Aplicação e interpretação de regras matemáticas

MARISA ROSÂNI ABREU DA SILVEIRA*

Resumo

Este texto discute alguns problemas encontrados pelo aluno no decorrer da aplicação de regras matemáticas. A interpretação de regras matemáticas depende do contexto em que cada regra está inserida, bem como dos significados que o aluno lhe atribui. Esses significados estão de acordo com as analogias que o aluno faz com outras regras e dependem da sua imaginação e da sua memória. Os significados atribuídos à regra são subjetivos, porém, eles devem concordar com a lógica da matemática. Esse paradoxo inscreve o aluno num espaço de uma liberdade limitada, pois a subjetividade do aluno confronta-se com a objetividade da matemática. Interpretar uma regra e segui-la corretamente pressupõe a sua leitura minuciosa, como também a compreensão dos significados que estão além dela. A análise da literatura sobre o tema, em consonância com alguns registros de alunos em situação de ensino/aprendizagem, evidencia a necessidade de o professor estar atento às analogias que o aluno faz ao interpretar regras e construir conceitos matemáticos. O olhar do professor dirigido às manifestações do aluno no processo de aplicação de regras matemáticas propicia uma compreensão melhor de alguns importantes obstáculos na construção desses conceitos.

Palavras-chave: regras matemáticas; conceito matemático; ressignificação do conceito matemático.

Abstract

This text discusses difficulties students encounter when applying mathematical rules. The interpretation of mathematical rules depends on the context in which they are applied, as well as on the meanings the student attributes to them. The attributed meanings are related to analogies the student draws with other mathematical rules and depend on his imagination and memory. The meanings attributed to mathematical rules are subjective; however, they must comply with mathematical logic. This paradox puts the student in a situation of limited freedom, as the student's subjectivity has to be reconciled with the objectivity of mathematics. Interpreting and following a rule correctly presuppose an in-depth reading of the rule, as well as an understanding of implications beyond the rule. In this review of the

---

* Universidade Federal do Pará. Doutora em Educação – UFGRS/Universidade de Paris 7. E-mail: marisabreu@ufpa.br

literature on the theme, we find grounds to agree with the experiences of students, and this shows the need for teachers to take into account the analogies that students draw when interpreting rules and constructing mathematical concepts. When working with students, the teacher must pay attention to the obstacles students face in the construction of these concepts.
Keywords: *Mathematical Rules; Mathematical concepts; Re-signification of the Mathematical Concept.*

Introdução

Este texto discute os problemas encontrados pelo aluno no decorrer da aplicação de regras matemáticas sob a luz da filosofia da linguagem de Wittgenstein. Ao analisar os problemas encontrados na linguagem, o filósofo aborda, entre outros pontos, a necessidade que o sujeito sente de criar regras e de obedecê-las. Na sua filosofia, os jogos de linguagem apresentam as semelhanças entre jogos e linguagem, assim como o cálculo ressalta as semelhanças existentes entre linguagem e sistemas formais. Assim, cálculo, gramática e jogos de linguagem se assemelham: todos obedecem a regras. O sentido das palavras utilizadas em tais regras está no uso e também na maneira como esse uso se entrelaça com a nossa vida. Conforme Wittgenstein (apud Silveira, 2008, p. 3), esses jogos consistem de linguagem e, pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada, "uma parte grita as palavras, a outra age de acordo com elas".

A regra matemática, quando interpretada, possibilita a compreensão do conceito que está subjacente à regra. Construir um conceito é, dessa forma, interpretar uma regra. Quando, por exemplo, o conceito da altura de um triângulo é construído, a regra "que seja o segmento que une perpendicularmente um vértice ao lado oposto!" deve ser interpretada e obedecida. Caso o "segmento de reta seja aquele que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele", a regra nesse caso aplicada é outra, pois a regra de altura de um triângulo é uma e a regra de mediana de um triângulo é outra. A interpretação da regra, além de envolver o conhecimento de cada um de seus passos, exige a compreensão de seus "resíduos" (Granger, 1974), ou seja, a leitura do que está escrito além da regra.

O trabalho em questão tem o objetivo de auxiliar os professores a entenderem por que, embora aparentem compreender os conceitos matemáticos, os alunos "erram" na aplicação de regras que envolvem a manipulação desses conceitos. O trabalho trata de um tema de interesse para o professor, discutindo os limites da aplicação de regras matemáticas por estudantes.

A análise de alguns registros de alunos buscará mostrar como o aluno atribui significados durante o processo de aplicação de regras matemáticas. Esses registros foram coletados durante a minha prática docente com alunos da educação básica, alunos do curso de licenciatura em matemática e alunos de cursos de engenharias. Os "erros" dos alunos que eu recolhi para fazer minhas análises estão em consonância com os relatados por Baruk (1985) e Gómez-Granell (2003). Essas autoras não fazem a análise dos "erros" com o mesmo enfoque que utilizo em minhas análises, porém os registros de alunos relatados por elas estão em consonância com os registros que utilizo para fazer minhas análises. Os exemplos de dificuldades dos alunos nas aplicações de regras matemáticas são organizados de maneira a serem tomados para detalhar o movimento dos alunos no processo de significação das regras. Os "erros" coletados por essas autoras e os "erros" que tenho coletado durante prática docente apresentam semelhanças, apesar de ocorrerem em diferentes espaços de aprendizagem.

A análise das regras matemáticas e de suas aplicações busca entender os motivos pelos quais os alunos têm dificuldades em construir conceitos matemáticos. Wittgenstein – que analisa os fundamentos da matemática, como também a intervenção das regras gramaticais e das regras matemáticas no uso da linguagem – dará suporte teórico para essa investigação da natureza e da aplicação da regra. Essa teoria será confrontada com os próprios registros dos alunos no processo de aplicação de regras matemáticas. A regra muda conforme o contexto, na perspectiva do aluno, mas, do ponto de vista lógico, a regra é sempre a mesma. Esse fato mostra ao professor que a regra que ele ensina pode ter um sentido diferente para o aluno e a regra compreendida num contexto pode ser compreendida diferentemente em outro contexto.

Regras matemáticas

As regras matemáticas estabelecidas pela humanidade no decorrer do tempo, atualmente, servem de premissas a serem seguidas pela comunidade escolar. Assim como essas regras, as regras sociais estabelecidas pelo homem, como, por exemplo, as regras jurídicas, podem, mas não devem ser burladas. As regras gramaticais também são normas criadas pelo homem para melhor integração e comunicação social. Nesse sentido, as regras matemáticas seguem o mesmo critério de obediência: elas podem mas não devem ser burladas. A regra é um acordo que prevê o desacordo. Como a linguagem interior é uma versão da linguagem pública, o problema do acordo e do desacordo entre o sujeito e a regra não se encontra na linguagem e sim em sua compreensão. Somos seres de linguagem e nela produzimos sentidos. Esse fato abre a possibilidade da criação de novos sentidos e de novos conceitos. Bouveresse (1987), ao comentar a força da regra e a invenção da necessidade de obediência a tais regras nas obras de Wittgenstein, afirma que as proposições matemáticas são regras gramaticais independentes, elas não se engajam umas às outras, somos nós que nos engajamos a elas. Segundo o autor, o resultado do cálculo e a demonstração são novas regras que têm por base e são conseqüência de regras aceitas anteriormente. Nesse sentido, a regra é forte e impõe ao sujeito a necessidade de obedecê-la.

O homem cria regras matemáticas e, por meio dessas regras, surge a necessidade de outras regras que obedeçam ao automovimento da matemática: o movimento intrateórico. Por essa razão, teóricos como Piaget, Granger e Wittgenstein afirmam que a matemática tem uma estrutura que lhe é própria e autônoma. Esse movimento que lhe é próprio faz com que, por exemplo, os símbolos da linguagem matemática sobrevivam apenas a experiência dos próprios símbolos (Granger, 1974). Essa autonomia radical cria a possibilidade de uma previsão de resultados (Wittgenstein, 1987) que será imposta pela regra. O automovimento da matemática (Caveing, 2004) é um movimento independente da vontade do sujeito, podendo até mesmo ser confundido com o pensamento platônico. O sujeito cria o conceito e esse conceito vai obedecendo aos critérios teóricos da matemática. "*Parece como si hubiera ya un motivo de decisión: y hay que inventarlo todavia*" (Wittgenstein, 1987, p. 224). Para Piaget, "cada nova relação ou estrutura matemática se caracteriza por sua necessidade tão logo é construída: essa 'construção necessária' suscita, pois, a questão de seu mecanismo constitutivo" (1983, p. 45). Nesse contexto, o aluno pode experimentar o conceito e reconstruí-lo, ou seja, ele experimenta a operação do cálculo de multiplicação, por exemplo, porque o resultado já está previsto, mas ele é autor quando inventa a forma de demonstrar o produto.

No processo de ensino e aprendizagem de definições matemáticas, com o intuito de conduzir o aluno na construção de conceitos, recorre-se constantemente ao uso de teoremas e suas demonstrações que seguem regras matemáticas. As definições envolvem conceitos matemáticos e, segundo Panza & Salanskis (1995), os conceitos estão cristalizados nas definições[1] dos objetos. O objeto possui um predicado e, conseqüentemente, pode ser definido e conceitualizado. Para Wittgenstein (1987), é na demonstração, ou seja, no nascimento da prova que surge a oportunidade da criação matemática. A demonstração produz novas conexões e cria o conceito dessas conexões, guia e dirige nossas experiências dentro de canais determinados e mostra o sentido de uma proposição. O autor acrescenta que calcular é um movimento entre os conceitos, em que a demonstração do cálculo é um novo conceito e também a transição para um juízo. Caveing (2004) corroborando as idéias de Wittgenstein, afirmando que a demonstração não resulta do conceito e sim da construção de conceitos. Dessa forma, percebe-se que as atividades desenvolvidas em sala de aula envolvem conceitos matemáticos que representam regras interpretadas conforme o contexto.

A sintaxe da língua natural segue as regras gramaticais e a sintaxe da língua matemática segue as regras matemáticas. Como a linguagem matemática está em simbiose com a linguagem natural, podemos dizer que a sintaxe da língua matemática também segue as regras gramaticais que constituem as significações das palavras e podem ser compreendidas com diferentes sentidos. As regras matemáticas precisam ser interpretadas para que o texto escrito em linguagem matemática seja compreendido. Essas regras podem aparecer de forma explícita, quando o enunciado contém verbos, como, por exemplo, calcule, multiplique, fatore, etc. e podem aparecer implicitamente, devendo ser interpretadas pelo leitor do enunciado. Os procedimentos de aplicação do algoritmo da multiplicação e da fatoração de expressões algébricas envolvem diferentes regras. A interpretação da regra de fatoração de expressões algébricas, por exemplo, compreende o conceito de fatoração. Nesse sentido, compreendo o conceito matemático como uma regra interpretada.

As regras matemáticas seguem as leis da lógica e as regras do aluno seguem a lógica do próprio aluno. O aluno interpreta a regra de acordo com as suas sensações subjetivas e a lógica obedece a leis que pretendem ser universais. Porém, é na demonstração, ou seja, no nascimento da prova que surge a oportunidade de criação matemática. O professor precisa

1 "Do ponto de vista lógico, definir significa determinar a 'compreensão' que caracteriza um conceito" (Japiassú e Marcondes, 1996, p. 64).

conhecer como o aluno lida com as regras matemáticas quando cria a sua demonstração e é por meio do diálogo que professor e aluno participam do mesmo universo discursivo e entram em entendimento.

Processo de aplicação de regras matemáticas

A resolução de alguns problemas das ciências e das matemáticas pressupõe a aplicação de regras. O processo de aplicação de regras não é mecânico, pois é necessária a interpretação. O conceito é uma regra interpretada e, segundo Wittgenstein (1987), é no uso que a regra adquire sentido. O aluno interpreta a regra, projeta sentidos durante a sua aplicação e a compreende. No movimento de fazer e refazer exercícios, o aluno vai aprimorando essa interpretação e o conceito vai se modificando. Por esse motivo podemos afirmar que o conceito está em constante estado de devir. Porém, em cada contexto, a regra pode adquirir um significado diferente e o aluno, que deveria aplicar a mesma regra, aplica outra em seu lugar.

Conforme o contexto, o aluno pode interagir com a regra matemática de diferentes maneiras. Ele pode simplesmente aplicar a regra, por exemplo, $2 + 3 \times 6 = 2 + 18 = 20$, o que demonstra que ele intuiu corretamente a regra da ordem das operações. Caso contrário, ele pode não seguir a regra, mas pensar que está a seguindo corretamente e resolver a operação da seguinte forma: $2 + 3 \times 6 = 5 \times 6 = 30$. Se ele não percebe o erro, a ilusão de estar seguindo corretamente a regra permanece. Porém, ele pode também se enganar[2] e calcular da seguinte forma: $2 + 3 \times 6 = 2 + 18 = 22$. Esse engano poderá ser reconhecido e corrigido pelo próprio aluno. Em outro caso, ele pode aplicar a regra $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, porém, num outro tempo, a regra passa a não ter mais sentido para ele, então, aplica outra regra: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Conforme Silveira (2005), existem casos em que o aluno pode seguir uma regra e aprimorar seu conhecimento, ao aplicar devidamente a regra de outros conceitos, ou seja, ao aplicar uma regra que está aprendendo, ele faz analogias com outras regras que estão em sua memória. Aplicar

2 O "engano" cometido pelo aluno é similar aos lapsos e aos esquecimentos mencionados por Rostand (1960), quando comenta os erros dos matemáticos durante o exercício de suas atividades. Assim como o aluno, o matemático, quando percebe o erro, corrige a si próprio.

devidamente a regra é intuir os seus passos e o caminho que deve seguir. Por exemplo, um aluno do segmento do ensino médio, ao fazer analogia entre a constante de integração "c" da função $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ e o termo independente "c" da função $y = ax^2 + c$ ($y + ax^2 + bx + c$, b = 0), ou ao reconhecer a diferença entre $\cos(3x)^2$ e $(\cos(3x))^2$, compreende que existe uma semelhança sintática e uma correspondência teórica entre os dois termos. Ele aplica um conhecimento aprendido em outro tempo e aprimora o conceito.

As conexões com outros conceitos se dão com o auxílio da memória. O sujeito faz analogias, buscando na memória conceitos já estudados. O aluno, porém, pode não seguir a regra corretamente, modificando-a e causando prejuízo ao conceito idealizado pela exigência teórica ao fazer conexões com outros conceitos.

Como é o caso de um aluno do curso de licenciatura em matemática, que disse: "professora, eu resolvi a equação $|2x-3| = x+1$ e encontrei x = 4 e x = $\frac{2}{3}$"; o que estava correto, "se eu colocar (na verificação) 4 dá certo e $\frac{2}{3}$ não dá certo. Pode pôr só um elemento no conjunto solução?". Na sua resposta, estava S = $\{\ \}$, e a resposta deveria ser S = $\{4\}$. O que leva o aluno a pensar dessa forma? Todo o seu raciocínio estava correto, mas escreve a resposta errada. É provável que o seu conceito de equação modular admita como conjunto solução a verificação para os dois resultados encontrados. Aplica a regra corretamente até o momento de encontrar as raízes, porém cria uma nova regra para encontrar o conjunto solução. A regra foi criada a partir do que ele viu e do que ele experienciou com o estudo da equação modular. A sua regra, provavelmente, deve ser: "os dois elementos que verificaram a equação modular participam do conjunto solução, caso contrário, o conjunto solução é vazio, portanto, o conjunto solução não pode ter apenas um elemento".

Existe diferença entre seguir de fato a regra, querer seguir a regra e pensar que está seguindo corretamente ou, ainda, não se interessar por ela. Querer seguir a regra já é o início do caminho. A invenção de regras apresenta uma lógica própria, como o registro do aluno de segmento de 5ª à 8ª série: $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$. O sinal negativo tem valor somente para o primeiro termo da segunda fração, pois ele não 'vê' que o sinal negativo é para toda a fração $\frac{x-3}{4}$. Ele interpreta de acordo com o que percebe por meio da visão. A distribuição do sinal $\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{4}\right)-\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$, que está subentendido, ele não consegue perceber.

É na linguagem escrita que se cristalizam os atos intencionais do sujeito (o sinal negativo implícito para as duas frações: $-\frac{x-3}{4}=-\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$). Porém, outro sujeito em contato com essa linguagem deverá reconhecer esses atos do sujeito que a escreveu.

Outro exemplo comum[3] de criação de regras pelo aluno é na expressão $\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}$ que, após os alunos da disciplina de cálculo diferencial e integral durante o processo de integração ou derivação de uma função, ao se depararem com uma expressão algébrica desse tipo, simplificam e igualam a x -1. Como ele não vê nenhum elemento no numerador após a simplificação por x + 1, ele vê a fração como $\frac{}{x-1}$, com um vazio no numerador, mas que deveria ser $\frac{1}{x-1}$. “Simplifica x + 1 com x + 1” e, no lugar do numerador, fica um vazio. Assim, o termo que está no denominador pode ocupar esse espaço vazio do numerador, e ele cria outra regra. O aluno, com a intenção de simplificar a fração, depara-se com a “ausência[4] do numerador”. Como essa “ausência” o perturba, ele coloca o denominador na posição do numerador e acaba modificando o conceito.

Conforme Silveira (2005), o conceito deve ser considerado antes e depois da interpretação do aluno. O aluno descobre as propriedades do objeto e constrói o seu conceito como um processo de reorganização e reconstrução por atos intencionais. As ações e/ou visões do objeto gradativamente definem o conceito que, antes da interpretação do aluno, é considerado como o conceito que o professor pretende fazer o aluno construir ou um já construído pelo aluno em outro tempo. Depois da interpretação do aluno, o conceito é considerado interpretado ou reinterpretado pelo aluno.

---

3 Exemplos como esses também são citados por Stella Baruk (1985, 1996) e por Cipra (1985).

4 Lizcano (1993) mostra a dificuldade da episteme grega em lidar com a ausência (o zero).

O processo de seguir a regra é imprevisto e depende do contexto. O erro do exemplo do aluno citado por Stela Baruk (1985), que diz ser $\Re - \{1\}$ o domínio da função $y = x - 3$, acontece, como explica a autora, porque ele considerou y igual a $\frac{x-3}{1}$, e como o denominador deve ser diferente de zero, em sua interpretação, 1 será diferente de zero, assim, o domínio da função é $\Re - \{1\}$.

É uma verdade dizer que um é diferente de zero, mas não é isso que está sendo questionado, e sim os valores que a variável x pode assumir para a função $y = x - 3$. O aluno faz analogia com $y = \frac{a}{b}$ onde "b" deve ser diferente de zero, e o domínio da função será $\Re - \{0\}$. A interpretação da sua regra está correta, mas não responde ao que lhe foi questionado. Ele produz um sentido correto em um contexto no qual o seu sentido não faz sentido (conforme as exigências da matemática). O domínio de uma função demanda pelos valores que a variável x pode assumir para função y e não sobre as condições de existência do denominador da função.

A regra diz: "caso a variável esteja no denominador, devemos considerar que o denominador não pode ser igual a zero". Esse aluno considerou que o denominador deve ser diferente de zero, mas não levou em consideração a variável. O denominador não tinha variável, assim, não teve sentido apenas constatar que o denominador era diferente de zero. Ele não intuiu o sentido correto da regra. Ele interpretou a regra de forma incorreta, porém, com certa coerência, mas acabou modificando o seu sentido. Constatar que o denominador é diferente de zero e considerar que a variável que está na expressão algébrica do denominador deve excluir os valores que a igualam a zero são duas regras diferentes. A regra não diz o que o aluno deve fazer quando não tem expressão algébrica no denominador e esse fato representa um resíduo dessa regra, ou seja, o que está implícito na regra, mas não está dito – o que está além da regra. A regra para relações que não apresentam expressão algébrica no denominador é outra, mas o aluno demonstra não saber isso.

O domínio de uma função deve mostrar os valores que ela pode assumir, assim, ele deve excluir uma possível divisão por zero. Quando o aluno diz que a função pode assumir todos os valores excluindo o um, é provável que tenha construído sua regra desta forma '$\Re$ – {o valor do denominador}', mas que representa uma versão da regra '$\Re$ – {a(s) raiz(es) da equação que está no denominador}. Ao projetar outro sentido para a regra, ocorre uma transformação dessa regra.

O aluno conecta a função $y = x - 3$ com outras funções que ele estudou em outro tempo. É possível que outra função tivesse como domínio $\Re - \{0\}$ ou $\Re - \{1\}$. Ele faz analogias entre essas funções e projeta sentido. A função $y = \frac{x-2}{x}$ tem como domínio $\Re - \{0\}$, porque x deve ser diferente de zero, já a função $y = \frac{x+5}{x-1}$ tem como domínio $\Re - \{1\}$ porque $x - 1$ deve ser diferente de zero. Na função $y = x - 3$, o aluno transforma para $y = \frac{x-3}{1}$ e conclui que 1 é diferente de zero, assim, o domínio que ele estabelece para a função é $\Re - \{1\}$.

As conexões das funções que ele teve como experiência num outro tempo e as semelhanças sintáticas que percebe entre elas são elementos que participam na formação de seu conceito do domínio de uma função.

O conceito trabalhado em sala de aula não é mais o mesmo, é outro. Este novo conceito é forjado pelas conexões conceituais que estão de acordo com a imaginação e com a memória do aluno (Silveira, 2005). O aluno descobre as relações dos objetos, inventa e constrói os conceitos por meio de atos intencionais que se manifestam na escrita.

O sujeito faz analogias, porém, não transpõe conhecimentos, não generaliza automaticamente, justamente porque não existe generalização espontânea. A relação entre um conhecimento e suas aplicações está à mercê de fatos contingentes. No processo de aplicação da regra, o aluno depara-se com contextos diferentes e a regra, que deveria ser a mesma, passa por transformações e é modificada.

Segundo Glock (1998), o imperativo "seguir a regra[5]", de Wittgenstein, é um processo mecânico, intuitivo, platônico (idealizado, ou seja, o caminho para seguir a regra já está previsto) e hermenêutico (que é a interpretação da regra). O processo é mecânico no sentido de bastar seguir seus passos; intuitivo no sentido de dever ser representado no espaço e no tempo (começamos num tempo e num lugar e terminamos em outro); platônico no sentido de determinação de sua finalidade, e hermenêutico no sentido de a regra possuir um significado.

5 A regra aqui considerada é a que determina uma resposta a cada passo, como, por exemplo, $y = 2x$.

O estudante segue a regra corretamente, mas, durante sua aplicação, depara-se com uma rede conceitual que pode impedir a aplicação dos diferentes passos da regra. É por esse motivo que os alunos, constantemente, argumentam que não foram bem nas verificações, porque "caiu" na prova justamente "o que eu não tinha estudado". Um aluno da disciplina de cálculo diferencial e integral me disse: "eu estudei as mais difíceis" e na prova "as mais fáceis, eu não sabia fazer", referindo-se ao cálculo de derivadas de funções algébricas por definição. Ora, se ele estudou as mais difíceis, a princípio, deveria saber as mais fáceis. Porém, ele "treinou" as mais difíceis, mas não intuiu o sentido correto da regra, caso contrário, teoricamente, saberia resolver as "fáceis" e as "difíceis".

Para Wittgenstein (1987), é necessário pretender (querer) seguir a regra. É uma intencionalidade virtual. A regra é interpretada corretamente se o sujeito tiver a intuição correta da regra. Segundo o autor, a regra, o cálculo, a gramática e o jogo têm o mesmo significado. Quem participa do jogo tem que seguir suas regras, interpretando-as e seguindo as ordens da necessidade conceitual.

Se o aluno sabia derivar a função $f(x) = x^2 + 3x - 1$, por exemplo, a mesma regra ele deveria aplicar para uma função do tipo $y = 2x + 3$ que, ao contrário da primeira função, não precisaria desenvolver o produto notável $(x + \Delta x)^2$. Porém, é justamente aí que reside o problema, ele "treinou" para resolver as derivadas, tendo que desenvolver produtos notáveis, mas, quando surge uma função mais simples, ele não sabe. Ou seja, ele não generalizou, não intuiu corretamente o sentido da regra. A aplicação correta da regra exige uma série de procedimentos que devem ser interpretados. O aluno decora os procedimentos sem levar em consideração o sentido deles.

Se o estudante diz que "sabe fazer as mais difíceis e as mais fáceis, não", é porque ele sabe aplicar todos os passos da regra para uma função de grau dois; para uma função de grau um, ele não sabe. Na perspectiva do aluno, muda o contexto, muda o conceito.

Baruk (1985) conta em seu texto que um aluno dizia saber resolver equações, porém, ante a equação $13x - 5 = 3x$, ele diz não saber resolvê-la, mas sabia resolver $13x - 5 = 3x + 2$. É possível que ele tivesse decorado os passos de resolução desse tipo de equação, mas não havia intuído o sentido da regra de resolver uma equação do primeiro grau. Talvez em $13x - 5 = 3x + 2$ ele junte os termos semelhantes $13x$ com

3x e 2 com – 5, porém, na equação 13x – 5 = 3x, junta 13x com 3x e – 5 não tenha com o que juntar. Assim, em sua perspectiva, a regra muda e ele não sabe mais resolver.

A regra segue procedimentos que apresentam sentido. *Devo proceder de tal e tal forma, porque meu objetivo é encontrar alguma coisa*. Assim, o procedimento tem sentido. O aluno mecaniza o procedimento sem dar sentido. Não intuir o sentido da regra é não reconhecer que ela é única, não muda, é sempre a mesma. Os passos são iguais em qualquer circunstância. O aluno não se pergunta como deve fazer e sim o que deve fazer. Isso acontece porque ele fixa seu reconhecimento da regra num contexto determinado.

O aluno pode muito bem construir um conceito num determinado momento e, em outro, modificá-lo. No processo de ensino e aprendizagem da trigonometria do segmento do ensino médio, o aluno pode medir o lado oposto e a hipotenusa de diferentes triângulos retângulos formados por um mesmo ângulo e concluir que essa razão é sempre a mesma. O professor dirá que essa razão constante chama-se seno de um ângulo. O professor mostra e explicita a regra do cálculo do seno de um ângulo percebida e criada pelo aluno. Porém, mais tarde, o aluno pode aplicar essa mesma regra em um triângulo obtusângulo, por exemplo. As razões trigonométricas num triângulo retângulo, para o aluno, derivam em razões trigonométricas num triângulo. Nesse caso, ele modifica o conceito de seno de um ângulo.

A capacidade reflexiva do aluno não atinge a amplitude necessária para perceber em que casos a regra das razões trigonométricas deve ser aplicada. Stella Baruk[6] (1985) cita a famosa simplificação de $\frac{a+b}{a+c}$ em $\frac{b}{c}$ que também tive a oportunidade de constatar com alunos de diferentes segmentos da educação básica. Ora, o aluno aprende que $\frac{ab}{ac}$ é igual a $\frac{b}{c}$, daí decorre a justificativa da simplificação. Para fazer o aluno refletir sobre tal simplificação incorreta, como menciona Baruk, o professor pode ilustrar com a situação $2 = \frac{10}{5} = \frac{4+6}{4+1} = \frac{6}{1} = 6$. O aluno vai concordar então que não pode simplificar a fração dessa forma, porém, em outro tempo, ao

6 Os erros dos alunos franceses que a autora expõe são similares aos erros de alunos brasileiros.

se deparar com $\frac{\cos x + 3}{\cos y + 3}$, talvez ele diga[7] que essa fração é igual a $\frac{\cos x}{\cos y}$. Ele cria regras conforme o contexto.

Baruk (1985, p. 338) mostra um exemplo de "lógica da magia" do cálculo: $\frac{7}{4} + \frac{5}{3} = \frac{(7+3)+(4+5)}{4+3} = \frac{18}{7}$. Esse exemplo fornece elementos para que nós (professores) possamos perceber o quanto são obscuras, para o aluno, certas regras matemáticas. Assim como em sua concepção tudo parece tão vago e sem sentido que ele pode também produzir regras que não tenham sentido.

Obedecendo à regra da adição de frações, a operação deveria ser calculada como $\frac{7}{4} + \frac{5}{3} = \frac{3 \times 7 + 4 \times 5}{4 \times 3}$, porém, podemos perceber que 3 e 7, 4 e 5 e ainda 4 e 3 deveriam ser multiplicados, mas o aluno soma. Como ele não vê sentido em multiplicar esses números, já que se trata de uma adição, então ele muda a regra e soma, ao invés de multiplicar.

No mesmo sentido, Baruk (1996, p. 322) fornece outro registro que serve para ilustrar a lógica de outro aluno: "10 + 3 = 4; 10 + 7 = 8; 11 + 10 = 11". Percebe-se nesses registros que o aluno toma o valor absoluto de zero, desconsiderando o seu valor relativo. Logo, a adição 10 + 3 corresponde a "um mais três", já que o zero representa "nada". A regra que diz que devemos adicionar as unidades, as dezenas e assim sucessivamente, é modificada pelo aluno. A regra desse aluno tem uma lógica própria, mas que não coincide com a lógica matemática.

Assim como esta, existem outras regras que o aluno cria. Esse fato acontece porque ele não consegue ler e compreender o que está além da regra, assim, transforma a regra e cria outra em seu lugar. Por exemplo, ele sabe que 2 + 3 = 5, e desse pressuposto conclui que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$, como cita Baruk e que eu percebi durante a minha prática docente na educação básica. Ele faz analogias e essas analogias derivam em erro. Ele estabelece critérios para fazer seus julgamentos por meio do que percebe e do que vê.

Para ilustrar essa problemática, trago a narrativa de um aluno estagiário do curso de licenciatura em matemática que observava a aula

7 Fato percebido com alunos do ensino superior.

de uma professora do segmento de séries iniciais. A professora pergunta ao seu aluno: “meia laranja mais meia laranja é uma laranja inteira?”. O aluno lhe responde: “Não professora porque quando cortamos a laranja, cai um caldinho”. O aluno está equivocado? Não, na sua lógica, ele está correto, principalmente se a laranja estiver bem madura. Porém, esse aluno está errado do ponto de vista da lógica da matemática. Esse fato nos aponta para os problemas de interpretação de uma regra matemática. Nesse sentido, Gómez-Granell (2003, p. 263) nos oferece outro exemplo dessa problemática.

> Tomemos, por exemplo, a expressão (a.b) = (b.a), que se refere à lei da comutatividade da multiplicação. Se transitamos no nível algébrico ou no nível numérico (4 x 5 = 5 x 4; 3 x 6 = 6 x 3, etc.) a regra se confirma. No entanto, se nos determos numa situação específica, com um determinado significado semântico, a regra deixa de ser cumprida: a expressão “4 caramelos custam 6 pesetas cada um” não é equivalente à expressão “6 caramelos custam 4 pesetas cada um”.

Esses fatos nos mostram que a leitura de uma regra matemática possibilita diferentes interpretações, pois a regra está associada às analogias que o aluno faz com outras regras vista no passado e que interferem na forma de perceber e imaginar o objeto do conceito que está implícito na regra. A mesma autora (p. 266) nos fornece outro exemplo:

> Outro erro típico consiste, por exemplo, em somar quantidades sem considerar o procedimento de “vai um”:
>
> $$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{+\ 48} \\ 612 \end{array}$$
>
> É evidente que qualquer aluno de oito anos sabe, de cabeça, que o resultado de 24 + 48 não pode ser 612. No entanto, sem se ater ao significado, ele respeita a aplicação do procedimento que domina – somar sem utilizar a técnica do “vai um” – e o aplica fazendo a extrapolação ou supervalorização de uma regra.

Na perspectiva do aluno, muda o contexto, muda o conceito. O conceito no cotidiano é um e em linguagem formalizada é outro. Porém, o aluno pode continuar seguindo uma mesma regra que tem o hábito de aplicar num contexto em que ela não se aplica.

Caveing (2004, p. 15) afirma que o sujeito apenas pode experimentar o conceito porque não é produto seu, pois o conceito, nascido de outros conceitos, engendra outros. O filósofo leva em consideração o automovimento da matemática, que é o movimento intrateórico da matemática e explica as exigências conceituais.

O aluno cria novos conceitos a partir de conceitos já construídos, mas que devem obedecer às necessidades conceituais. Ele tem liberdade para criar conceitos, mas essa liberdade é limitada pelo automovimento da matemática.

Wittgenstein (1987), em diversos momentos de seu texto, deixa pistas desses novos conceitos que são produzidos a partir de um determinado conceito.

> *Como muestra alguien que comprende una proposición matemática? Aplicándola, por ejemplo. Y no lo muestra también demonstrándola? Quiero decir: la demonstración me muestra una nueva conexión, por ello me proporciona también un nuevo concepto.* (p. 248)
>
> *Implicaría matemática que la gente, por ejemplo, examinanara el movimiento de los cuerpos con el fin de saber si su trayecto puede representarse mediante la construccíon de una elipse con una cuerda y dos clavos? Habría ejercitado la matemática quien hubiera inventado este tipo de examen? Ciertamente ha creado un nuevo concepto. (...) Está claro: quien nos enseña la ecuación de una elipse nos enseña un concepto nuevo. Pero quien nos demuestra que esa elipse y esa recta en ese punto, él también nos proporciona un nuevo concepto.* (p. 348)

Para mostrar ao aluno como aplicamos uma regra, analisamos a pergunta a ser respondida e a forma pela qual se encontra a incógnita, colhemos os dados do problema, dizemos qual o objetivo do primeiro passo da regra e seguimos a regra fazendo transformações lógicas com as sentenças matemáticas. Explicamos todos os passos da regra à medida que descrevemos nossos atos no quadro.

A pergunta do problema é, muitas vezes, desconsiderada por alguns alunos. Quando resolve uma equação utilizando a fórmula de Bhaskara, eles não se questionam se a equação a ser resolvida está na forma $ax^2 + bx + c = 0$, ou quando aplica o teorema de Pitágoras eles não se perguntam se o triângulo a ser resolvido é um triângulo retângulo. Esses exemplos demonstram que esses alunos aplicam procedimentos de resolução sem se dar conta de que os mesmos servem para responder outra pergunta e não a pergunta que lhe foi feita.

Certa vez, um aluno do curso de engenharia mecânica, mostrando seu caderno, me disse: "Olha se eu compreendi bem". Em seu caderno havia uma função matemática escrita, e de cada termo da função saía uma flecha com uma explicação. Ele havia dado sentido ao conceito da função com as palavras de seu vocabulário e queria que eu verificasse se a sua explicação coincidia com a minha. Isso mostra que o aluno precisou explicitar por meio da escrita em seu caderno como ele vê e compreende o tal conceito. As flechas ligavam cada elemento da função com os respectivos significados, bem como as ações que deveriam ser executadas, caso fosse necessário fazer o gráfico da função. Esse texto escrito pelo aluno representa a definição da função construída por ele.

Para que o aluno possa saber se está seguindo corretamente uma regra e não outra, ele precisa da avaliação do professor, que emitirá seu julgamento. Caso a regra do aluno não esteja de acordo com a regra matemática, o professor precisa compreender a lógica do aluno, para lhe mostrar onde sua regra é falha. A regra surge do acordo e o aluno sabe que não pode transgredi-la.

A regra é pública, ou seja, não existe uma regra privada, pois o sujeito precisa de outro para legitimá-la. Habermas (1990, p. 117), ao comentar o processo de seguir a regra de Wittgenstein, afirma:

> Seguir uma regra significa observar, em todo o caso, a mesma regra – o significado de uma regra está entrelaçado "da mesma maneira" com o uso da palavra. A não pode estar seguro de estar seguindo realmente uma regra, se não houver uma situação na qual ele possa submeter o seu comportamento ao juízo de um crítico B, o qual não esteja em condições de constatar desvios em relação à regra. O significado idêntico e a validez de uma regra dependem conceitualmente uma da outra.

Para ilustrar a falta de correspondência da explicação do professor e da compreensão do aluno, trago um problema recorrente em sala de aula. Para isolar x na equação $x + 2 = 4$, diz-se que 2 está somando x, então ele deverá passar para o outro lado da igualdade diminuindo de 4, assim como na equação $x - 3 = 5$ diz-se que 3 passará para o outro lado da igualdade somando 5. Costumava-se resumir esse procedimento com a regra "trocar o sinal". Assim, na equação $4x = 8$, 4 deveria passar dividindo por 8, porém, os alunos continuavam aplicando a regra "trocar o sinal" e a equação se transformava em $x = 8 - 4$.

Os professores se deram conta de que seria melhor os alunos aprenderem as operações de números inteiros, bem como as equações de primeiro grau utilizando material concreto e com aplicação prática no cotidiano do aluno — inclusive eu mesma adotei essa nova estratégia no período em que lecionava para a 6ª série da educação básica. O surpreendente é que as duas alternativas de solução resolviam o problema em parte, pois bastava uma pequena mudança, como, por exemplo, pedir que resolvessem o cálculo $2 - 5 - 3 + 7$, ou uma equação do tipo $\frac{2x}{3}+1=5$ que a situação já se complicava. Conseguia-se êxito no sentido de que o aluno não reproduzisse mais uma regra inadequada e, quando se falava na tal regra, enfatizava-se que um termo, ao passar de um lado a outro da igualdade, trocava de operação e não de sinal.

Em outra situação, os números positivos podem ser representados por palitinhos vermelhos, e os números negativos por palitinhos azuis, assim, temos 9 palitinhos vermelhos e 8 azuis. Oito palitinhos vermelhos se compensam com 8 azuis e sobra 1 vermelho. Logo, $2 - 5 - 3 + 7$ é igual a 1. Foi assim que aprendi a ensinar a adição de números inteiros num dos congressos de educação matemática. Na prática, essa situação imaginária com os palitinhos que se compensam é uma regra. É fácil admitir que $9 - 8 = 1$, porém $8 - 9$ é mais complexo. Pago 8 e fico devendo 1 ou compenso 8 palitinhos vermelhos e 8 azuis e fico com um palitinho azul. E se dissermos ao aluno que $8 - 9 = 8 - 8 - 1$ é igual a -1, não parece tão evidente quanto a regra do "tenho e devo" ou dos "palitinhos vermelhos e dos palitinhos azuis"?

O que quero salientar é que todos os diferentes procedimentos de ensinar não deixam de ser regras e são interpretadas pelo aluno. Os professores ditos "construtivistas" optariam pela regra do "tenho e devo" ou dos "palitinhos vermelhos e dos palitinhos azuis". Essas servem para ilustrar a formalização, mas não são garantias da aprendizagem do aluno. Os professores ditos "tradicionais" não desenvolveriam essas etapas com essas regras e iriam direto ao algoritmo. O sentido que o aluno dará à regra não está previsto pelo professor, o que o professor pode prever é se a regra tem sentido. Tem sentido ensinar com palitinhos vermelhos e azuis? O aluno será captado pela idéia da compensação de *n* palitinhos vermelhos e de *n* palitinhos azuis? Caso a regra tenha sentido para o aluno, outra pergunta é pertinente: o aluno saberá transpor a regra dos palitinhos para a operação formalizada sem dispor de palitinhos?

Quando a regra dos palitinhos é livrada dos palitinhos, começa o processo de abstração da regra. Esse processo, muitas vezes, não atinge seu objetivo justamente porque o contexto de contar palitinhos e compensar palitinhos vermelhos e azuis é diferente do contexto de lidar com a escrita matemática.

No cálculo 2 – 5 – 3 + 7, o aluno junta os palitinhos azuis (- 5 e - 3) e obtém 8, junta os palitinhos vermelhos (2 e 7) e obtém 9, compensa todos os palitinhos possíveis, 8 azuis e 8 vermelhos e percebe que sobra 1 vermelho. Esse 1 representa a cristalização dos atos intencionais do aluno: o ato de juntar os palitinhos de mesma cor, o ato de compensá-los e o ato de perceber a quantidade de palitinhos que sobram após a compensação.

O aluno que faz a prática mencionada acima pode ter dificuldades em resolver, por exemplo, o cálculo $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}+\frac{7}{3}$, que tem o mesmo significado do cálculo anterior, porém, com números fracionários, justamente porque o contexto não é o mesmo, e o conceito de “juntar, compensar e perceber o que sobra” já não tem mais sentido. Na perspectiva do aluno, as regras mudam conforme o contexto.

Esse fato é percebido durante a aplicação de regras pelos alunos. Para continuar ilustrando, trago outro exemplo: na aplicação de uma prova sobre logaritmos, um aluno do segmento de ensino médio demonstrou saber que log ab = log a + log b, mas, ao ter que resolver a questão: se log a = 0, log b = - 1 e log c = 1, calcule $\log\frac{ab^2}{c}$, escreveu $(\log a.\log b)^2 - \log c$. Assim, percebe-se que ele admite que log ab = log a + log b, porém para log ab^2, que ele deveria aplicar a mesma regra, ele cria outra. Novamente, podemos verificar que, na perspectiva do aluno, se o contexto muda, a regra também muda.

O aluno não vê semelhança entre as duas expressões algébricas e não percebe que, nas duas, existe o logaritmo de um produto. Na primeira, o produto de ‘a’ por ‘b’ e, na segunda, de ‘a’ por ‘b^2’. Para resolver o problema, ele cria outra regra que faz sentido para ele.

O sentido de uma regra é um conceito interpretado e depende do contexto em que ele está inserido. A ação de atribuir sentido ao objeto e elaborar o seu conceito depende da experiência do sujeito com o objeto, mas aí reside um obstáculo, pois nem sempre o sentido estará de acordo com a lógica matemática. Para Granger (1974), é na relação de um conceito e suas significações que podem ser percebidos os obstáculos que impedem o movimento desta ação.

Considerações finais

Os algoritmos na matemática são necessários, pois eles representam uma economia de pensamento e é inegável a importância da construção de conceitos para a autonomia intelectual do aluno. Porém, não se pode negar que os algoritmos e as regras matemáticas representam um automatismo quase imprescindível, pois, em alguns casos, é fundamental a utilização de um método que abrevie um procedimento longo, como as regras de integração e derivação de funções algébricas e até mesmo o próprio algoritmo da multiplicação. Sem ele, por exemplo, seria penoso resolver o produto entre 678 e 36.

Para que a regra tenha sentido para o aluno, é preciso que ele construa o conceito que está subjacente à regra. O sentido da regra é adquirido no uso e em diferentes contextos. Na perspectiva do aluno, a regra não se atualiza automaticamente nos contextos, justamente porque, com a mudança de contexto, há mudança de conceito e, conseqüentemente, mudança de regras. Esse fato acontece porque o aluno não compreende bem a linguagem matemática, ou seja, ele tem dificuldades para ler uma sentença matemática e interpretar o que está escrito além da sentença. Os aspectos sintáticos não são compreendidos e, em decorrência desse fato, os aspectos semânticos perdem o sentido. A semântica e a sintática que deveriam se completar, se distanciam uma da outra. O texto pode já estar escrito em linguagem natural não necessitando de tradução, mas contém conceitos matemáticos subjacentes nas palavras dessa linguagem. Esse texto pressupõe uma formalização em língua matemática e a estrutura sintática dessa língua segue regras que pressupõem conceitos matemáticos.

Saber seguir uma regra é uma capacidade técnica, porém, a regra não é mecânica, porque ela não contém todos os casos de sua aplicação.

Esses se encontram dentro da gramática da nossa linguagem. A regra não é apreendida de uma só vez, ela surge de uma prática constante.

A regra terá sentido se ela for interpretada de acordo com as exigências conceituais da matemática e, para que isso ocorra, é necessário que o professor e o aluno entrem no mesmo universo discursivo. O professor, convidando o aluno para participar do ritual da aplicação da regra, poderá conhecer, por meio do diálogo, os sentidos que o aluno atribui à regra matemática. Para Wittgenstein (1987), a regra é imperativa (que seja assim!), mas ela não nos diz todos os casos que devemos aplicá-la. Os não ditos da regra, ou seja, os seus resíduos, podem ser interpretados no processo de provas e refutações que nascem dos jogos de linguagem entre professor e alunos. O sentido das palavras utilizadas pelo professor e pelos alunos no processo de aplicação de regras matemáticas está de acordo com o uso e com a forma como esse uso se entrelaça com a rede conceitual do aluno.

Referências

BARUK, S. (1996). *Insucessos e Matemáticas*. Lisboa, Relógio D' Água.

______ (1985). *L'âge du capitaine: De l'erreur en mathématiques*. Paris, Seuil.

BOUVERESSE, J. (1987). *La force de la règle : Wittgenstein et l'invetion de la necessité*. Paris, Minuit.

CAVEING, M. (2004). *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris, J. Vrin.

CIPRA, B. (1985). *Erreurs... et comment les trouver avant le prof...* Paris, Inter Editions.

GLOCK, H.-J. (1998). *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar.

GÓMEZ-GRANELL, C. (2003). "A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado". In: TEBEROSKY, A. e TOLCHINSKY, A. *Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática*. São Paulo, Ática.

GRANGER, G.-G. (1974). *Filosofia do estilo*. São Paulo, Perspectiva/ Edusp.

HABERMAS, J. (1990). *Pensamento pós-metafísico: estudos filosóficos*. Rio de Janeiro, Tempo Brasileiro.

JAPIASSU, H. e MARCONDES. D. (1996). *Dicionário básico de filosofia*, Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

LIZCANO, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática: la construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*. Barcelona, Gedisa.

PANZA, M. e SALANSKIS. J. (1995). *L'objectivité mathématique: Platonismes et structures formelles*. Paris, Masson.

PIAGET, J. (1983). *A Epistemologia genética*. São Paulo, Abril Cultural.

ROSTAND, F. (1960). *Scrupules des Mathématiques*. Paris, J. Vrin.

SILVEIRA. M. R. A. da (2005). *Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática.* Tese de Doutorado em Educação.Porto Alegre, UFRGS.

______ (2008). Wittgenstein e a Matemática. TERCEIRO CONGRESSO BRASILEIRO DE ETNOMATEMÁTICA. *Anais...* Niterói. CD-ROM.

WITTGENSTEIN, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid, Alianza.

Recebido em jun./2008; aprovado em jun./2008