

La visualización como eje central en la enseñanza de la matemática en tiempos de pandemia

Visualization as a central axis in the teaching of mathematics in times of pandemic

D'Andrea, Rodolfo Eliseo^{1, 2}

1 - Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía. República Argentina

2 - Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario. Facultad de Química e Ingeniería. República Argentina

rodolfoedandrea@gmail.com

Recibido: 25/09/2021 - Aceptado: 19/11/2021 – Publicado: 20/12/21

Resumen

La pandemia causada por el virus Sars-CoV-2 dio lugar al cierre masivo de actividades presenciales, generando en las instituciones educativas el dictado de clases virtuales. Los resultados de una investigación llevada a cabo en la última década acerca del razonamiento utilizado por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas arribaron a la conclusión de que hay un predominio del razonamiento visual en procesos de validación. Tomando como marco teórico estos resultados, se rediseñaron las clases para una institución generando un nuevo esquema de trabajo donde la visualización es el eje de un paradigma de enseñanza y aprendizaje basado en la comprensión. El objetivo de este trabajo se enfoca en el análisis del trabajo áulico realizado con estudiantes universitarios en un curso de Cálculo diferencial e integral en una variable real con una perspectiva visual sin dejar de lado cuestiones formales y procedimentales y sus consecuencias en los destinatarios. El análisis mostró que los estudiantes al momento de ser evaluados, tienen una mejor predisposición y desempeño frente a desafíos que involucran cuestiones visuales en propuestas procedimentales y teóricas. En este último caso, el estudiante es naturalmente propenso a explicar con ejemplos visuales, con escasas evidencias de registros de comunicación verbal.

Palabras claves: visualización. matemática. pandemia. estudiantes universitarios

Abstract

The pandemic caused by the Sars-CoV-2 virus led to the massive closure of face-to-face activities, generating virtual classes in educational institutions. The results of an investigation carried out in the last decade on the reasoning used by university engineering students in mathematical proofs reached the conclusion that there is a predominance of visual reasoning in validation processes. Taking these results as a theoretical framework, the classes were redesigned for one institution, generating a new work scheme where visualization is the axis of a teaching and learning paradigm based on understanding. The objective of this work is focused on the analysis of the classroom work carried out with university students in a course of Differential and Integral Calculus in a real variable with a visual perspective without leaving aside formal and procedural issues and their consequences on the recipients. The analysis showed that students at the time of being evaluated, have a better predisposition and performance in the face of challenges that involve visual issues in procedural and theoretical proposals. In the latter case, the student is naturally prone to explaining with visual examples, with little evidence of verbal communication records.

Keywords: visualization. mathematics. pandemic. university students

INTRODUCCIÓN

La pandemia causada por el virus Sars-CoV-2 ha provocado una crisis a nivel mundial en todos los

ámbitos de la sociedad. En el ámbito educativo, esta emergencia ha dado lugar al cierre masivo de actividades presenciales, generando en las instituciones educativas el dictado de clases virtuales.

Los procesos formales se dificultan cada año con mayor intensidad debido al retraso del pensamiento lógico – abstracto, debilitando los desarrollos de definiciones, proposiciones y procesos de validación asociados. Los resultados de una investigación llevada a cabo en la última década acerca del razonamiento utilizado por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas arribaron a la conclusión de que hay un predominio del razonamiento visual a la hora de validar una proposición o realizar una conjetura, por parte de los estudiantes. Tomando como marco teórico estos resultados, se rediseñaron las clases para una institución, generando un nuevo esquema de trabajo donde la visualización es el recurso fundamental para un nuevo paradigma de enseñanza y aprendizaje basado en la comprensión. Se expone en este trabajo un caso particular realizado en un curso cuatrimestral de Cálculo diferencial e integral en una variable real.

El objetivo de este trabajo se enfoca en el análisis del trabajo áulico realizado con estudiantes universitarios en un curso de Cálculo diferencial e integral en una variable real con una perspectiva visual sin dejar de lado cuestiones formales y procedimentales y sus consecuencias en los destinatarios.

MARCO TEÓRICO

Los procesos formales se dificultan cada año con mayor intensidad debido al retraso del pensamiento lógico – abstracto, dificultando los desarrollos de definiciones, proposiciones y procesos de validación asociados. Los resultados de una investigación llevada a cabo en la última década por D'Andrea [1] acerca del razonamiento utilizado por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas arribaron a la conclusión de que hay un predominio del razonamiento visual a la hora de validar una proposición o realizar una conjetura, por parte de los estudiantes. D'Andrea [1] a través de su trabajo de investigación apunta a determinar las pautas de razonamiento utilizadas por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas, siendo tales pautas, las que se detallan a continuación

Pauta de razonamiento deductivo por argumentación directa. El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento deductivo por argumentación directa con un recorrido lineal, es decir, desde una proposición considerada como punto de partida (hipótesis) hacia una proposición objetivo, considerada como meta (tesis), sin giros ni constructos que operen de artificios que obstruyan el recorrido lineal del camino de la prueba.

Pauta de razonamiento deductivo por argumentación indirecta. El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento deductivo por argumentación indirecta con un recorrido lineal, es decir, desde una proposición considerada como punto de partida (negación de la tesis de la proposición original que ahora opera de hipótesis) hacia una proposición objetivo, considerada como meta (negación de la hipótesis de la proposición original que ahora opera de tesis), sin giros ni constructos que operen de artificios que obstruyan el recorrido lineal del camino de la prueba.

Pauta de razonamiento inductivo de generalización. El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento inductivo que implícitamente requiere una generalización a partir de patrones iterativos.

Pauta de razonamiento visual. El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento visual, es decir, un razonamiento basado estrictamente en una visualización generada por el estudiante a través de un diagrama a mano alzada, construido por el mismo, o un software y como consecuencia de la observación de la figura obtenida, generar una justificación y/o explicación que permita sostener el valor epistémico de la prueba.

Es muy usual escuchar a profesores universitarios de Matemática expresar su asombro ante un tipo de respuesta por parte de un estudiante frente a la consigna que propone la prueba de validez de una proposición. Esta respuesta generadora del asombro consiste en la exhibición de uno o varios ejemplos como prueba, sin que medie criterio alguno, acción que se alinea con el empirismo ingenuo postulado por Balacheff [2]. Asimismo, esta acción se encuadra con la evolución y génesis histórica de la prueba matemática. Crespo Crespo [3] manifiesta que el desarrollo matemático en pueblos muy primitivos se relacionó directamente con sus necesidades materiales. Esta relación, no es ajena a la realidad del país y del mundo en el presente, ni tampoco al contexto donde se encuentra inserto el estudiante posmoderno, que ante todo es una persona, y está inmerso en un mundo tecnológico que avanza de forma exponencial. Este joven necesita de satisfacciones y respuestas instantáneas de la misma forma en que las obtiene cuando hace clic con el mouse de una computadora o apenas roza la pantalla de un teléfono móvil y accede instantáneamente a una información transfinita, literalmente ‘tiene al mundo en sus manos’.

El proceso de una prueba es lento, profundo y complejo, muy lejano a la inmediatez de la verificación. No se está con esto realizando una apología de las bondades del empirismo ingenuo de Balacheff [2], sino, que se está describiendo y contextualizando al estudiante posmoderno inserto en la escena digital del mundo actual.

Una característica esencial de los objetos matemáticos consiste en que requieren de diversas representaciones para poder asimilarlos y apropiarse de los mismos. Esto es producto de su complejidad ya que dichos objetos no son accesibles a través de la percepción que se puede tener a través de los sentidos que le son propios al ser humano.

La teoría de los registros de representación semiótica de Duval [4] sostiene que, para lograr la conceptualización, el estudiante debe recurrir a diversos registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, tablas, e inclusive expresiones en lenguaje natural, por citar algunos ejemplos. Estos sistemas semióticos obedecen a las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial; visual y simbólico. Cada registro de representación destaca ciertas notas y propiedades del objeto matemático, por lo cual se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones.

A los efectos de que los estudiantes puedan entender y manejar de manera adecuada los diferentes objetos matemáticos se deben realizar acciones de conversión entre los diferentes registros. Estas actividades son fundamentales para que exista una verdadera conceptualización según Duval [4], es decir, un verdadero aprendizaje de la estructura conceptual en foco. Consecuentemente el trabajo del profesor no se debe sostener en un tipo particular de representación, sino que el estudiante debe recibir en el proceso de enseñanza y aprendizaje diferentes tipos de registros e interactuar entre ellos.

El resultado de una investigación llevada a cabo por Aranda y Callejo [5] indica que el uso simultáneo del lenguaje analítico y geométrico, así como la interacción dinámica con estos sistemas de representación en un contexto tecnológico, puede favorecer notablemente los procesos de abstracción reflexiva que inciden en la elaboración de los conceptos matemáticos complejos. La integración de las herramientas computacionales colabora en la construcción de significados y el uso simultáneo de representaciones dinámicas e interactivas a través de

las TIC. Uno de los beneficios que se vislumbra con el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples registros de representación dentro de esquemas interactivos, difíciles de lograr con los medios tradicionales como el lápiz y el papel.

MATERIALES Y MÉTODOS

Se hace foco en este trabajo en la cursada de Cálculo Elemental en dos períodos de la pandemia: marzo a junio de 2020 y marzo a junio de 2021. La asignatura Cálculo Elemental integra el primer año común del currículum correspondiente a las Carreras de Ingeniería de PUCA: Pontificia Universidad Católica Argentina, Facultad de Química e Ingeniería, Campus Rosario situada en Rosario, provincia de Santa Fe.

Durante un corto período del mes de marzo de 2020, en virtud de la situación de pandemia y a los efectos de sanear la emergencia y dictar las clases de forma virtual a través de la herramienta ZOOM se hizo un nuevo diseño de clase para la asignatura mencionada.

Los instrumentos utilizados para el nuevo diseño de las clases consistieron en: material didáctico de cátedra, digital e hipervinculado, grabado en vídeo especialmente para la asignatura mencionada. También se consideró un procesador de texto para escribir fórmulas matemáticas y escritura asociada a tales fórmulas. Además, software matemático (2) donde se buscaron las mejores prestaciones de cada uno a los efectos de optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la cursada de la asignatura. Se incorporaron las prestaciones de la herramienta ANOTAR de ZOOM para bosquejar diferentes diagramas y bosquejos que contribuyen notablemente a la visualización conceptual de diferentes estructuras conceptuales.

El instrumento utilizado para chequear los resultados del aprendizaje obtenido en las clases fueron las evaluaciones parciales realizadas en la cursada. Una evaluación de carácter obligatorio que cumplía la función de permitir, en el caso de acreditación, que el estudiante accediera a la regularidad académica de la asignatura y una segunda evaluación de carácter optativo, para aquel estudiante con el parcial obligatorio acreditado, que cumplía la función de permitir, en el caso de acreditación, la promoción parcial de la asignatura.

EXPERIENCIA AÚLICA

A diferencia de los cursos que se venían dictando hasta 2019 en forma presencial de esta asignatura, el planteo de cada unidad temática se desarrolló con contenidos teóricos y procedimentales pero, siempre visualizando en la medida de lo posible todas las estructuras conceptuales.

La Unidad temática 1: Funciones, Límite y Continuidad introduce al estudiante en los diferentes tipos de funciones pero, ya se induce a la idea de límite como ‘comportamiento’ de las funciones en puntos ‘clave’ o en todo el eje real. De manera que el desarrollo integral de la unidad, prácticamente se llevó a cabo, ‘de la mano’ del material teórico – práctico con el uso constante de software.

La unidad temática 2: Límite y continuidad encontraba a un estudiante ya familiarizado con estas ideas, adicionándose el cálculo de límites; los diferentes tipos de discontinuidades y la determinación de las regiones de continuidad de una función. En el cálculo de límites, además del cálculo tradicional y la aplicación de límites prototípicos tales como el límite trigonométrico: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ y el correspondiente al número $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, se insistió en la importancia de graficar la función involucrada en cada cálculo de límite a los efectos de concientizar al estudiante de la acción que estaba realizando.

La unidad temática 3: Cálculo Diferencial a través del software posibilitó en el estudiante la visualización de la recta tangente a una función en un punto; la aproximación lineal e inclusive la representación gráfica de la función derivada de una función dada.

La unidad temática 4: Aplicaciones del Cálculo diferencial que se centra casi exclusivamente en el estudio completo de una función utilizando propiedades de las funciones derivada primera y segunda de una función y su signo. Aquí la visualización conceptual es prioritaria ya sea para graficar la función cuyo estudio analítico se ha realizado como también para mostrar la interpretación geométrica del cambio de signo de las funciones derivada primera o segunda.

La unidad temática 5: Cálculo integral tuvo dos partes: integral indefinida, donde su estructura conceptual e interpretación geométrica permiten una clara visualización de la introducción a la idea de ecuación diferencial. Las técnicas de integración no permiten una visualización y requieren un trabajo ‘artesanal’, a veces, engorroso. La segunda parte de esta unidad, si se puede visualizar con total plenitud, desde las sumas superiores e inferiores de Riemann; la interpretación geométrica de la integral definida como una suma algebraica de áreas; el cálculo del área a partir de una función con variabilidad de signo y el cálculo del área entre curvas.

La siguiente figura muestra lo descrito en la segunda parte de la unidad temática V.

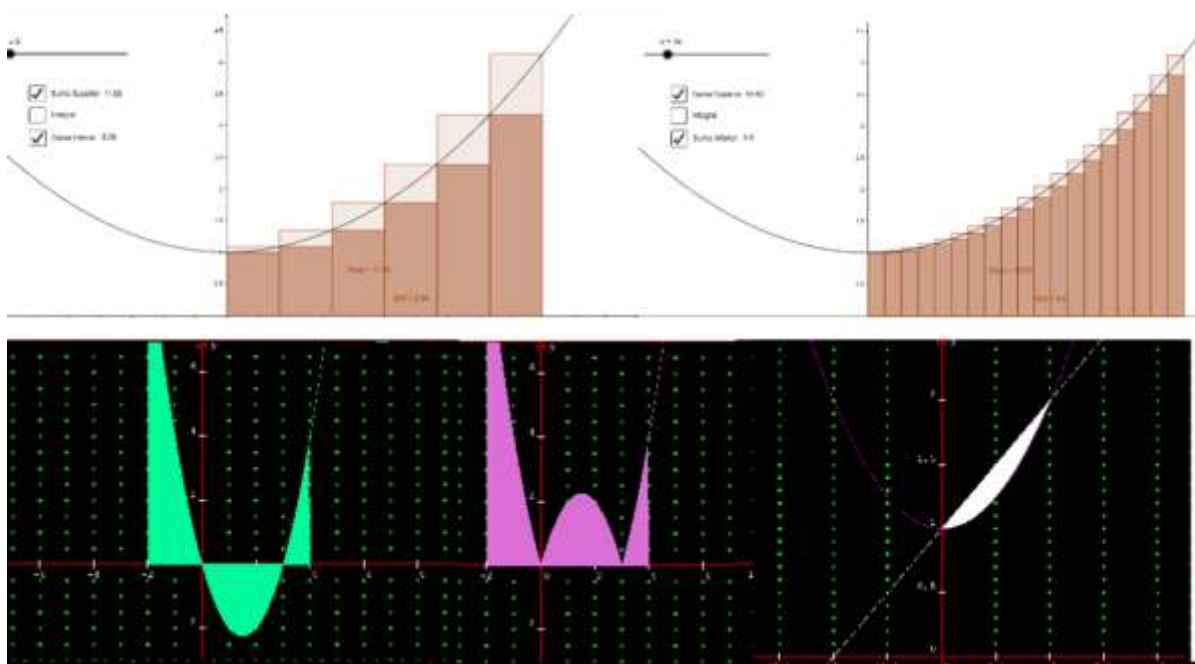


Figura 1: Síntesis visual de la Unidad 5 parte 2: Cálculo integral

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En las dos cursadas mencionadas se observó que los estudiantes realmente se sentían en una ‘zona de confort’ cuando la clase se centraba en la visualización, disminuyendo ligeramente a través de las actividades procedimentales y ofreciendo mucha resistencia ante la mostración simbólica de las diferentes estructuras conceptuales, definiciones, proposiciones y sus procesos de validación. Ante este panorama que se evidenció desde el primer cuatrimestre de 2020, se optó por proponer una consigna de tipo teórica tanto en parciales como en exámenes finales pero, consistente únicamente en preguntas conceptuales donde el estudiante debía explicar con sus palabras, ciertas definiciones; interpretaciones geométricas e inclusive decidir el valor de verdad de una proposición justificando tal decisión pero, utilizando lenguaje coloquial, de forma de evadir el lenguaje formal que tantas dificultades les causaba.

Los resultados en ambos parciales de la cursada fueron muy similares en las dos cursadas, evidenciándose profundas dificultades para expresar de forma coloquial cuestiones conceptuales, no así se evidenciaron tales dificultades en cuestiones procedimentales y visuales, tales como gráficos, a mano alzada y escaneados o exportados desde el software con indicaciones y llamadas adicionales realizadas por parte del estudiante.

El diseño de las clases realizadas obedeció a la naturaleza del nativo digital que es el destinatario de estas clases. Debe destacarse que este diseño tiene una fortaleza clave que se sostiene en lo comentado. El lenguaje de transmisión visual encaja muy bien con el lenguaje predominante del estudiante posmoderno. Esto favorece notablemente la comprensión y apropiación de las diferentes estructuras conceptuales.

En este diseño también se pudo observar que tiene una gran debilidad, la interacción entre los diferentes registros no se produce, existiendo interacción entre el registro visual y el trabajo procedimental pero, se dificulta al interactuar con el lenguaje formal que le es propio a Matemática y con el lenguaje coloquial.

Quizás cabría preguntarse si la dificultad ante el registro del lenguaje formal no es una cuestión que tiende a desaparecer en virtud de un pensamiento abstracto cada vez más debilitado. La cultura visual imperante sumerge al adolescente posmoderno en una

realidad virtual que no favorece al desarrollo de este tipo de pensamiento, porque el mundo mismo donde está inmerso, de hecho, ya es abstracto. Esto se conjuga con la metodología sobre resolución de problemas en el ciclo medio, enfocada hacia lo procedimental, que, en muchos casos, los supuestos problemas son ejercicios ‘disfrazados’ que requieren aplicación de algoritmos, carentes de sustento teórico. Como consecuencia, estos procesos debilitan cada vez más, en el estudiante acciones tales como justificar; explicar y argumentar, lo que lleva a ignorar la epistemología de esta ciencia, y su lenguaje, que está implícito en la misma.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R.E. D’Andrea, “Pautas de razonamiento de estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas”, tesis doctoral, Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina, 2020.
- [2] N, Balacheff, *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, Bogotá: Universidad de Los Andes, 2000.
- [3] C. Crespo Crespo, “Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología”, tesis doctoral, CICATA – IPN: Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. Instituto politécnico nacional., México, 2007.
- [4] R, Duval, “Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée”, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5, n°1, pp. 37 – 65, 1993
- [5] C. Aranda y M.L. Callejo, “Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos”, *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, vol. 13, n° 2, pp. 129 – 158, 2010.

Rodolfo Eliseo D’Andrea
Corrientes 1817
Rosario
Provincia de Santa Fe
Argentina
rodolfoedandrea@gmail.com

Rodolfo Eliseo D'Andrea

Doctor y Magíster en Educación Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén, Argentina. Miembro Asociado de la Comisión Latinoamericana de Matemática Educativa. Profesor titular UNICEN, Campus Azul y Profesor protitular PUCA, Campus Rosario. Ha participado como autor, expositor y/o árbitro evaluador en más de 50 congresos nacionales e internacionales. Autor de varios libros y capítulos de libros y artículos de su especialidad.