSIRER, E. **Ensaio Sobre o Homem.** Uma Introdução a uma Filosofia da Cultura Humana. Ed: Martins Fontes, São Paulo. 1994.

CRUZ, W. J. **Experimentos mentais e provas matemática formais.** São Paulo: UNIAN. 2015, 233 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós- Graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.

D' AMBROSIO, U. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: BICUDO, I. Rio Claro: UNESP, 2009.

FOUCAULT, M. **Isto não é um cachimbo**. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2014.

HOFFMANN, H. G. M. **Seeing problems, seeing solutions.** Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery. Georgia Institute of Technology: School of Public Policy, 2006.

KANT, I. **Crítica à razão pura**. Trad. M. P. Santos e A. F. Morujão. Introdução e notas de A. F. Morujão. 4ª ed. Lisboa: Fundação Caloute Gulbenkian, 1997.

KUHN, T. S. **A tensão essencial.** São Paulo: Editora UNESP, 2011.

MUELLER, I. **Euclid's Elements and the Axiomatic Method.** Brit. F. Phil. Sci. 20 (1969), Printed in Great Britain, 1969. 289-309 pp.

OTTE, M. F. **A realidade das Ideias:** uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá: EDUFMT, 2012.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Trad. Jose Teixeira Coelho Neto. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2010.

PEIRCE, C. S. CP = **Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß**, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (quoted by no. of volume and paragraph) . NEM = New Elements of Mathematics. Harvard UP. 1979.

SIMON, M. A. B. **Inductive and Deductive Reasoning:The Search for a Sense of Knowing**. New Orleans: American Educational Research Association, 1994.

Recebido em: 01 de novembro de 2017.

Aprovado em: 11 de janeiro de 2019.