A construção do número: a controvérsia construtivismo-inatismo*

MARIA DA CONCEIÇÃO RODRIGUES FERREIRA**

Resumo

Este trabalho tem por objectivo apresentar os principais pressupostos das perspectivas construtivista e inatista no que se refere à construção das primeiras representações numéricas na criança. De facto, Piaget (1952) e outros construtivistas cognitivos como Gréco (1960 e 1962), Bryant (1997), Siegel (1982), Morgado (1993), Worthington (2007), entre outros, defendem que a concepção de número resulta da relação entre classe e relação assimétrica, que ocorre por abstracção reflexiva e supõe a síntese da seriação e da classificação num sistema singular onde cada número é, ao mesmo tempo, ordinal e cardinal. Além disso, os inatistas tais como Gelman e Gallistel (1978), Klahr e Wallace (1973), Wynn (1992), entre outros, hipotetisam que as crianças nascem com princípios necessários à evolução do conhecimento abstracto, defendendo que as crianças em idade pré-escolar devem desenvolver a aplicação, de forma efectiva, dos princípios implícitos à contagem. Dada a complexidade de tal questão, sugerimos a importância de se manter o debate sobre o construtivismo e o inatismo enquanto referências epistemológicas na educação matemática.

Palavras-chave: adição; subtracção; aritmética.

---

* Este trabalho refere-se a parte do segundo capítulo da tese de doutoramento, da autora, intitulada *Análise das estratégias de resolução de problemas de estrutura aditiva em crianças de 5/6 anos de idade*, desenvolvida sob a orientação da Doutora Luísa Maria de Almeida Morgado, Professora Catedrática da Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra e que foi aprovada, em 2003, por unanimidade, com distinção e louvor. O projecto foi financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia – Ministério da Ciência, da Tecnologia e do Ensino Superior, de Portugal, no âmbito do Programa PRAXIS XXI.

** Professora Auxiliar da Universidade Lusíada do Porto (Porto-Portugal) – Faculdade de Ciências Humanas e Sociais, Curso Superior de Psicologia. E-mail: ferreira@por.ulusiada.pt

Abstract
In this paper we intend to present the main assumptions of constructivism and innatism in what refers to the construction of children's first numerical representations. In fact, Piaget (1952) and other cognitive constructivists such as Gréco (1960 and 1962), Bryant (1997), Siegel (1982), Morgado (1993), Worthington (2007), among others, argue that children's conception of number results from the relation between class and asymmetrical relation, which occurs by reflective abstraction and involves the synthesis of seriation and classification into a single system where each number is, at the same time, ordinal and cardinal. On the other hand, innatists like Gelman & Gallistel (1978), Klahr & Wallace (1973), Wynn (1992), among others, presented the assumption that children are born with principles that are necessary to the development of abstract knowledge, which means that preschoolers develop the application of the how-to-count principles. Given the complexity of this issue, we suggest that the debate on constructivism and innatism should be maintained as epistemological references in mathematics education.
Keywords: *Addition; Subtraction; Arithmetic.*

O construtivismo de Jean Piaget

O construtivismo piagetiano faz depender o desenvolvimento mental da criança da interacção entre quatro factores, a maturação do sistema nervoso, a experiência física, a transmissão social e, por último, a equilibração entre os factores internos e externos. Contudo, o desenvolvimento do indivíduo não se caracteriza por estados estáveis, pelo contrário, o desenvolvimento cognitivo é interpretado por Piaget como uma sucessão de estados em equilibração progressiva, com excepção do que se refere às estruturas lógico-matemáticas que, uma vez adquiridas não se modificam mais, embora possam integrar-se em estruturas mais complexas.

Com efeito, esse autor defende que "as estruturas lógicas resultam da equilibração progressiva de estruturas pré-lógicas que são os seus esboços, e esta equilibração, como tal, explica a passagem de umas às outras, e portanto a formação e, sobretudo, o acabamento das estruturas lógico-matemáticas" (Piaget, 1976, p. 142). Consequentemente, a diferença entre as estruturas pré-lógicas e lógicas assenta, essencialmente, no grau de reversibilidade atingido a partir das regulações que ocorrem nas primeiras, sendo o problema central do construtivismo explicar a transição entre ambas.

Segundo Morgado (1988, p. 5), "o construtivismo piagetiano relembra a todo o momento a correlação estreita entre a experiência contingente e temporal do sujeito e o sistema de operações lógicas que, ao constituir-se, adquire um carácter atemporal e necessário". É nas interacções entre o sujeito e o objecto que o primeiro passa a ter, do segundo, um conhecimento cada vez mais complexo dada a capacidade que o ser humano tem de desenvolver mecanismos próprios de apreensão do real tais como, a abstracção empírica[1] e a abstracção reflexiva[2] apresentando, o meio ambiente, desafios constantes que se traduzem, para o sujeito, num conhecimento relativo obtido através de aproximações sucessivas ao real.

A actividade do sujeito é considerada assim, como um factor fundamental do desenvolvimento cognitivo, assumindo particular importância na construção dos conhecimentos lógico-matemáticos, devido ao isomorfismo que Piaget propôs entre as coordenações das acções e as estruturas operatórias. Deste modo, o conhecimento intuitivo e espontâneo que as crianças apresentam sobre os fenómenos são extremamente importantes uma vez que são instrumentos de pensamento com os quais progridem no processo de aprendizagem.

Centremos agora a nossa atenção sobre a construção do número, que se baseia na simultaneidade de duas estruturas de natureza puramente lógica.[3] A primeira é a classificação e a segunda a seriação ou ordem, resultando, o conceito de número da síntese que se desenvolve em simultâneo através das acções de reunir e de ordenar objectos e o sistema numérico da consequente coordenação de ambas as acções.

---

1 "*Empirical abstraction consists of extracting a property from what is observed by the subject. This can be one of the object's properties, such as weight, texture or color, but it can also involve the properties of actions, such as force or direction*." (Montangero e Maurice-Naville, 1997, p. 56).

2 "*Reflective abstraction always involves two indissociable aspects: on the one hand, 'reflecting', i.e. the projection (as if by a reflector) onto a higher level of what has been drawn from the lower level (for example, from action to representation) and, on the other hand, 'reflection' involving a mental act of reconstruction and of reorganization on this higher level of that which has been thus transferred from the lower one*." (Montangero e Maurice-Naville, 1997, p. 57).

3 O logicismo de Russell refere que a lógica e a matemática são fundamentalmente da mesma natureza, pelo que todos os teoremas matemáticos seriam demonstrados a partir de proposições lógicas não demonstráveis. Assim, as proposições lógicas referidas apresentam as noções de verdade, de relação, de pertença de um objecto ou a uma classe, de função proposicional, de satisfação de uma função proposicional através de objectos, de implicação material e de implicação formal, em que o número seria concebido como a classe de todas as classes lógicas. Esta posição é contrária à de Brouwer – intuicionismo – que considera que a matemática é função do espírito humano, sendo as ideias matemáticas expressas através de uma linguagem natural e formal cuja função específica é a de comunicar os conceitos do próprio sujeito sobre os objectos matemáticos que são inteiramente dependentes do pensamento humano, pelo que o número resultaria de uma intuição subjectiva (Combès, 1971).

O número é então concebido por Piaget – em oposição às teses de Russell e de Whitehead que defenderam que o número cardinal corresponde à classe das classes e o número ordinal às relações assimétricas de todos os números ordinais – como a síntese da classificação ou inclusão de classes e das relações de ordem ou seriação, síntese essa que corresponde à reunião das equivalências e das diferenças, uma vez que os termos enumerados são ao mesmo tempo equivalentes entre si, na medida em que pertencem à mesma classe e, simultaneamente, diferentes porque ocupam posições distintas na série, podendo estar sujeitos a uma ordem vicariante[4] (Piaget e Szeminska, 1975).

No entanto, antes das crianças iniciarem a instrução formal do conhecimento matemático já possuem alguns conhecimentos que se relacionam com a concepção de número e que virão, em seguida, a dar lugar à classificação, à seriação e à numeração (Morgado, 1993). Sabemos que durante o período sensório-motor, as capacidades discriminativas, de natureza perceptiva, ainda não são consideradas uma verdadeira classificação hierárquica, mas constituem condições essenciais ao seu desenvolvimento. Por outro lado, durante o período pré-operatório, as crianças são capazes de organizar os objectos através da leitura dos seus atributos embora não compreendam, ainda, a lógica de classes.

A seriação ou ordenação de objectos concretos, de acordo com uma propriedade comum só ocorre, por completo, por volta dos sete ou oito anos de idade, no início do período das operações concretas. Agora, as crianças já são capazes de seriar, o que implica a compreensão intrínseca de duas características fundamentais: a transitividade e a reversibilidade. Além disso, também são capazes de ordenar os objectos levando em consideração mais que um atributo e de executar a correspondência termo a termo entre duas séries de elementos e de atribuir um significado especial – princípio cardinal – ao último número enunciado na série numérica (Piaget e Szeminska, 1975).

---

4 Piaget considera que: "quando a criança se acha em presença de elementos equivalentes, por exemplo, em tamanho e em cor, o único meio de os distinguir é considerá-los um de cada vez, no espaço (fila) ou no tempo, ou seja, seriá-los. Mas essa seriação apresenta, aqui, a característica generalizada de que se se permutar os elementos se voltará a encontrar a série A A A … quer dizer, mesmo se o segundo se tornar o primeiro e vice-versa, haverá sempre um segundo e um primeiro: é aquilo a que se pode chamar uma ordem vicariante" (Piaget, 1980, p. 341).

Outros autores têm, no entanto, posições diferentes quanto à construção das noções numéricas. Brainerd (1973), por exemplo, demonstrou que esse desenvolvimento não depende da síntese entre as estruturas de seriação e de classificação, tendo defendido que a sua evolução se baseia essencialmente na noção de ordem.[5] Assim, foram levantadas três questões, de natureza empírica, sobre a provável precedência cronológica da ordenação sobre a cardinação e os números naturais, no desenvolvimento das noções numéricas. A primeira delas estabeleceu a relação entre a cardinação e a ordenação, a segunda entre a ordenação e os números naturais e a terceira entre a cardinação e estes números.

Os estudos experimentais, realizados por Brainerd (ibid.), demonstraram que a ordenação ocorre primeiro, não só em relação à cardinação, como também em relação aos números naturais. Além disso, no que se refere à cardinação, foi observado que essa noção ocorre posteriormente ao desenvolvimento da competência com os números naturais. Os resultados sugeriram ao autor que a competência numérica se baseia, essencialmente, na compreensão das relações assimétricas transitivas, ascendentes e descendentes e que há uma sequência entre ordenação, números naturais e cardinação, contrariamente ao proposto por Piaget que defendeu a simultaneidade da sua construção. Em consequência dos resultados obtidos, Brainerd sugere que: "a aprendizagem dos números naturais deverá ocorrer somente após as crianças terem sido iniciadas na lógica de classes e, em particular, na quantificação das mesmas através da correspondência termo a termo entre os elementos de cada uma delas" (ibid., p. 109).

Deste modo, o facto de a quantificação de classes ser entendida como necessária ao desenvolvimento do conceito de número natural indica, segundo este autor, que a enumeração é uma operação psicológica que interfere na formação da noção de ordenação estando, a construção da correspondência termo a termo, ligada ao desenvolvimento da noção de cardinação. Ainda, e com o objectivo de clarificar a sequência da construção, ordenação, número natural e cardinação, Brainerd (ibid) desenvolveu

---

5 Os fundamentos epistemológicos da posição teórica de Brainerd baseiam-se nas teorias de Peano – ordenação – e de Frege – cardinação. " *Peano defined the positive integers as a set of elements which satisfies the following postulates: 1) There is a positive integer 1; 2) every positive integer, as a, has a consequent a+ (a is called the antecedent of a+; 3) the integer 1 has no antecedent; 4) if a+ = b+, then a = b; 5) every set of positive integers which contains 1 and the consequent of every number of the set contains all the positive integers*" (James e James, 1976, p. 202).

alguns estudos que revelaram que a aprendizagem da noção de ordenação, teve consequências positivas na compreensão do conceito de número natural, o que não se verificou em relação à noção de cardinação.

No quadro da análise da concepção construtivista, do conceito de número, Gréco (1960 e 1962), desenvolveu estudos empíricos com o objectivo de investigar a influência dos raciocínios considerados pré-lógicos, na construção desse conceito. Assim, de modo a esclarecer se a criança desenvolve o conceito de número tendo por base uma noção intuitiva, conforme defendido por Poincaré (Gréco, 1960) ou se, por outro lado, a noção operatória do número só se desenvolve após a aquisição das estruturas de inclusão de classes e de relações assimétricas transitivas, conduziu-o ao estudo da aritmetização da série numérica, como uma série iterativa, tendo desenvolvido estudos específicos sobre a alternância dos números pares e ímpares e da comutatividade da operação aritmética de adição.

Em relação à alternância dos números pares e ímpares (ibid.), o autor considera que o sujeito deveria deduzir, a partir das representações ou concepções iniciais da série numérica conhecida, se os sucessores ou os antecessores seriam pares ou ímpares.[6] Os resultados obtidos por este autor indicaram que, aos cinco anos de idade, as crianças não compreendem esta problemática, tendo apresentado respostas dadas de forma arbitrária, o que não implicava que fossem todas falsas, se bem que as respostas correctas obtidas, fossem bastante raras. Entre os cinco anos e meio e os seis anos e meio, algumas crianças ainda apresentavam respostas de natureza arbitrária se bem que a maioria das crianças procurasse o valor cardinal para responder ao problema de identificação entre valores pares e ímpares. Embora pouco frequente, também foi observada a ocorrência de inferências de natureza serial, ou seja, a criança não agia de acordo com a compreensão sobre a natureza iterativa da série numérica, pelo contrário, ela partia do pressuposto de que a série numérica era sempre crescente, ou seja, se n era par $n+1$ deveria ser ímpar porque "*tinha mais*" (ibid., p. 192). Entre os seis anos e meio e os sete anos e meio, desaparecem as previsões de natureza arbitrária. As inferências de natureza cardinal

---

6 "*Pour la premiére recherche, il s'agit de prévoir la différence entre un terme désigné K et le successeur de son successeur S(Sk); pour la seconde, il faut découvrir l'alternance des nombres pairs et impairs, ou du moins, étant donné um nombre pair (ou impair), prévoir si son successeur est pair, etc. Nous désignerons ces recherches respectivement par Differences de deux et Pairs-et-impairs*" (Gréco, 1960, p. 158).

passam a ser as mais frequentes embora comecem também a ser observadas inferências de natureza iterativa, em percentagens bastante pequenas. Por volta dos oito anos de idade, a maioria das crianças (70%) utiliza as inferências iterativas,[7] o que permite compreender a alternância entre números pares e ímpares (ibid.).

Gréco confirmou, com efeito, que a inferência iterativa é, primeiramente, utilizada de forma implícita passando a ser interpretada, em situações complexas, como uma operação inferêncial, precisa. Na continuação das suas investigações, o mesmo autor considera que, após ter constituído uma colecção de *n* objectos, a criança deverá ser capaz de prever as propriedades de outras colecções resultantes da adição ou da subtracção de alguns elementos à colecção inicial. Os resultados demonstraram que, a partir dos quatro anos de idade e de forma intuitiva, "a utilização das inferência iterativas com carácter operatório reversível e composto ocorre, primeiramente, para operações aritméticas simples como 1+1=2" (ibid., p. 205).

Por outro lado, os resultados obtidos em estudos realizados sobre a comutatividade na adição levaram Gréco (1962) a aceitar a hipótese de que a estruturação da série numérica, ou seja, a coordenação entre a sucessão e a iteração numérica ocorre por fases. Em primeiro lugar, estruturam-se as quantidades de 1 a 7, seguido-se a série de 8 a 15 e as séries de 15 a 30 e de 30 em diante, tendo como factor relevante a magnitude numérica, ou seja, a criança não constrói as quantidades numéricas aleatoriamente, pelo contrário, a construção é ordenada e ocorre progressivamente a partir de séries de números mais pequenos para séries de números maiores, o que sugere, de acordo com o autor, a simultaneidade entre a cardinação e a ordenação numérica, já que não verificou a independência entre essas duas estruturas.

Gréco (1962) também salientou que, anteriormente ao domínio da noção de conservação das quantidades descontínuas, as crianças eram capazes de responder acertadamente quando se lhes perguntava se duas filas, com sete elementos cada, e em que uma delas estava mais alongada que a outra, tinham o mesmo número de elementos. No entanto, essas

7 "*Il est plausible d'admettre que, d'abord investie dans une simple procédure de construction pratique, l'itération est dégagée ensuite comme une sorte de loi empirique de succession, avant de s'organiser comme loi nécessaire, c'est-à-dire comme opération véritable, susceptible de compositions réversibles indéfiniment prolongées*" (Gréco, 1960, p. 203).

crianças respondiam incorrectamente se fosse feita a pergunta sobre se ambas as filas tinham a mesma quantidade. As crianças respondiam que as duas filas tinham o mesmo número, mas que havia "mais um" na fila mais alongada. Esse fenómeno foi denominado, pelo autor, por "*quotité*" o que corresponde à capacidade que a criança pré-operatória tem de determinar, através da contagem, o número exacto de elementos dispostos em duas filas com distribuição espacial diferenciada, embora não compreenda o facto de ambas as filas terem a mesma quantidade de elementos.

Para este autor, a criança não-conservadora é capaz de estabelecer a noção de equivalência numérica através da contagem mas não é capaz de estabelecer a noção de equivalência de quantidade, ou seja, a criança é capaz de conservar o número de elementos contados mas não a quantidade dos mesmos. Assim, o autor, interpreta a noção de *quotité* atribuindo-lhe "um certo estatuto cardinal, quase-numérico e não pseudo-numérico... o que significa que a noção de *quotité* possui certos aspectos fundamentais ao desenvolvimento do conceito de número" (ibid., p. 67).

O autor relata, ainda, alguns casos paradoxais quando existe conflito entre a informação retirada da contagem e a que é obtida através da intuição figural, em que a criança afirma, simultaneamente, a conservação e a não-conservação das quantidades descontínuas. Por exemplo, a criança é confrontada, primeiramente, com duas filas com sete e oito elementos alinhados em correspondência termo a termo, de modo a que a criança perceba, visualmente, a diferença entre ambas. Seguidamente, modifica-se a disposição espacial da segunda fila aproximando os oito elementos em relação uns aos outros, fazendo com que ocupe um espaço menor que o da primeira fila. Esta prova foi designada por prova de conservação da desigualdade numérica e os resultados obtidos demonstraram que houve uma percentagem significativa de crianças de, aproximadamente, seis anos de idade, que conservaram a desigualdade numérica mas não a igualdade numérica o que, para o autor, mostra que "a desigualdade numérica... resiste melhor às contra-sugestões apresentadas" (ibid., p. 63).

Deste modo, os estudos de Gréco sobre as inferências iterativas vão contra a hipótese formulada por Poincaré de que o conhecimento de $n+1$ é de natureza intuitiva, tendo ficado demonstrado que somente a partir dos seis ou sete anos de idade é que as crianças adquirem, gradualmente, essa compreensão. Além disso, os resultados obtidos sobre a comutatividade na adição reforçaram a tese de Piaget sobre a simultaneidade na construção das estruturas de classe, relação e número.

Outra questão levantada em relação à noção de conservação das quantidades numéricas, diz respeito à precocidade na sua construção. Bryant (1972) considera que, no período pré-operatório, as crianças podem compreender essa noção se as situações versarem sobre quantidades pequenas, ou seja, números menores ou iguais a quatro.

Outra autora, Siegel (1982) teve por objectivo determinar se a utilização da linguagem favorecia ou não a aquisição do conceito de número. Para isso, desenvolveu estudos que se basearam nas provas de magnitude e de equivalência numérica, uma vez que a crítica que fez aos trabalhos de Piaget incidiu sobre a definição de pré-operatório como um período de desenvolvimento cognitivo inferido a partir da ausência das características próprias ao estádio das operações concretas o que, em relação ao conceito de número, se traduz pela incapacidade que a criança pré-operatória apresenta de explicitar, verbalmente, as operações cognitivas tais como, a seriação, a conservação, a transitividade e a inclusão de classes.

O paradoxo apontado pela referida autora reside na necessidade que a criança tem, para resolver, com sucesso, os problemas de conservação numérica, de utilizar e compreender conceitos numéricos, que lhe são apresentados através de formas linguísticas complexas. Para ultrapassar esse problema metodológico, a autora utilizou métodos não-verbais na avaliação da noção de quantidade. Os resultados demonstraram que, para as crianças de três e quatro anos de idade, os indicadores verbais utilizados não facilitaram a emergência do conceito numérico. Por outro lado, também observou que as crianças de quatro anos, que resolviam com sucesso as questões apresentadas, não eram capazes de justificar correctamente as suas respostas, o que não significava, segundo a autora, que a criança pré-operatória não fosse mais competente, do ponto de vista lógico e numérico, do que as provas de avaliação de Piaget o faziam supôr.

Na sequência da polémica sobre a relação entre contagem e invariância numérica, Saxe (ibid.) delineou estudos transculturais sobre a aquisição do sistema de contagem pelas crianças Oksapmin, população de Papua na Nova Guiné e, crianças ocidentais, com o objectivo de testar a hipótese de que aquelas eram capazes de utilizar a contagem como uma estratégia mediadora nas tarefas de comparação e reprodução dos números antes da compreensão da noção de conservação numérica.

Os resultados dos estudos desenvolvidos por Saxe (ibid.), se bem que tenham evidenciado a aplicação da contagem como estratégia de resolução de problemas com quantidades superiores a cinco, em crianças pré-operatórias de culturas diferentes, não demonstraram a existência de relações significativas entre a contagem e a emergência da conservação numérica, ou seja, não era pelo facto das crianças serem capazes de contar correctamente e serem bem sucedidas na resolução de problemas aritméticos que compreendiam a noção de invariância numérica.

Continuando a investigar de que forma certas manipulações – como a disposição espacial dos elementos de cada fila, a forma de apresentação das instruções para a realização da tarefa ou a linguagem em que o problemas é apresentado – afectam os resultados de problemas de invariância numérica em crianças consideradas pré-operatórias, McGarrogle e Donaldson (1974) levantaram a hipótese de que as crianças, nas provas de conservação de Piaget, alteravam as suas respostas, da primeira para a segunda questão, por terem visto o experimentador executar, após a resposta da criança à primeira questão, alguns procedimentos e, consequentemente, terem raciocinado que o experimentador desejaria obter, da sua parte, uma resposta diferente já que tinha manipulado um dos conjuntos e feito outra pergunta. Desse modo, foram introduzidas alterações, consideradas acidentais, na disposição das duas filas de elementos. Assim, um ursinho brincalhão, manipulado às escondidas por um adulto, emergia de uma caixa e modificava a disposição dos elementos de uma das duas filas previamente ordenadas em correspondência termo a termo. Numa primeira fase, as crianças eram confrontadas com a tarefa de conservação clássica e, na segunda parte do estudo experimental, o ursinho provocava a transformação incidental e perguntava-se às crianças qual das duas filas tinha mais elementos. Os resultados mostraram que, na situação clássica de conservação numérica, somente uma minoria de crianças é que respondeu correctamente o que não se verificou na condição incidental onde a grande maioria respondeu correctamente.

Bovet, Parrat-Dayan e Deshusses-Addor (1981) e Parrat-Dayan e Bovet (1982) reagiram aos resultados encontrados por McGarrogle e Donaldson (1974), tendo repetido as experiências destes últimos autores, mas com uma inovação nas tarefas, ou seja, as crianças teriam que justificar as respostas dadas. Por outro lado e aproveitando a situação lúdica que caracterizava esse estudo, utilizaram-na para, indirectamente, apresentarem as contra-sugestões. Desse modo, a situação experimental decorreu em três fases: a) situação incidental sem pedido de justificação verbal, b) situação incidental com pedido de justificação verbal e c) situação clássica.

Os resultados obtidos nas referidas fases mostraram que a maioria das crianças, quando tinham que justificar verbalmente as respostas dadas, não mantinham as respostas do tipo conservador observadas na situação incidental sem pedido de justificação verbal. Assim, verificaram que na situação incidental sem pedido de justificação verbal, das trinta e nove crianças de quatro e cinco anos de idade, vinte e três responderam correctamente à questão sobre a conservação numérica confirmando, desse modo, os resultados encontrados por McGarrogle e Donaldson (1974). No entanto, na segunda situação experimental, em que era necessário justificar verbalmente a resposta dada, somente treze crianças o fizeram com sucesso, tendo mantido a resposta dada na situação incidental sem pedido de justificação. As restantes vinte e seis crianças, ou apresentavam respostas incorrectas ou eram inconsistentes. Na prova clássica de conservação, somente quatro crianças responderam correctamente, tendo resistido às contra-sugestões.

No prosseguimento dos estudos sobre a conservação numérica, Miller (1982) levantou a hipótese de que se as crianças fazem erros é porque são influenciadas pelos experimentadores, como já tinha sido sugerido McGarrogle e Donaldson (1974). Assim, hipotetizaram que se as manipulações ocorressem de forma natural – condição incidental – a tarefa tornar-se-ia muito mais acessível do que a apresentada na situação clássica. Deste modo, Miller (1982) comparou os resultados, na prova de conservação numérica, de dois grupos de crianças sujeitos a duas metodologias diferentes: a) a situação clássica em que as transformações eram provocadas pelo experimentador e, b) a situação incidental em que as transformações eram provocadas por acontecimentos que poderiam ocorrer no quotidiano das crianças.

Para o efeito, Miller (ibid.) fez corresponder, em duas filas, o mesmo número de insectos, cada um deles dentro de uma gaiola. Numa das filas, as portas das gaiolas abriam-se com relativa facilidade – condição natural – o que não ocorria na outra fila. Assim, após a criança ter respondido à questão sobre a igualdade das duas filas, os insectos, da condição natural, saíram e espalharam-se aleatoriamente sobre a mesa onde decorria a experiência. As crianças, quando confrontadas com a pergunta sobre a igualdade numérica de ambas as filas, não responderam conforme o previsto, ou seja, disseram que havia mais insectos sobre a mesa do que dentro das gaiolas.

Num outro estudo, cujo objectivo era comprovar, ou não, a mesma hipótese, Miller (ibid.), utilizou duas filas iguais de barcos, em correspondência termo a termo. Após as crianças terem confirmado a igualdade numérica entre as duas filas, a disposição espacial de uma delas, foi transformada, *naturalmente*, através de uma corrente de ar. Os resultados demonstraram que, em ambas as experiências, as crianças, na situação incidental, apresentaram quase tantas respostas correctas (42%) quanto as crianças da situação clássica de conservação (41%).

Deste modo, o autor mostrou que se as crianças não fossem distraídas por um brinquedo e se permanecessem atentas às transformações efectuadas não se observavam resultados a partir dos quais se pudesse inferir a precocidade da conservação numérica. Estas investigações levantaram uma enorme polémica uma vez que os resultados de McGarrogle e Donaldson (1974) e Miller (1982) eram contraditórios, os primeiros atribuindo às crianças uma precocidade em relação à invariância numérica, que não foi confirmada pelos estudos de Miller que obteve, por sua vez, resultados consonantes com os de Piaget, na prova clássica da conservação numérica.

Também Moore e Frye (1986), na continuação da questão sobre a precocidade da invariância numérica, defenderam o ponto de vista de que poderia ser suficiente, para explicar os resultados obtidos na condição incidental, a simples presença do ursinho, uma vez que as crianças ficariam distraídas e, por não terem prestado atenção às transformações efectuadas, durante o jogo, repetiam a resposta dada anteriormente à transformação. Para testar essa hipótese, replicaram a experiência de McGarrogle e Donaldson (1974) e introduziram uma nova condição experimental, onde um ursinho "brincalhão" adicionava uma conta a uma das filas sem modificar o comprimento da mesma.

Os resultados obtidos por Moore e Frye (1986) confirmaram a hipótese levantada, ou seja, as crianças não apresentaram diferenças de desempenho nas duas condições experimentais, ou seja, na condição incidental em que o ursinho transformava uma das filas tornando-a maior que a primeira e, na segunda condição experimental em que, mantendo o comprimento da fila, o ursinho acrescentava um elemento a uma das filas. Os autores concluíram que as crianças ficavam distraídas com a simples presença do ursinho e, independentemente do tamanho da fila ou do acréscimo de um elemento, a uma das filas, davam sempre a mesma resposta.

Mais recentemente, Bryant (1997) com o objectivo de demonstrar que as crianças pré-operatórias compreendiam o princípio da invariância numérica, desenvolveu alguns estudos baseados na prática de distribuição – "um p'ra ti, outro p'ra mim". Na primeira tarefa, a criança teria que distribuir, em partes iguais, 12 ou 24 "doces" por 2, 3 ou 4 bonecas. Numa outra tarefa, a criança também distribuía uma certa quantidade de doces, 18 ou 15 entre 3 bonecas e era ajudada pelo experimentador de modo a que os "erros" fossem ultrapassados. Após a realização da prova, o experimentador alinhava, em correspondência termo a termo, as três filas de doces e perguntava à criança, que podia utilizar a contagem, qual a quantidade numa das filas após o que e, sem contar, a criança deveria inferir qual a quantidade nas restantes duas filas. Os resultados demonstraram que a maioria das crianças de quatro anos, não tinha consciência da relação entre a equivalência numérica e a equivalência de quantidades, não sendo capazes de realizar a inferência de quantidades de um conjunto para outro.

De modo a ampliar a sua compreensão sobre o fenómeno da invariância numérica, o mesmo autor delineou um segundo estudo que anulava o efeito da compreensão baseada no princípio da correspondência termo a termo, "um p'ra ti, outro p'ra mim". Assim, a criança distribuiria doces, sendo que esses eram apresentados em quadrados simples (quadrados de plástico castanho apresentados unitariamente), duplos (dois quadrados ligados entre si e sem a possibilidade de poderem ser separados, pelas crianças) e triplos (três quadrados ligados entre si e sem a possibilidade de poderem ser separados pelas crianças). O autor verificou que as crianças de quatro anos de idade tendiam a responder numa base simples de correspondência termo a termo, sem terem levado em consideração as diferenças numéricas entre os quadrados simples, duplos e triplos, o que demonstrava, nessas crianças, a ausência de compreensão sobre esse princípio.

Num outro estudo (ibid., 1997), com blocos de diferentes cores que acentuavam a desigualdade entre os quadrados a distribuir, as crianças de quatro e cinco anos de idade, do grupo experimental, após terem recebido treino sobre a relação entre a equivalência quantitativa e a equivalência numérica, foram capazes de generalizar esse conhecimento, no pós-teste, onde as cores que realçavam as desigualdades numéricas não estavam presentes, o que não ocorreu com o grupo controlo. O autor conclui que as crianças de cinco anos apresentavam conhecimento do princípio de correspondência termo a termo, pelo menos em actividades de carácter temporal, apresentadas como actividades de partilha, "um p'ra ti outro p'ra mim" e que as de quatro anos eram capazes de incorporar as informações numéricas obtidas a essas actividades.

No entanto, Piaget e Szeminska (1975) já tinham referido que, para que ocorresse uma verdadeira compreensão sobre as transformações numéricas a criança deveria possuir a noção de que há números maiores que são compostos por números menores e de que diferentes combinações de números podem resultar na mesma quantidade final, o que constitui um aspecto essencial do pensamento aritmético.

Como conclusão do estudo acima referido, os autores defendem o ponto de vista de que as crianças em idade pré-escolar possuem, em geral, um conhecimento conceptual precário subjacente aos procedimentos aritméticos e que o facto dessas crianças resolverem problemas de adição e de subtracção com pequenos números ocorre porque possuem capacidades perceptivas relacionadas com essas quantidades, o que não caracteriza um raciocínio aritmético verdadeiramente lógico, uma vez que não está presente a reversibilidade de pensamento.

Em suma, se bem que haja indicações de que as crianças entre os três e os seis anos de idade apresentam capacidades de resolução de problemas com pequenos números e, se não tiverem que apresentar justificações verbais poderão dar respostas que sugerem a presença da noção de invariância numérica (McGarrogle e Donaldson, 1974; Siegel, 1982), essa noção não foi, com efeito, utilizada de forma sistemática em todas as situações transformacionais realizadas (Bryant, 1972) nem em todas as tarefas executadas por crianças de culturas diferentes da ocidental (Saxe, 1981).

Por outro lado, a utilização da condição incidental, na prova de conservação numérica (McGarrogle e Donaldson, 1974), não parece ser a condição metodológica indicada para estudar esse problema, uma vez que perante os pedidos de justificação verbal (Bovet, Parrat-Dayan e Deshusses-Addor, 1981; Parrat-Dayan e Bovet, 1982), as crianças não mantém os resultados obtidos na situação incidental, sem justificação. Além disso, se bem que os resultados obtidos por McGarrogle e Donaldson

(1974) tenham sido justificados através da confirmação da hipótese de que as crianças alteravam as suas respostas por influência indirecta do experimentador, verificou-se, no entanto, que as transformações, na condição natural, não facilitavam os juízos efectuados na prova de conservação numérica, o que se opunha não só aos resultados obtidos através das transformações incidentais (Miller, 1982), como também em relação ao facto das crianças não terem apresentado resultados diferentes na alteração da configuração perceptiva de uma das filas e na adição de um elemento a uma dessas filas (Moore e Frye, 1986).

Por último, Bryant (1997) chama a atenção para o facto de que a apresentação de respostas classificadas como de conservação numérica ocorre somente em crianças de idade pré-escolar, em tarefas com características temporais.

Deste modo, somos levados a concluir que o conhecimento conceptual subjacente ao desenvolvimento da noção de número é um tema bastante complexo que implica domínio e originalidade metodológica para prosseguir as investigações com a qualidade e a inovação demonstradas desde que Piaget e Szeminska (1975) se propuseram estudar esta problemática por meio de uma metodologia rigorosa e original, cujos resultados têm influenciado mundialmente a forma como se olha para o desenvolvimento cognitivo da criança, tanto do ponto de vista da investigação quanto da escolarização.

Seguidamente, apresentaremos o modelo inatista de Rachel Gelman sobre o desenvolvimento do conceito de número que contribuiu para a renovação e ampliação da interpretação construtivista nesse domínio, sendo, o desempenho do sujeito em situação de resolução de problemas verbais de natureza aritmética que implica a utilização da contagem, o ponto fulcral da análise explicativa sobre o raciocínio aritmético em crianças pré-operatórias.

O modelo inatista de Rachel Gelman

O modelo de contagem de R. Gelman ilustra a posição inatista cuja ideia central, em oposição ao modelo construtivista de J. Piaget, é a de que os seres humanos nascem com os mecanismos necessários ao desenvolvimento do conceito de número e apresentam, desde bastante cedo, um conhecimento implícito sobre as regras de contagem, o que de certo modo revela, desde logo, algum conhecimento conceptual sobre as noções numéricas.

Gelman (1972a), baseada em dados experimentais, pretendeu explicar a construção dos conceitos numéricos. Para isso, desenvolveu um modelo cuja ideia principal é a de que a criança progride no desenvolvimento das noções numéricas através da utilização da contagem. Gelman considera que as crianças aprendem os pequenos números e generalizam esse conhecimento para os números maiores, e que tal facto se relaciona com a capacidade que a criança apresenta de reconhecer a equivalência numérica entre diferentes conjuntos. Essa capacidade depende de factores perceptivos capazes de descodificar as semelhanças dentro e entre os conjuntos bem como de identificar a cardinalidade dos mesmos em termos absolutos. Através de diversas investigações, a autora verificou que a contagem, apresentada espontaneamente pela criança, é o comportamento mais frequente na realização dessas tarefas, o que a alertou para o papel que esse procedimento deveria exercer no modo como as crianças pequenas pensam o número.

Deste modo, Gelman (1972b) parte da hipótese de que as crianças pré-operatórias não apresentam deficiências qualitativas do ponto de vista cognitivo, distinguindo-se das crianças operatórias somente no que se refere ao grau de experiência. Assim, considera que crianças, de diferentes idades, compartilham a mesma estrutura básica no desenvolvimento do conhecimento numérico e fundamenta, nesse princípio, a hipótese de que aquelas, já desde os 3 anos de idade, utilizam a contagem para efectuarem uma estimativa de pequenas quantidades numéricas.

Os resultados encontrados, pela autora, levaram-na a concluir que as crianças pré-operatórias eram capazes de tratar os pequenos números como invariantes "a criança, antes de atingir o período das operações concretas, demonstra possuir um sistema lógico que lhe permite manipular quantidades numéricas. No entanto, ainda não se sabe bem até que ponto é que essa capacidade poderá influenciar a criança no que se refere ao desenvolvimento das capacidades numéricas complexas" (ibid., p. 89).

Em relação à representação das quantidades numéricas, a autora defende o ponto de vista de que a contagem é fundamentada em princípios e que no decurso do desenvolvimento cognitivo as crianças necessitam de coordenar a aplicação de todos eles para que esse procedimento ocorra de forma correcta.

De acordo com os resultados dos estudos empíricos efectuados (Gelman e Gallistel, 1978) foram isolados cinco princípios: os três primeiros – o princípio de correspondência termo a termo, o princípio de estabilidade da contagem e o princípio cardinal – relacionam-se com as regras do procedimento da contagem (*how-to-count* principles); o quarto princípio – o princípio de abstracção – define a possibilidade de aplicação da contagem a colecções particulares, ou por outras palavras, define o que é passível de ser contado relacionando-se, o último princípio, com a irrelevância na ordem de contagem.[8]

Os autores acima citados reconhecem, ainda, que as crianças não dominam, no início da contagem, a aplicação de todos os princípios referidos nem de todos os processos que os constituem. No entanto, consideram que "a competência parcial na aplicação dos princípios de contagem e a observação de algumas dificuldades na coordenação dos mesmos, não tem o mesmo significado que uma ausência total de capacidades" (ibid., p. 74).

Apresentaremos, seguidamente, a definição e a sequência de cada um dos cinco princípios bem como os erros que as crianças poderão cometer, por não os dominarem, inteiramente, do ponto de vista conceptual.

O princípio de correspondência termo a termo define que cada elemento, de uma dada série numérica, deverá ser denominado por um e um único numeral, que não poderá ser atribuído a nenhum outro dos elementos da série, pelo que se estabelece uma relação bi-unívoca entre esse elemento e a designação verbal correspondente. Para aplicar este princípio, a criança deverá coordenar simultaneamente dois processos – a partição e a atribuição de designações numéricas numa ordem fixa, convencionada (ibid.).

Os autores acima referem ainda que, em relação ao processo de partição, a criança deverá ser capaz de distinguir entre os elementos que já foram contados e os que falta contar. No que se refere ao processo de atribuição das diversas designações numéricas, enunciadas numa ordem

8 "*The first three principles deal with rules of procedure, or how-to-count; the fourth with the definition of countables, or what to count. The final principle involves a composite of features of the other four principles*" (Gelman e Gallistel, 1978, p. 77).

fixa convencional, o indivíduo deverá ter tido acesso a esse instrumento cultural, de modo a poder utilizá-lo, de forma apropriada, não só do ponto de vista da emissão das alocuções verbais como também do ritmo que se estabelece entre o apontar e o verbalizar a sequência numérica evitando erros comuns tais como: incluir, mais que uma vez, o mesmo elemento, ou omiti-lo ou ainda atribuir, a dois elementos distintos, a mesma designação numérica. A presença destes tipos de erros demonstra algumas dificuldades em coordenar integralmente os dois processos referidos atrás.

Em decorrência do princípio apresentado anteriormente e para que a contagem progrida de forma bem sucedida, é necessária a aplicação, em coordenação com o primeiro, de um segundo princípio – o de estabilidade da ordem. Desse modo, "a criança não atribuirá de forma aleatória as designações numéricas aos elementos da série devendo obedecer, a sua utilização, a uma ordem estável portanto, repetível. Este princípio requer a disponibilidade de uma lista fixa de numerais que deverá ser pelo menos tão longa quanto o número de elementos a contar" (ibid., p. 79). Para estes autores, as dificuldades decorrentes da aplicação deste princípio relacionam-se, como a sua designação indica, com os limites mnésicos que as crianças pequenas apresentam ao reproduzir, com rigor, as designações verbais na ordem culturalmente estabelecida.

Para que no final do processo de contagem se saiba qual a quantidade de elementos, num dado conjunto, a designação numérica do último elemento assume um papel principal, ou seja, designa a cardinalidade do conjunto. Uma vez que "o princípio cardinal pressupõe a ocorrência dos dois princípios designados atrás, aparece, mais tarde, no desenvolvimento da criança" (ibid., p. 80). Para os autores, a não compreensão deste último princípio fará com que a criança não responda à questão sobre a quantidade total de elementos numa dada série numérica, recontando-a sempre que a mesma é levantada. Deste modo, os autores levantaram a hipótese de que o desenvolvimento do princípio cardinal passa por três estádios: inicialmente a criança deverá repetir, após a contagem de todos os elementos, a última designação numérica da série; em segundo lugar verificará que, no decorrer das diversas contagens, a designação numérica verbalizada em último lugar foi sempre a mesma e, finalmente, uma vez que alcançou a compreensão sobre a invariância das quantidades numéricas, poderá confiar na correspondência termo a termo, para responder a questões de identidade numérica, não necessitando de utilizar a contagem sempre que um problema dessa natureza lhe é apresentado.

O quarto princípio, ou princípio de abstracção indica que a contagem pode ser aplicada a qualquer colecção, real ou imaginária, de objectos homogéneos ou heterogéneos.[9] Assim, para que a aplicação deste princípio seja possível é necessário que todos os elementos da colecção a contar entrem na categoria comum de *coisas a contar*. "O princípio de abstracção refere que o procedimento de contagem poderá ser aplicado a *qualquer* colecção de elementos físicos ou não" (ibid., p. 80). As dificuldades na aplicação deste princípio relacionam-se com o facto de crianças, com diferentes idades, não considerarem todas as categorias de objectos sujeitas à aplicação do procedimento de contagem.

O último princípio, o de irrelevância da ordem de contagem, interrelaciona-se com todos os anteriores e refere que as consequências não são negativas se se designar, em ordem vicariante, os elementos da série (ibid., p. 80).[10]

Para os autores, o desenvolvimento do conceito de número passaria ainda por uma última etapa em que as crianças não necessitariam de utilizar o procedimento de contagem para obterem representações numéricas complexas e adequadas. "Somente quando a criança se liberta do procedimento de contagem é que se estabelecem as condições necessárias para a emergência do pensamento algébrico ou para a compreensão do princípio da identidade numérica" (ibid., p. 240).

---

9 Em relação ao princípio de abstracção, Gelman e Gallistel (1978) verificaram que, em geral, as crianças de três e quatro anos de idade consideravam duas colecções de elementos como numericamente equivalentes mesmo se contivessem elementos heterogéneos. Esses resultados sugeriram que, pelo menos desde os três anos de idade, as crianças apresentam capacidade para determinar a quantidade numérica de uma colecção sem a necessidade de considerarem os diferentes níveis da estrutura hierárquica de classificação, uma vez que consideram os elementos heterogéneos pertencentes à classe geral de *coisas a contar*.

10 "*The child who does appreciate the irrelevance of the order of enumeration can be said to hnow, consciously or unconsciousl, the following facts: 1) that a counted item is a thing rather than a one or a two (the abstraction principle); 2) that the verbal tag are arbitrarily and temporarily assigned to objects and do not adhere to those objects once the count is over; and most importantly, 3) that the same cardinal number results regardless of the order of enumeration In general, the order-irrelevance principle concerns the fact that much about counting is arbitrary*" (Gelman e Gallistel, 1978, p.82).

Para demonstrar que as crianças pré-operatórias possuem um conhecimento implícito acerca dos princípios de contagem mas que, em muitos casos, são incapazes de os explicitar, Gelman e Meck (1983) delinearam três estudos experimentais com o objectivo de sustentarem a hipótese de que os erros que as crianças cometem, entre os três e os cinco anos de idade, não são devidos à ausência desses princípios. Para isso, as crianças observaram um boneco a contar e diziam ao experimentador se o boneco tinha contado bem ou não. Esses estudos focalizaram-se no princípio de correspondência termo a termo, no princípio de estabilidade da ordem de contagem e no princípio cardinal.

Os resultados demonstraram que as crianças de três e quatro anos de idade identificavam todos os erros de contagem relacionados com o princípio de correspondência termo a termo. Quando as crianças tiveram que explicitar o tipo de erro cometido pelo boneco foram capazes de descrever o que esse tinha feito mas não explicaram porquê. Gelman e Meck (ibid.) concluíram que as crianças, entre os três e os quatro anos de idade, quando não contavam verbalmente, podiam reconhecer quais os erros relacionados com o princípio de correspondência termo a termo, mesmo para conjuntos com números grandes incluindo-se, nessa capacidade, quantidades numéricas que ainda não contavam com precisão.

Em relação ao tipo de erros cometidos, quando eram as crianças a contar, foi observado que alguns elementos da série podiam ser contados mais que uma vez. Por outro lado, também foi observada a contagem correcta de uma série de elementos e a recontagem dos mesmos com a verbalização das denominações numéricas subsequentes. A explicação dada para essa tipologia de erros relaciona-se, segundo os autores, com a incompreensão da noção de decomposição numérica e/ou com a dificuldade em coordenar a emissão verbal de uma dada designação numérica com a selecção de um e um só elemento da colecção.

No estudo sobre a compreensão implícita da estabilidade da ordem de contagem, os mesmos autores testaram se as crianças entre os três e os cinco anos de idade eram capazes de detectar os seguintes tipos de erros: a reversibilidade verbal de dois elementos numa lista convencionalmente ordenada; a ordenação aleatória de uma lista e, ainda, a não inclusão de uma ou mais denominações numéricas numa lista convencional (ibid.). Os resultados obtidos indicaram que todas as crianças foram capazes de reconhecer a utilização correcta de uma lista convencional de denominações numéricas e também foram capazes de identificar o tipo de erros numa lista convencional, sendo que as crianças de três anos (40%) apresentavam dificuldades na identificação dos erros quando, uma ou mais denominações não foram incluídas na lista convencional. No entanto, 80% das crianças, dessa faixa etária, identificaram a ocorrência de um par de denominações verbais e 90% identificaram os erros da lista aleatória. As crianças de quatro anos identificaram todos os erros relacionados com as denominações verbais da lista aleatória.

Além disso, Gelman e Meck (ibid.), também não encontraram qualquer relação com a dimensão dos conjuntos, levantando a hipótese de que os erros de contagem, cometidos por crianças de três anos, relacionam-se mais com os excessos de processamento na memória activa da criança do que com a falta de compreensão acerca dos princípios implícitos à contagem.[11]

Em relação ao conhecimento implícito sobre o princípio da cardinalidade bem como sobre algumas das dificuldades em explicitar a compreensão do mesmo, os referidos autores (ibid.), pediram às crianças que indicassem se o boneco, utilizado na investigação, dava a resposta correcta à questão, "*Quantos tem?*", tendo, as crianças, sido encorajadas a sugerir ao boneco qual a resposta correcta. Os resultados demonstraram que detectar as respostas incorrectas, dadas pelo boneco, foi uma tarefa muito fácil para todas as crianças, tendo as de três anos identificado, acertadamente, 85% das mesmas e dado, como alternativa, uma percentagem bastante elevada de respostas correctas (96%).

Em suma, o modelo de desenvolvimento do conceito de número apresentado por Gelman pressupõe que os seres humanos estão preparados, desde bastante cedo, para aprender e descodificar regras implícitas ao conhecimento matemático sendo, a observação do desempenho de outras pessoas, um processo adequado no sentido de melhorar o desempenho, das crianças em idade pré-escolar, nos procedimentos aritméticos. A autora, salienta, também, que a capacidade de contagem reflecte o domínio dos cinco princípios havendo uma ordenação na aplicação dos mesmos.

11 Gelman e Gallistel (1978) também verificaram que algumas das crianças, de três e quatro anos de idade, utilizavam listas idiossincráticas de denominações verbais, e que uma ou outra criança de quatro e cinco anos de idade, aplicavam a lista convencional para as primeiras denominações (1 a 3), passando a utilizar a lista idiossincrática para as quantidades de 4 a 19, tendo determinado uma relação entre o tamanho da colecção a contar e a aplicação de listas idiossincráticas.

Deste modo, o modelo de Gelman propõe que é pela contagem que a criança é capaz de raciocinar sobre os diferentes valores de natureza numérica fazendo, permanentemente, a actualização desse conhecimento já que a contagem não é interpretada como uma tarefa automatizada mas, ao contrário, dirigida por uma compreensão conceptual sobre esse procedimento (Greeno, Riley e Gelman, 1984).

Em relação aos erros que as crianças cometem, durante a resolução de problemas verbais de aritmética elementar, Greeno, Riley e Gelman (ibid.) defendem que essas respostas menos adequadas não põem em causa o conhecimento conceptual que possuem, mas são a consequência de algumas dificuldades em operacionalizar dois tipos de competências, procedimento e utilização, ou seja, dificuldades em coordenar a capacidade de planear e controlar as condições presentes na realização da tarefa – compreensão sobre os princípios gerais das acções a desenvolver – e os vários objectivos que englobam as diversas relações entre os requisitos necessários para a execução da tarefa e o contexto em que esta se desenvolve.

Este modelo, se bem que inovador, não deixa de estar sujeito a críticas sendo uma delas a de que a solução poderia ocorrer através de estratégias perceptivas ou numéricas (Klahr e Wallace, 1973; Antell e Keating, 1983) e não necessariamente na aplicação do princípio de invariância numérica. Por outro lado, as transformações metodológicas efectuadas por Gelman, em relação ao estudo da invariância numérica, não obedecem aos critérios estabelecidos por Piaget e Szeminska (1975), o que levanta a questão de se esse modelo de contagem estuda, de facto, a questão da conservação numérica.

Na continuidade dos trabalhos desenvolvidos por Gelman e Gallistel (1978), e de modo a estudar a capacidade de generalização da contagem e a noção de cardinalidade, Wynn (1990) investigou o desempenho de crianças de dois anos e meio, de três anos e de três anos e meio, de classe média, em situações de contagem em contexto familiar e não familiar.

Os resultados, do referido trabalho de Wynn, mostraram que as crianças mais novas utilizavam uma lista de contagem idiossincrática que aplicavam com bastante regularidade embora, quanto maior fosse a novidade, trazida pela situação experimental, mais dificuldades tinha a criança na aplicação desse procedimento. Para as mais velhas, a diferença entre o desempenho na utilização dos pequenos e dos grandes números era menor do que para as crianças mais novas e, mesmo que elas tivessem adquirido um procedimento de contagem que incluísse a generalização, o sucesso era menor em situações não familiares. Com a prática, a contagem melhorava significativamente mesmo para as crianças com dois anos e meio que passavam a ser capazes de contar até em situações que não continham objectos para serem manipulados.

Por outro lado, a análise individual do desempenho das crianças revelou uma certa consistência sugerindo à autora que a noção de cardinalidade está presente no desenvolvimento infantil, aproximadamente a partir dos três anos e meio de idade, para valores numéricos até 3 ou 4 que, progressivamente, é generalizado às restantes quantidades, através da contagem.

Ainda e com o objectivo de aprofundar o conhecimento que as crianças muito pequenas têm sobre quantidades numéricas, Wynn (1992b) delineou uma experiência com bebés de modo a verificar, ou não, se eles eram capazes de calcular o resultado preciso de operações simples de aritmética e concluiu que bebés de cinco meses, em média, eram capazes de discriminar entre pequenas quantidades numéricas. A autora interpretou os resultados obtidos como uma demonstração de que estes reconhecem que a adição e a subtracção resulta da transformação de um número inicial de elementos e concluiu que eles eram capazes de encontrar resultados precisos de adições e de subtracções simples.

Os resultados obtidos por Wynn, levantam questões sobre se a capacidade inicial que os seres humanos apresentam para perceber pequenas transformações numéricas ocorre através de um processo denominado por *subitizing*, de natureza fundamentalmente perceptiva – que apresentaremos após a discussão que iniciamos sobre os limites do modelo de Gelman – ou se trata, por outro lado, de competências numéricas de natureza conceptual e que são adquiridas fundamentalmente em interacção social (Kamii, 1986; Fuson, 1988; Morgado, 1988; Nunes, Schliemann e Carraher, 1993; Nunes e Bryant, 1996; Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1997, entre outros), através de um duplo acto de abstracção (Piaget e Szeminska, 1975; Von Glasersfeld, 1981; Kamii e Housman, 2000; Bideaud, 2001, entre outros).

Considerações finais

Assim, e de acordo com os autores citados ao longo deste trabalho, independentemente de apresentarem evidências que reforçam a posição inatista ou a construtivista da aprendizagem, podemos aceitar que as crianças, muito antes de compreenderem a noção de conservação das quantidades numéricas, são capazes de resolver problemas aritméticos que incluem transformações numéricas, de pequenas quantidades.

No entanto, embora os estudos sobre a utilização de estratégias informais de contagem, por crianças no início da escolarização formal, tenham sido incorporados no processo ensino/aprendizagem das primeiras operações aritméticas, subsistem dúvidas quanto ao melhor momento e que método(s) utilizar com o objectivo de desenvolver a aquisição do sistema numérico especificamente no que se refere à utilização de símbolos numéricos e à introdução de expressões algorítmicas, tais como, '7+3=10' (Carruthers e Worthington, 2004), problema que já se arrasta desde que Stone, em 1913, refere que a aritmética tem um valor prático e cultural, critério esse que deveria fundamentar, segundo o autor, os métodos de ensino da aritmética, não deixando de ter em atenção os conhecimentos e os métodos informais da criança, quando do seu ingresso no sistema escolar.

De facto, o construtivismo piagetianiano postula a hipótese de que o progresso do conhecimento não ocorre através da simples adição de informação, assentando, basicamente, na existência de um processo dinâmico que resulta de diversas reestruturações cognitivas com vista a uma melhor reequilibração entre os vários esquemas do sujeito, sendo os processos de argumentação e de contra-argumentação um meio facilitador que visa conduzir à emergência de novas e adequadas soluções para os problemas e que se repercute na reestruturação dos processos cognitivos dos sujeitos, posição esta que contraria, na sua essência, a hipótese inatista do conhecimento.

Também Vilette (2002), ao estudar a relação de inversão entre as operações de adição e de subtracção de pequenas quantidades, referente a eventos possíveis e impossíveis, apresenta evidências de que as crianças entre os 4 e os 5 anos de idade, ao serem testadas em associações numéricas tais como, '2+1'; '3-1' e, na relação de inversão '2+1-1', são capazes de explicitar essa relação, o que já não foi observado, pelos mesmos autores, em crianças entre os 2 e 4 anos de idade. De modo a avaliarem o efeito do treino em combinar e separar pequenos conjuntos de objectos, sem utilizar a contagem, os autores desenvolveram um estudo com crianças entre os 3 e os 4 anos de idade e concluíram que as crianças pequenas ao responderem a problemas de inversão fazem-no não na base das representações numéricas mas sim de acordo com o pressuposto da representação do objecto.

Ora segundo Piaget (1972a), a compreensão de um problema ocorre em função das estruturas lógicas inerentes ao sujeito, obedecendo a construção das mesmas a sequências invariáveis e hierarquizadas. Para este autor, as estruturas operatórias não são inatas mas construídas a partir de estruturas menos complexas que, por processos de abstracção reflexiva, estão sujeitas a reorganizações e reconstruções múltiplas que as projectam para um nível cognitivo superior, posição esta que, do nosso ponto de vista, não contraria a hipótese que defende, no ser humano, a organização mental das associações numéricas referentes às primeiras operações aritméticas (Dagenbach e McCloskey, 1992).

Corroborando esta hipótese, também Ferreira (2003) defende que a criança, entre os 5 e os 6 anos de idade, ao integrar activamente uma díada implicada no processo de resolução de problemas e de se gerar, quando em dissonância com o companheiro(a) de trabalho, uma rede complexa de argumentações e de contra-argumentações, constrói estruturas de pensamento bastante elaboradas, de que resulta um maior progresso cognitivo permitindo-lhe atingir, rapidamente, o período das operações concretas. Assim, pelo facto das crianças confrontarem as suas respostas, muitas vezes incorrectas, com as dos seus companheiros, obriga-as a adequar as suas estratégias de maneira a obterem maior sucesso na resolução dos problemas propostos.

Deste modo, aceitamos que o desenvolvimento do conhecimento deverá incluir, por parte do sujeito, a capacidade de construir procedimentos adequados à resolução dos problemas em questão, podendo ser ajudado, pelos seus pares.[12]

De facto, Piaget (1995) postulou que pela necessidade que a criança desenvolve, quando trabalha em interacção com outro colega, de compreender o conjunto de estratégias utilizadas na resolução de problemas, bem como pelo facto deste lhe chamar a atenção para diversos aspectos do mesmo, até aí por ela ignorados induz, por um lado, a criança a tornar o seu pensamento cada vez mais explícito e, por outro, a confrontar as suas acções com as do seu companheiro. A consequência deste processo é

---

12 Neste sentido, o processo de ensino baseado na imitação de modelos correctos de resolução de problemas, propostos pelo professor, não era para Piaget (1972b), um apoio ao desenvolvimento cognitivo, uma vez que não oferecia ao sujeito uma das condições necessárias ao desenvolvimento psicogenético, a saber, a cooperação entre iguais (Piaget, 1995).

a tomada de consciência dos dados e das estratégias utilizadas durante o processo de resolução do problema. Logo, o sujeito de nível pré-operatório, por via do conflito sócio-cognitivo resultante do confronto de pontos de vista, é levado a construir as operações concretas cuja característica dominante é a reversibilidade, que se manifesta na compreensão da relação de inversão entre as operações aritméticas de adição e de subtracção.

Com efeito, a posição construtivista de Jean Piaget (1981), defende a interdependência entre o desenvolvimento cognitivo e a capacidade dos sujeitos em coordenarem diferentes pontos de vista o que, consequentemente, conduzirá a um progresso na utilização de procedimentos cada vez mais adaptados aos problemas em causa e cujo efeito principal será o desenvolvimento do pensamento reversível (Ferreira, 2003).

De facto, de acordo com o construtivismo de Piaget, o factor social é fundamental no desenvolvimento da inteligência, uma vez que permite a troca de ideias, os confrontos e a coordenação das acções entre os parceiros, de modo a atingirem uma solução aceitável por todos, sem que nenhum deles se sobreponha ao outro, porque se vêem como iguais por razões relacionadas, não só com a resolução do problema em causa, como também com o meio social onde se inserem.

Na verdade, a criança que não estiver inserida num ambiente de cooperação e de comunicação interpessoal e recíproca entre iguais, tenderá a memorizar os procedimentos e as regras de resolução dos problemas apresentados, não desenvolvendo, por conseguinte, a compreensão conceptual sobre os princípios subjacentes aos mesmos como, por exemplo, a relação de inversão, factor indispensável ao desenvolvimento do pensamento lógico que, por não se tratar de um dado inato é construído, progressivamente, através das múltiplas interacções de natureza inter e intrapessoal, desenvolvidas pelo indivíduo[13] (Piaget, 1995).

Assim, o envolvimento social da criança com os seus companheiros na resolução de novos problemas poderá ser, do nosso ponto de vista, um procedimento eficaz, uma vez que o conflito de centrações permitirá às crianças progredir, não só em relação ao desenvolvimento da inteligência lógica, como também no que se refere ao desenvolvimento da capacidade

13 A partir dos nossos resultados podemos aceitar a posição de Piaget quando este sugere que as crianças obterão melhores resultados escolares se o ambiente de trabalho for de cooperação, de liberdade, de questionamento e, acima de tudo, de tolerância em relação ao ritmo de aprendizagem de cada um (Piaget, 1972b).

de relacionamento interpessoal, transformando o egocentrismo infantil em descentração do pensamento – característica fundamental do processo de cooperação – cujo objectivo último é, segundo Piaget (1979), a tomada de consciência, tanto do ponto de vista cognitivo quanto moral.

Com esta finalidade, as metodologias de natureza predominantemente construtivista, utilizadas no desenvolvimento das competências aritméticas, parecem-nos ser bastante adequadas (Ferreira, 2003), por exigirem a necessidade da explicitação das estratégias utilizadas na resolução de problemas e, consequentemente, a consistência na argumentação e contra-argumentação lógicas sobre as relações conceptuais entre as mesmas o que implica, também, a necessidade de criação de condições, que deverão passar também pelo apoio individual (Tilton, 1947; Bidarra e Festas, 2005), de modo a contribuírem para a promoção de interacções de natureza sócio-cognitiva, o que influencia o desenvolvimento da independência, da auto-confiança e da capacidade de generalização, face à resolução de novos problemas, por permitir a invenção de novas relações de natureza lógico-matemática.

Por outro lado, tem sido considerado revelante, no que se refere ao desenvolvimento cognitivo da criança, a capacidade que esta apresenta de atribuir significado às actividades lúdicas que desenvolve em contexto ensino-aprendizagem (Pahl e Rowsell, 2005) e cujas representações incluem desenhos (Anning e Ring, 2004) gráficos e outros sistemas informais (Worthington e Carruthers, 2003; Carruthers e Worthington, 2005), não deixam de gerar questões sobre a transposição dos sistemas informais para formais, como por exemplo, a escrita numérica (Worthington 2007), existindo um consenso de que as crianças constroem significados relevantes já a partir das suas representações informais dos problemas (Kamii, 1986; 2000) que se apoia, segundo a nossa interpretação, na capacidade que a criança apresenta, já desde tenra idade, de ser capaz de prever de acordo com a sua experiência, e não baseada num fenómeno de tudo ou nada.

Por fim, não podemos deixar de continuar a perguntar se as capacidades aritméticas iniciais, no ser humano, são de natureza inata, ou se o processo de desenvolvimento das representações numéricas se baseia numa construção demorada e complexa, essencialmente de natureza ontogenética.

Perante este desafio, levantamos a necessidade de acompanhar o desenvolvimento cognitivo das crianças, pelo menos, ao longo de todo o período escolar que corresponde ao primeiro ciclo do ensino básico, de modo a podermos observar e identificar as diversas transições porque passa a construção, não só das operações de adição e de subtração mas também de multiplicação e de divisão, em contextos de aprendizagem, tanto informais quanto formais.

Referências

ANTELL, S. E. e KEATING, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, n. 54, pp. 695-701.

ANNING, A. e RING, K. (2004). *Making sense of children's drawings*. Maidenhead, Open University Press.

BIDARRA, M.G. e FESTAS, M. I. (2005). Construtivismo(s): implicações e interpretações educativas. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, v. 39, n. 2, pp. 177-195.

BIDEAUD, J. (2001). "Constructivismes, développement cognitif et apprentissages numériques". In : DUCRET, J-J. (ed.). *Actas do Colóquio Constructivismes: Usages et perspectives en éducation: v. I.* Genebra, Service de la Recherche en Éducation. SPRED, pp. 53-63.

BRAINERD, C. J. (1973). The origins of number concepts. *Scientific American*, n. 22, pp. 101-109.

BRYANT, P. (1972). The understanding of invariance by very young children. *Canadian Journal of Psychology*, n. 26, pp. 78-96.

______(1997). Mathematical understanding in the nursery school years. In: NUNES, T. e BRYANT, P. (eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. Hove, Psychology Press.

BOVET, M. ; PARRAT-DAYAN, S. e DESHUSSES-ADDOR, D. (1981). Peut-on parler de precocité et de régression dans la conservation? I Précocité. *Archives de Psychologie*, n. 49, pp. 289-303.

CARRUTHERS, E. e WORTHINGTON, M. (2005). Making sense of mathematical graphics: the development of understanding abstract symbolism. *European Early Childhood Research Journal*, v.13, n. 1, pp. 57-79.

COMBÈS, M. (1971). *Fondements des mathématiques*. Paris, PUF.

DAGENBACH, D. e McCLOSKEY, M. (1992). The organization of arithmetic facts in memory: Evidence from a brain-damaged patient. *Brain and Cognition*, v. 20, Issue 2, pp. 345-366.

FERREIRA, M. C. R. (2003). *Análise das estratégias de resolução de problemas de estrutura aditiva em crianças de 5/6 anos de idade*. Tese de doutorado em Psicologia. Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação. Coimbra, Universidade de Coimbra.

FUSON, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Nova York, Springer-Verlag.

GELMAN, R. (1972a). "The nature and development of early number concepts". In: REESE, H.W. (ed.). *Advance in child development and behaviour*. Nova York, Academic Press.

______(1972b). Logical capacity of very young children: Number invariance rules. *Child Development*, n. 43, pp. 75-90.

______(1978). "Counting in the preschooler: What does and does not develop". In: SIEGLER, R. (ed.). *Children's thinking: what develops?* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.

GELMAN, R. e GALLISTEL, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA, Harvard University Press.

GELMAN, R. e MECK, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition*, n. 13, pp. 343-359.

GRÉCO, P. (1960). "Recherches sur quelques formes d'inferences arithmétiques et sur la comprehension de l'iteration numerique chez l'enfant". In : GRECO, P.; GRIZE, J.B.; PAPERT S. e PIAGET J. (eds.). *Problèmes de la construction du nombre*. Paris, PUF.

______(1962). "Quantité et quotité, nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles". In: GRECO, P. e MORF, A. (eds.). *Structures numériques élémentaires*. Paris, PUF.

GRENO, J. G.; RILEY, M. S. e GELMAN, R. (1984). Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology*, n. 16, pp. 94-143.

JAMES, G. e JAMES, R. C. (1976). *Mathematics dictionary*. Nova York, Van Nostrand Reinhold Company (1ª edição 1949).

KAMII, C. (1986). *Number in preeschool & kindergarten*. Washington, The National Association for the Education of Young Children.

KAMII, C. e HOUSMAN, L. B. (2000). *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory*. Nova York, Teachers College Press (1ª. edição 1985).

KLAHR, D. e WALLACE, J. (1973). The role of quantification operators in the development of conservation of quantity. *Cognitive Psychology,* n. 4, pp. 301-327.

McGARROGLE, J. e DONALDSON, M. (1974). Conservation accidents. *Cognition*, n. 3, pp.341-350.

MILLER, S. A. (1982). On the generalizability of conservation: A comparison of different kinds of transformation. *British Journal of Psychology*, n. 73, pp. 221-230.

MONTANGERO, J. e MAURICE-NAVILLE, D. (1997). *Piaget or the advance of knowledge*. Tradução de Pierre Mardaga. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum (1ª edição 1994).

MOORE, C. e FRYE, D. (1986). The effect of experimenter's intention on the child's understanding of conservation. *Cognition*, n. 22, pp. 283-298.

MORGADO, L. (1988). *Aprendizagem operatória da conservação das quantidades numéricas*. Coimbra, INIC.

______(1993). *O ensino da aritmética. Perspectiva construtivista*. Coimbra, Almedina.

MURRAY, P. L. e MAYER, R. E. (1988). Preschool children´s judgments of number magnitude. *Journal of Educational Psychology*, n. 80, pp. 206-209.

NUNES, T. e BRYANT, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford, Blackwell.

NUNES, T.; SCHLIEMANN, A. D. e CARRAHER, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press.

PAHL, K. e ROWSELL, J. (2005). *Literacy and Education*. Londres, Paul Chapman.

PARRAT-DAYAN, S. e BOVET, M. (1982). Peut-on parler de précocité et de régréssion dans la conservation? II. *Archives de Psychologie*, n. 50, pp. 237-249.

PIAGET, J. (1972a). "The concept of structure". In: MOUTON/UNESCO (ed.). *Scientific thought: Some underlying concepts, methods and procedures*. Paris, Mouton/Unesco.

______(1972b).*Où va l'éducation*. Paris, Gonthier (1ª edição 1948).

______(1976). *Seis estudos de psicologia*. Tradução de Nina Constante Pereira. Lisboa, Publicações D. Quixote (1ª. edição 1964).

______(1979). *Psychologie et pédagogie*. Paris, Gonthier (1.ª edição 1969).

______(1980). "Epistemologia das matemáticas". In: PIAGET, J. (ed.). *Lógica e conhecimento científico*, v.1. Tradução de Sousa Dias e Filipe Araújo. Barcelos,: Companhia Editora do Minho (1ª. edição 1967).

______(1981). *Lógica e conhecimento científico*, v. 2. Tradução de Francisco Sardo e Sousa Dias. Barcelos, Companhia Editora do Minho (1ª. edição 1967).

______(1995). *Sociological studies* Edição de L. Smith e Tradução de T. Brown, R. Campbell, N. Emler, M. Ferrari, M. Gribetz, R. Kitchener, W. Mays, A. Notari, C. Sherrard e L. Smith. Londres, Routledge & Kegan Paul (1ª. edição 1965).

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. (1975). *A génese do número na criança*. Tradução de Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro, Zahar (1ª. edição 1941).

SAXE, G. B. (1981). Body parts as numerals: A developmental analysis of numeration among the Oksapmin in Papua New Guinea. *Child Developmental*, n. 52, pp. 306-316.

SCHUBAUER-LEONI, M. L. e PERRET-CLERMONT, A. (1997). "Social interactions and mathematics learning". In: NUNES, T. e BRYANT, P. (eds.). *Learning and teaching mathematics*. Hove, Psychology Press.

SIEGEL, L. S. (1982). The development of quantity concepts: Perceptual and linguistic factors. In: BRAINERD, C. J. (ed.). *Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development research*. Nova York, Springer-Verlag.

STONE, C.W. (1913). Problems in the scientific study of the teaching of arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, v. 4, Issue 1, pp. 1-16.

TILTON, J. W. (1947). Individualized and meaningful instruction in arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, v. 38, Issue 2, pp. 83-88.

VILETTE, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, v. 17, Issues 3-4, pp. 1365-1383.

VON GLASERSFELD, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and number. *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 12, pp. 83-94.

WORTHINGTON, M. (2007). *Exceptional children: researching the young child's mathematics*. Maths coordinator's file, 25, Mathematics Asdsociation, May.

WORTHINGTON, M. e CARRUTHERS, E. (2003). *Children's mathematics: making marks, making meaning*. Londres, Paul Chapman.

WYNN, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, n. 36, pp. 155-193.

______(1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, n. 358, pp. 749-750.

Recebido em maio/2008; aprovado em jun./2008