



## O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON: FORMALIZAÇÃO, APLICAÇÕES E INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE A MATEMÁTICA E A MEDICINA

### THE PROBLEM OF BUFFON'S NEEDLE: FORMALIZATION, APPLICATIONS AND INTERDISCIPLINARITY BETWEEN MATHEMATICS AND MEDICINE

Marcelo Ferreira de Melo<sup>1</sup>  
Antônio Klinger Guedêlha da Silva<sup>2</sup>

#### Resumo

Este trabalho apresenta o Problema da Agulha de Buffon, um clássico problema de probabilidade geométrica. Além de explorar o formalismo matemático por trás desse problema, aparentemente sem utilidade prática, a ideia do trabalho é mostrar como ele veio a ser aplicado na tomografia computadorizada, ilustrando a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Medicina.

**Palavras-chave:** Agulha de Buffon. Probabilidade geométrica. Tomografia computadorizada. Interdisciplinaridade. Matemática e Medicina.

#### Abstract

This work addresses the Problem of the Needle of Buffon, a classic problem of geometric probability. In addition to exploring the mathematical formalism behind this seemingly useless practical problem, the idea of the work is to show how it came to be applied in computed tomography, illustrating the interdisciplinarity between Mathematics and Medicine.

**Keywords:** Buffon's Needle. Geometric probability. Computed tomography. Interdisciplinarity. Mathematics and Medicine.

#### Introdução

A interdisciplinaridade tem sido um tema, cada vez mais, recorrente quando se fala sobre questões de metodologia, ensino e aprendizagem de Matemática. Por exemplo, em Brasil (2006), ressalta-se a importância da busca pela integração dos conhecimentos, especialmente pelo trabalho interdisciplinar, no qual o professor de Matemática é incentivado

<sup>1</sup>Universidade Federal do Ceará/UFC, Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: celo@mat.ufc.br

<sup>2</sup>Colégio Militar de Fortaleza/CMF, Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: aklingersilva@gmail.com

a relacionar conteúdos escolares com assuntos do cotidiano dos estudantes. No entanto, de acordo com Carlos (2007), a prática interdisciplinar nas escolas é algo desafiador, pois envolve enfrentar as barreiras sedimentadas pela secular tradição disciplinar.

No que se refere ao estudo de probabilidade geométrica, o presente trabalho ilustra como pode ser feita a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Medicina. O Problema da Agulha de Buffon, naturalmente, tem aplicações na Matemática. Uma dessas aplicações é a apresentação de um método empírico para se estimar o valor do número  $\pi$ . Por outro lado, o Problema da Agulha de Buffon também se aplica em outras áreas. Em Medicina, por exemplo, obtém-se uma importante aplicação na tomografia computadorizada.

### O Problema da Agulha de Buffon

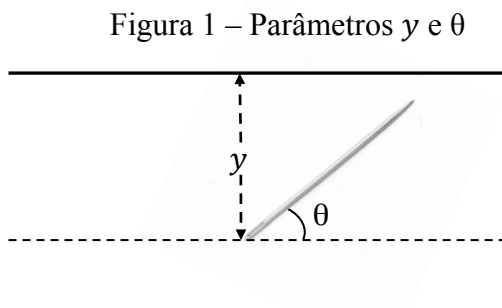
Georges-Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707-1788), foi um naturalista, matemático e escritor francês cujas teorias influenciaram naturalistas como Jean-Baptiste de Lamarck e Charles Darwin. Em 1777, no seu trabalho *Essai d'Arithmétique Morale* (Ensaio da Aritmética Moral), apresentou o problema que ficou conhecido como “Problema da Agulha de Buffon”. Nesse trabalho, Leclerc analisa a moral existente em situações de jogos e a utilização de conhecimentos matemáticos para a tomada da melhor decisão. O referido problema é considerado um marco inicial para o estudo da Probabilidade Geométrica, um ramo da teoria das probabilidades envolvendo conceitos geométricos. Um aprofundamento histórico sobre o tema pode ser visto em Eves (2004) e Boyer (1996). Uma tratativa moderna, do ponto de vista do Cálculo Diferencial e Integral, pode ser encontrada em Stewart (2013).

**Problema 1** (Problema da Agulha de Buffon): Uma agulha de comprimento  $h$  é derrubada em uma superfície plana (por exemplo, uma mesa), na qual retas paralelas separadas por  $L$  unidades, com  $h \leq L$ , foram desenhadas. Então, a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas é dada por  $\frac{2h}{\pi \cdot L}$ . Em particular, quando  $h = L$ , a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas é  $\frac{2}{\pi}$ .

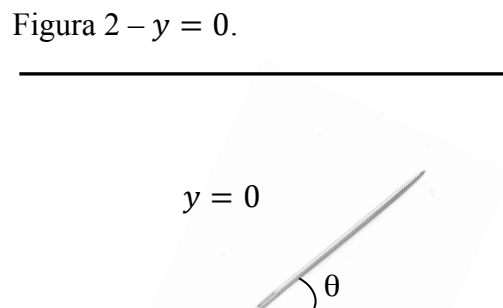
**Solução:** Considere os parâmetros  $y$  e  $\theta$  (Figura 1) definidos a seguir:

(a)  $y$  é a distância da extremidade inferior da agulha até a reta mais próxima ao norte. Se a extremidade inferior da agulha estiver sobre uma das retas, considere  $y = 0$ . (Figura 2)

(b) Seja  $\theta$  o ângulo que a agulha faz com um raio se estendendo na direção leste da extremidade inferior.



Fonte: elaborada pelos autores.

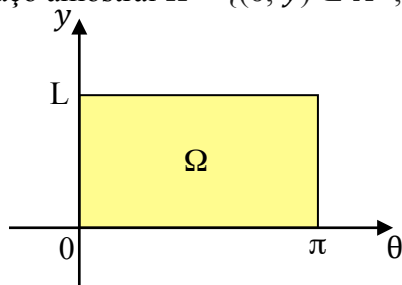


Fonte: elaborada pelos autores.

Observe que o conjunto de todas as possibilidades para a agulha (espaço amostral) pode ser identificado com região retangular  $\Omega = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \theta \leq \pi \text{ e } 0 \leq y < L\}$ .

(Figura 3)

Figura 3 – Espaço amostral  $\Omega = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \theta \leq \pi \text{ e } 0 \leq y < L\}$



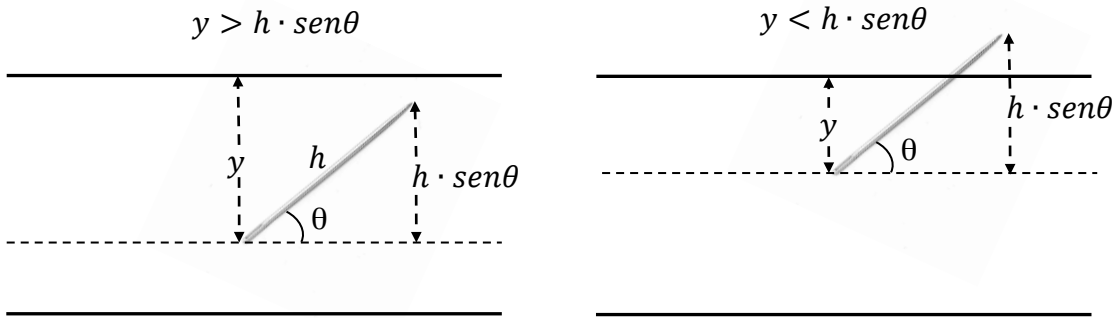
Fonte: elaborada pelos autores.

Em função dos parâmetros  $y$  e  $\theta$ , tem-se as seguintes situações (Figura 4):

- (i) Se a agulha não interceptar nenhuma das retas, então  $y > h \cdot \text{sen}\theta$ .
- (ii) Se a agulha interceptar uma das retas, então  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta$ .

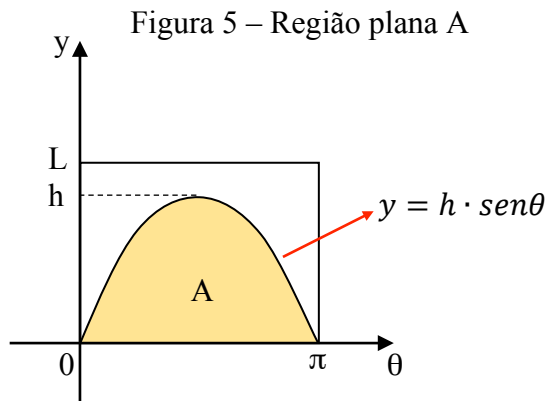
Observação:  $y = h \cdot \text{sen}\theta$  se a extremidade superior da agulha estiver sobre uma reta da superfície plana.

Figura 4 – Situações (i) e (ii)



Fonte: elaborada pelos autores.

Assim, o conjunto das possibilidades de a agulha interceptar uma reta (evento) pode ser identificado como a região plana  $A = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \theta \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq h \cdot \text{sen}\theta\}$ . (Figura 5).



Fonte: elaborada pelos autores.

Desse modo, a probabilidade de a agulha interceptar uma reta da superfície plana é dada por:  $P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_0^\pi h \cdot \text{sen}\theta \, d\theta = \frac{h}{\pi \cdot L} \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \Rightarrow P(A) = \frac{2h}{\pi \cdot L}$ .

Em particular, no caso em que  $h = L$ , a probabilidade de a agulha interceptar uma reta da superfície plana é dada por:  $P(A) = \frac{2}{\pi}$ .  $\square$

**Problema 2:** Suponha que a agulha do problema anterior tem comprimento  $h \geq L$ .

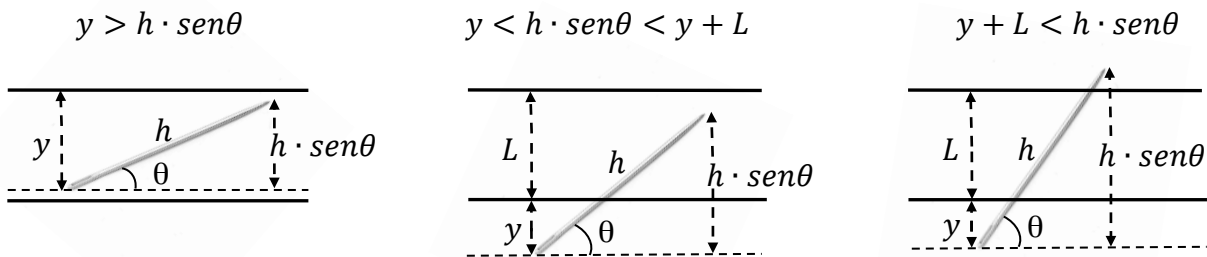
- Qual a probabilidade de a agulha interceptar pelo menos uma reta?
- Qual a probabilidade de a agulha interceptar duas retas?

**Solução:** Sendo  $h \geq L$ , temos três situações possíveis em relação à interseção da agulha com as retas da superfície (Figura 6):

- (i) Se a agulha não interceptar nenhuma das retas, então  $y > h \cdot \text{sen}\theta$ .
- (ii) Se a agulha interceptar apenas uma das retas, então  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta < y + L$ .
- (iii) Se a agulha interceptar duas retas, então  $y + L \leq h \cdot \text{sen}\theta$ .

Observação: As igualdades nos itens (ii) e (iii) ocorrem somente quando a extremidade superior da agulha estiver sobre uma reta da superfície plana.

Figura 6 – Três situações possíveis



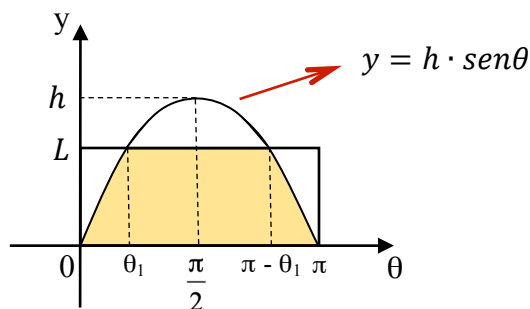
Fonte: elaborada pelos autores.

Assim como no Problema 1, o conjunto de todas as possibilidades para a agulha (espaço amostral) é a região retangular  $\Omega = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \theta \leq \pi \text{ e } 0 \leq y < L\}$ . (Figura 5)

5) Agora, as duas questões serão respondidas separadamente.

a) Para a agulha interceptar pelo menos uma reta, deve-se ter  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta$ . Então, o conjunto das possibilidades de a agulha interceptar pelo menos uma reta (evento) é a região sombreada  $A = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq y \leq h \cdot \text{sen}\theta \text{ e } y \leq L\}$ . (Figura 7).

Figura 7 – Resposta A



Fonte: elaborada pelos autores.

O ângulo  $\theta_1$  da Figura 7 é tal que  $h \cdot \text{sen}\theta_1 = L$ . Desse modo, tem-se  $\text{sen}\theta_1 = \frac{L}{h}$ ,  $\text{cos}\theta_1 = \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h}$  e  $\theta_1 = \text{sen}^{-1} \frac{L}{h}$ . Indicando por  $P(A)$  a probabilidade de a agulha interceptar pelo menos uma reta, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - \theta_1 - \theta_1)L + 2 \int_0^{\theta_1} h \cdot \text{sen}\theta \, d\theta \right) \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_1)L + 2h[-\text{cos}\theta]_0^{\theta_1} \right) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_1)L - 2h[\text{cos}\theta_1 - \text{cos}0] \right) \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L - 2L \cdot \theta_1 + 2h - 2h \cdot \text{cos}\theta_1 \right) \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L - 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} + 2h - 2h \cdot \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h} \right). \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar pelo menos uma reta da superfície plana, no caso em que  $h \geq L$ , é:

$$P(A) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L + 2h - 2\sqrt{h^2 - L^2} - 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} \right).$$

No caso particular em que  $h = L$ , tem-se:

$$P(A) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L + 2L - 2L \cdot \text{sen}^{-1} 1 \right) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L + 2L - 2L \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2L}{\pi \cdot L} = \frac{2}{\pi}, \text{ de acordo com o que foi observado no Problema 1.}$$

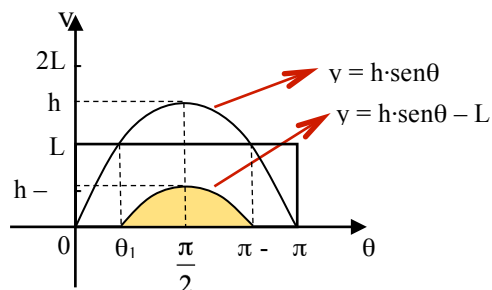
b) Para a agulha interceptar duas retas, deve-se ter que  $y + L \leq h \cdot \text{sen}\theta$ , o que equivale a  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta - L$ . Com relação aos casos favoráveis para que o evento ocorra, temos dois casos a considerar:

**1º caso:** Se  $L \leq h \leq 2L$ , então  $h - L \leq L$ .

Nesse caso, o conjunto das possibilidades de a agulha interceptar duas retas (evento) é a região sombreada  $B = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq y \leq h \cdot \text{sen}\theta - L\}$ . (Figura 8). Como no

$$\text{item anterior, } \theta_1 = \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} \text{ e } \text{cos}\theta_1 = \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h}.$$

Figura 8 – Resposta B



Fonte: elaborada pelos autores.

Indicando por  $P(B)$  a probabilidade de a agulha interceptar duas retas, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} (h \cdot \text{sen} \theta - L) d\theta \\
 \Rightarrow P(B) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos \theta - L\theta]_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} \\
 \Rightarrow P(B) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos(\pi - \theta_1) - L(\pi - \theta_1) + h \cdot \cos \theta_1 + L\theta_1] \\
 \Rightarrow P(B) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (2h \cdot \cos \theta_1 + 2L\theta_1 - \pi \cdot L).
 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar duas retas da superfície plana, no caso em que  $L \leq h \leq 2L$ , é:

$$P(B) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - L^2} + 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} - \pi \cdot L \right).$$

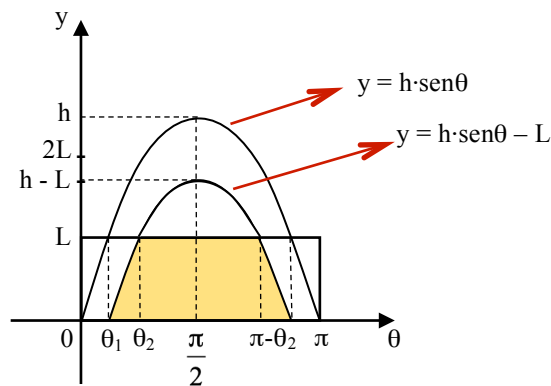
**2º caso:** Se  $h \geq 2L$ , então  $h - L \geq L$ .

Como no caso anterior,  $\theta_1 = \text{sen}^{-1} \frac{L}{h}$  e  $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{h^2 - L^2}}{h}$ . Além disso, considerando  $\text{sen} \theta_2 = \frac{2L}{h}$ , tem-se que  $\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{h^2 - 4L^2}}{h}$  e  $\theta_2 = \text{sen}^{-1} \frac{2L}{h}$ .

Nesse caso, o conjunto das possibilidades de a agulha interceptar duas retas (evento) é a região sombreada da Figura 9, denotada por:

$$B = \{(\theta, y) \in \mathbb{R}^2; \theta_1 \leq \theta \leq \pi - \theta_1, 0 \leq y \leq h \cdot \text{sen} \theta - L \text{ e } y \leq L\}.$$

Figura 9 – Conjunto de possibilidades



Fonte: elaborada pelos autores.

Indicando por  $P(B)$  a probabilidade de a agulha interceptar duas retas, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - \theta_2 - \theta_2)L + 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (h \cdot \text{sen}\theta - L) d\theta \right) \\
 \Rightarrow P(B) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_2)L + 2 \left[ -h \cos\theta - L\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right) \\
 \Rightarrow P(B) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_2)L - 2(h \cos\theta_2 + L\theta_2 - h \cos\theta_1 - L\theta_1) \right) \\
 \Rightarrow P(B) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( \pi \cdot L - 2L\theta_2 - 2h \cos\theta_2 - 2L\theta_2 + 2h \cos\theta_1 + 2L\theta_1 \right) \\
 \Rightarrow P(B) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( 2h \cos\theta_1 - 2h \cos\theta_2 + 2L\theta_1 - 4L\theta_2 + \pi \cdot L \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar duas retas da superfície plana, no caso em que  $h \geq 2L$ , é:

$$P(B) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - L^2} - 2\sqrt{h^2 - 4L^2} + 2L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{L}{h} - 4L \cdot \text{sen}^{-1} \frac{2L}{h} + \pi \cdot L \right).$$

Em particular, quando  $h = 2L$ , seja no primeiro ou no segundo caso, tem-se que

$$P(B) = \frac{2}{3\pi} \cdot (3\sqrt{3} - \pi).$$

□

A seguir, será feita uma generalização do problema anterior.



**Problema 3:** Encontre uma fórmula geral para a probabilidade de a agulha interceptar  $n$  retas, sendo  $n \geq 1$  natural.

**Solução:** Para que a agulha intercepte  $n$  retas, deve-se ter  $y + (n - 1)L \leq h \cdot \text{sen}\theta$ , ou ainda,  $y \leq h \cdot \text{sen}\theta - (n - 1)L$ . A função  $y = h \cdot \text{sen}\theta - (n - 1)L$ , restrita ao intervalo  $[0, \pi]$ , atinge seu valor máximo no ponto  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e seu valor máximo é  $y_{\text{máx}} = h - (n - 1)L$ .

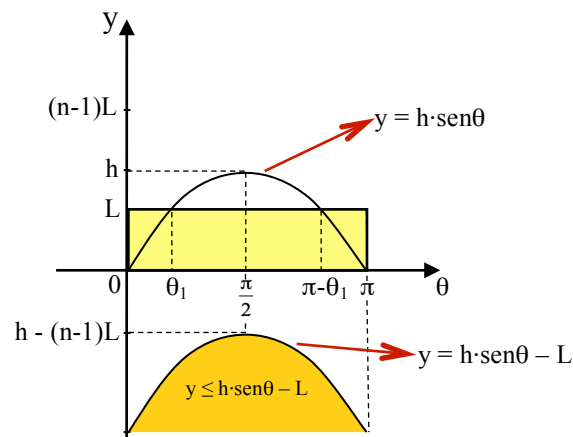
O evento será indicado por  $A$  e sua probabilidade será denotada por  $P(A)$ . Como nos problemas anteriores,  $\Omega$  representa o espaço amostral.

Desse modo, temos três casos a considerar:

**1º caso:** Se  $h \leq (n - 1)L$ , então  $h - (n - 1)L \leq 0$ .

Nesse caso, não existem resultados possíveis em  $\Omega$  para a agulha interceptar  $n$  retas do plano (Figura 10), ou seja,  $P(A) = 0$ .

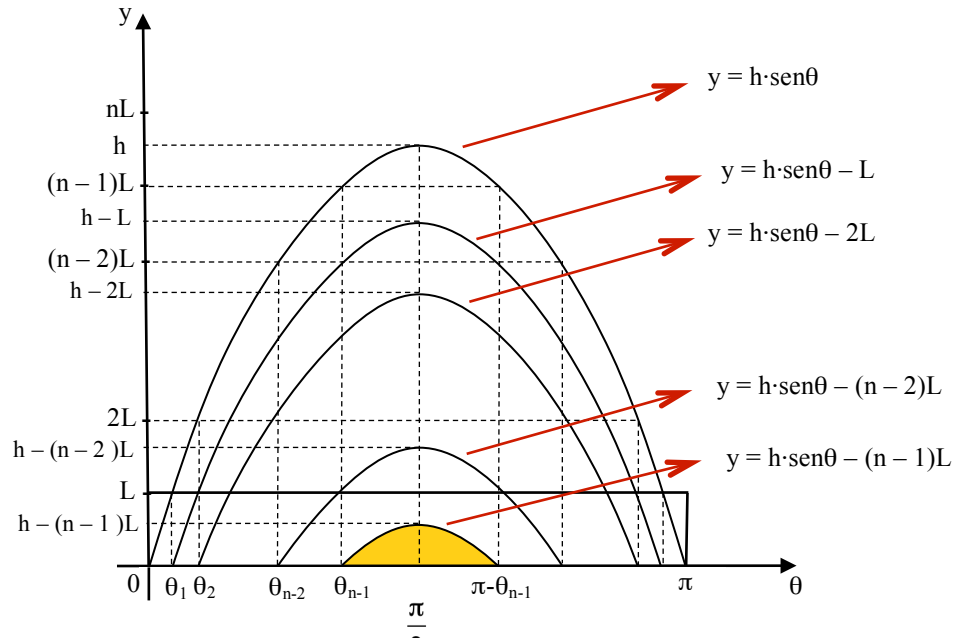
Figura 10 – Primeiro caso



Fonte: elaborada pelos autores.

**2º caso:** Se  $(n - 1)L \leq h \leq nL$ , então  $0 < h - (n - 1)L \leq L$  (Figura 11).

Figura 11- Segundo caso



Fonte: elaborada pelos autores.

Dessa maneira, a probabilidade é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_{\theta_{n-1}}^{\pi - \theta_{n-1}} (h \cdot \text{sen}\theta - (n-1)L) d\theta,$$

onde  $\text{sen}\theta_i = \frac{i \cdot L}{h}$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Segue-se que:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \int_{\theta_{n-1}}^{\pi - \theta_{n-1}} (h \cdot \text{sen}\theta - (n-1)L) d\theta \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos\theta - (n-1)L\theta]_{\theta_{n-1}}^{\pi - \theta_{n-1}} \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot [-h \cdot \cos(\pi - \theta_{n-1}) - L(n-1)(\pi - \theta_{n-1}) + h \cdot \cos\theta_{n-1} + (n-1)L\theta_{n-1}] \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (h \cdot \cos\theta_{n-1} + h \cdot \cos\theta_{n-1} + L(n-1)(\theta_{n-1} - \pi + \theta_{n-1})) \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (2h \cdot \cos\theta_{n-1} + L(n-1)(2\theta_{n-1} - \pi)). \end{aligned}$$

$$\text{Como } \text{sen}\theta_{n-1} = \frac{(n-1)L}{h}, \text{ tem-se que } \cos\theta_{n-1} = \frac{\sqrt{h^2 - (n-1)^2 L^2}}{h} \text{ e}$$

$$\theta_{n-1} = \text{sen}^{-1} \left( \frac{(n-1)L}{h} \right).$$

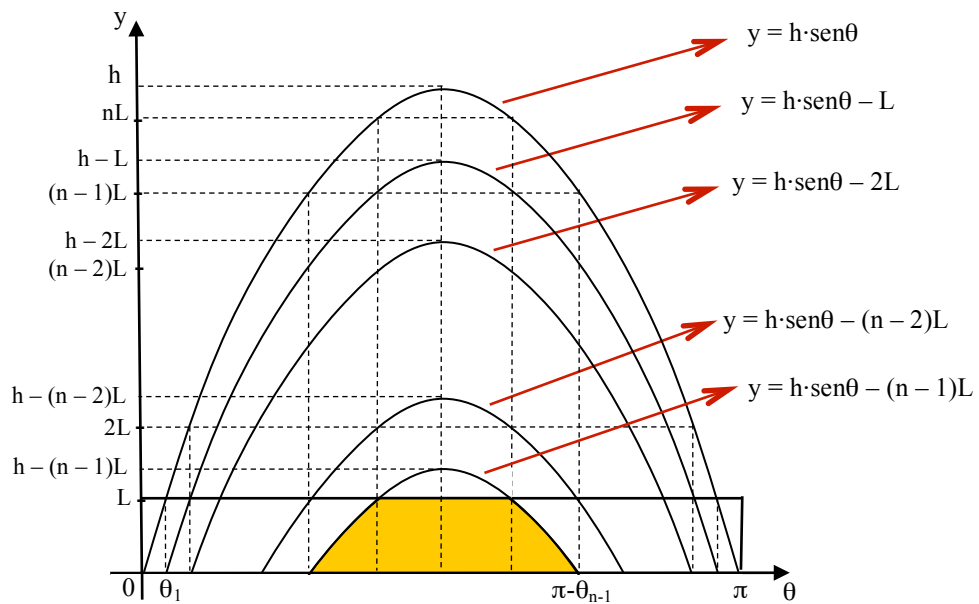
Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar  $n$  retas da superfície plana, no caso em que  $(n-1)L < h \leq nL$ , é:

$$P(A) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - (n-1)^2 L^2} + L(n-1) \cdot \left( 2\text{sen}^{-1} \left( \frac{(n-1)L}{h} \right) - \pi \right) \right), \text{ onde } n \geq 1.$$

No caso particular, em que para  $n = 1$ , tem-se  $h \leq L$  e  $P(A) = \frac{2h}{\pi \cdot L}$  (Problema 1).

**3º caso:** Se  $h \geq nL$ , então  $h - (n-1)L \geq L$  (Figura 12).

Figura 12 – Caso particular



Fonte: elaborada pelos autores.

Nesse caso, a probabilidade é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Área sombreada}}{\text{Área de } \Omega} = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L + 2 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} (h \cdot \text{sen}\theta - (n-1)L) d\theta \right),$$

onde  $\text{sen}\theta_i = \frac{i \cdot L}{h}$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Segue-se que:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L + 2 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} (h \cdot \text{sen}\theta - (n-1)L) d\theta \right) \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L + 2 \left[ -h \cdot \cos\theta - (n-1)L\theta \right]_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \right) \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot \left( (\pi - 2\theta_n) \cdot L - 2(h \cdot \cos\theta_n - h \cdot \cos\theta_{n-1} + (n-1)L(\theta_n - \theta_{n-1})) \right) \\ \Rightarrow P(A) &= \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2L\theta_n - 2h \cdot \cos\theta_n + 2h \cdot \cos\theta_{n-1} - 2nL\theta_n + 2nL\theta_{n-1} + 2L\theta_n - 2L\theta_{n-1})$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2h \cdot \cos \theta_n + 2h \cdot \cos \theta_{n-1} - 2nL\theta_n + 2nL\theta_{n-1} - 2L\theta_{n-1})$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2h \cdot \cos \theta_n + 2h \cdot \cos \theta_{n-1} + 2L(n\theta_{n-1} - \theta_{n-1} - n\theta_n))$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi \cdot L} \cdot (\pi L - 2h \cdot \cos \theta_n + 2h \cdot \cos \theta_{n-1} + 2L((n-1)\theta_{n-1} - n\theta_n)).$$

Como  $\text{sen}\theta_i = \frac{i \cdot L}{h}$ , para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , tem-se que  $\text{sen}\theta_{n-1} = \frac{(n-1)L}{h}$  e  $\text{sen}\theta_n =$

$\frac{nL}{h}$ . Desse modo:

$$\cos\theta_{n-1} = \frac{\sqrt{h^2 - (n-1)^2 L^2}}{h}, \cos\theta_n = \frac{\sqrt{h^2 - n^2 L^2}}{h}, \theta_{n-1} = \text{sen}^{-1} \frac{(n-1)L}{h} \text{ e } \theta_n = \text{sen}^{-1} \frac{nL}{h}.$$

Portanto, a probabilidade de a agulha interceptar  $n$  retas da superfície plana, no caso em que  $h \geq nL$ , é:

$P(A) =$

$$\frac{1}{\pi L} \cdot \left( 2\sqrt{h^2 - (n-1)^2 L^2} - 2\sqrt{h^2 - n^2 L^2} + 2L \left( (n-1)\text{sen}^{-1} \frac{(n-1)L}{h} - n \cdot \text{sen}^{-1} \frac{nL}{h} \right) + \pi L \right),$$

para todo  $n \geq 1$ . □

### Aplicação em Matemática: estimativa do valor de $\pi$

Por meio do resultado obtido no problema da agulha de Buffon, é possível estimar de forma empírica o valor de  $\pi$ . Para tanto, basta realizar o experimento proposto por Buffon, utilizando-se, por conveniência, uma agulha com comprimento igual à distância entre as retas paralelas. Após lançar diversas vezes a agulha sobre a superfície plana contendo as retas paralelas equidistantes, registra-se a quantidade de lançamentos realizados, bem como o número de casos em que a agulha corta uma das retas e, em seguida, utiliza-se a definição usual de probabilidade em um espaço amostral equiprovável e o resultado obtido no problema de Buffon, com  $h = L$  ( $P = \frac{2}{\pi}$ ), para calcular o valor aproximado de  $\pi$ .

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2}{\pi}.$$

Alguns matemáticos se empenharam em tal tarefa, como foi o caso do italiano M. Lazzarini, em 1901 que, após 3408 lançamentos da agulha, obteve 1808 cruzamentos com as retas, estimando assim o valor de  $\pi$  em 3,1415929, com seis casas decimais corretas.

### **Aplicação em Medicina: Tomografia Computadorizada**

Em 1972, o engenheiro inglês Sir Godfrey Newbold Hounsfield apresentou à comunidade científica o primeiro aparelho de tomografia computadorizada. Esse aparelho permitia realizar um exame complementar de diagnóstico por imagem, que consistia numa imagem representando uma seção ou "fatia" do corpo.

Segundo Machado (2011), o princípio consiste em jogar feixes planos de radiação paralela disparados sucessivamente em um grande número de diferentes direções sobre uma região do corpo humano, de forma a medir e converter em imagens tridimensionais partes ou objetos inacessíveis. A fração de raios que interceptam o objeto em relação ao total do feixe é medida pela comparação da intensidade de radiação que incide sobre o corpo e a intensidade registrada na recepção por um dispositivo de captação computadorizado.

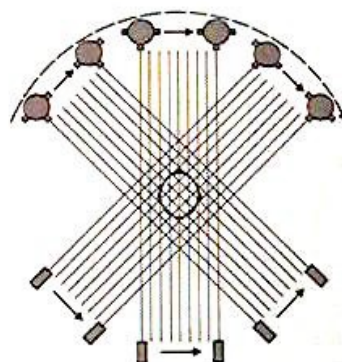
Olhando o corpo a ser analisado como uma agulha, a probabilidade de ele ser interceptado por determinada quantidade de raios é conhecida, dessa maneira, é possível medir com bastante precisão as dimensões do objeto. Em suma, é o mesmo experimento pensado por Buffon, com a pequena variação de lançar o feixe de paralelas sobre o objeto, em vez de lançar o objeto sobre o feixe de paralelas.

A tomografia computadorizada é considerada uma das mais importantes invenções para a Medicina, desde o surgimento dos raios-X. Essa tecnologia permitiu aos médicos observar pela primeira vez tecidos do cérebro e, posteriormente, de outras partes do corpo humano, sem necessidade de cirurgia. Em 1979, Hounsfield e o físico Allan M. Cormack, da Tufts University, em Massachusetts, que também desenvolveu uma tecnologia similar, receberam o Prêmio Nobel de Fisiologia/Medicina.

O tomógrafo de primeira geração trabalhava com um feixe de radiação bastante estreito - de aproximadamente 3 mm por 13 mm - que fazia uma varredura retilínea sobre o objeto, coletando informações de 160 feixes de radiação distintos. Após a primeira varredura, o tubo sofria uma rotação de 1 grau e iniciava uma nova varredura, coletando novas informações de outros 160 feixes. Esse processo se repetia por 180 vezes e, assim, obtinha-se

informações do objeto em 180 projeções diferentes, com variações de 1 grau em cada projeção e coleta de dados de 160 feixes por projeção (Figura 13).

Figura 13 – Feixe de raios paralelos com giro de um grau a cada varredura



Fonte: elaborada pelos autores.

O tempo para a obtenção de um corte (seção transversal) tomográfico era de aproximadamente cinco minutos e um estudo completo podia durar mais de uma hora. Após o passo inicial dado por Hounsfield, os aparelhos de tomografia evoluíram até a quarta geração, sempre inovando os métodos e os princípios de obtenção de imagens. Estes últimos aparelhos foram sucedidos pelo Tomógrafo Helicoidal que permite a obtenção de seções em forma de hélices. O avanço dessa tecnologia permitiu reduzir bastante o tempo de realização dos exames, com a obtenção de múltiplas imagens por segundo e o manuseio em tempo real das imagens de tomografia.

Naturalmente, a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Medicina não se restringe à tomografia computadorizada, ilustrada aqui pelo Problema da Agulha de Buffon. Dentre as muitas aplicações da Matemática na Medicina, podemos ver em Larson e Edwards (2005), por exemplo, algumas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral: área do corpo humano, concentração de um medicamento, contaminação com um carcinógeno, óbitos infantis e velocidade do ar na traqueia.

## Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. Editora Edgard Blucher. São Paulo, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação - MEC, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006.

CARLOS, Jair Gonçalves. **Interdisciplinaridade no Ensino Médio: desafios e potencialidades**. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências) – Instituto de Física, Instituto de Química, Universidade de Brasília, Brasília-DF, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Editora da UNICAMP. Campinas, 2004.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo, Volume 1**. 5. ed. LTC Editora. Rio de Janeiro, 2001.

LARSON, Ron; EDWARDS, Bruce H. **Cálculo com Aplicações**. 6. ed. LTC Editora. Rio de Janeiro, 2005.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua**. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

STEWART, James. **Cálculo, Volume 1**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Recebido em: 28 de dezembro de 2017

Aprovado em: 11 de março de 2019