

# Análises cognitiva e metacognitiva de práticas matemáticas de resolução de problemas: o caso Nerea

TÂNIA CRISTINA GUSMÃO\*

VICENÇ FONT\*\*

JOSÉ A. CAJARVILLE\*\*\*

## Resumo

Neste artigo, propomos e aplicamos uma ferramenta para analisar as práticas matemáticas realizadas no processo de resolução de problemas utilizando como contexto de reflexão a resolução de um problema por parte de uma aluna. A ferramenta de análise é composta pelos constructos configuração epistêmica/cognitiva e configuração metacognitiva. O primeiro dos ditos constructos foi proposto pelo Enfoque Ontosemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS), enquanto que o segundo é uma elaboração própria dos autores, que têm em conta diversos trabalhos sobre a metacognição. Os resultados da análise realizada mostram como o uso da ferramenta proposta permite uma melhor compreensão da prática matemática que um sujeito realiza quando resolve problemas.

**Palavras-chave:** resolução de problemas; cognição; metacognição.

## Abstract

*We both propose and deploy herein a tool to analyze the mathematical practices undertaken in the problem-solving process by using a female student's problem solution as a context for reflection. The analysis tool consists of the following constructs: epistemic / cognitive configuration and metacognitive configuration. The former of these constructs was proposed by the Onto-Semiotic Approach (OSA) to Mathematical Cognition and Education, while the latter, which takes into consideration several works on metacognition, was formulated by the authors themselves. Analysis results show how using the proposed tool allows a better understanding of the mathematical practices a subject performs when solving problems.*

**Keywords:** *problem solving; cognition; metacognition.*

---

\* Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Doutora em Didática da Matemática – USC/Espanha. E-mail: tania@uesb.br; santiania@bol.com.br

\*\* Universitat de Barcelona, Doutor en Didáctica da Matemática – UB/Espanha. E-mail: vfont@ub.edu

\*\*\* Universidade de Santiago de Compostela, Doutor en Didáctica da Matemática – USC/Espanha. E-mail: ja.cajarville@usc.es

## Introdução

O objetivo desta pesquisa é desenvolver e aplicar um modelo de análise das práticas matemáticas realizadas ao resolver problemas que integre de maneira coerente ferramentas propostas por diferentes programas de investigação utilizando como contexto de reflexão a resolução de um problema por parte de uma aluna. Propomos e utilizamos uma ferramenta composta pelos constructos de configuração epistêmica/cognitiva e de configuração metacognitiva. O primeiro dos ditos constructos foi proposto pelo Enfoque Ontosemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS), enquanto que o segundo é uma elaboração própria dos autores, que têm em conta diversos trabalhos sobre a metacognição (Flavel, 1976; Schoenfeld, 1985; Fernandes, 1988; Polya, 1989; Gonçalves, 1996; Gónzales, 1999; Schraw 2001; Mateos, 2001; Carrel, Gajdusek e Wise, 2001; Gusmão, 2005, 2006, entre outros). Os resultados da análise realizada mostram como o uso da ferramenta proposta permite uma melhor compreensão da prática matemática que um sujeito realiza quando resolve problemas.

O artigo está estruturado em 4 partes. Na primeira, explicamos as ferramentas “configuração epistêmica/cognitiva” e “configuração metacognitiva de referência” e propomos como unidade mínima de análise uma combinação de ambas. Na segunda parte, apresentamos o problema cuja resolução será utilizada como contexto de reflexão e analisamos sua resolução “ideal” com as ferramentas explicadas no item anterior. Na terceira parte, analisamos a solução de uma aluna (Nerea) tendo em conta três momentos diferentes: a) resolução individual, b) entrevista com a investigadora e c) discussão em grupo das soluções individuais. Por último, apresentamos algumas reflexões gerais sobre o caso estudado e sobre o modelo de análise proposto.

### 1. Ferramentas de análise

Consideramos que, para uma compreensão mais eficaz das práticas manifestadas pelos estudantes na resolução de problemas matemáticos, é necessário contemplar uma unidade mínima de análise composta pela configuração epistêmica/cognitiva e metacognitiva de referência. Na continuação desenvolvemos esses dois constructos.

### 1.1. Configurações epistêmicas/cognitivas

Em diferentes trabalhos, Godino e colaboradores<sup>1</sup> desenvolveram um conjunto de noções teóricas que configuram o Enfoque Ontológico e Semiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS). Propõem como objeto básico para análise “os sistemas de práticas manifestados por um sujeito (ou no seio de uma instituição) ante uma classe de situações-problemas” (Godino, 2002, p. 242). Consideramos, de acordo com o EOS, que quando um agente (instituição ou pessoa) realiza e avalia uma prática matemática, é necessário que ative um conglomerado formado por alguns (ou todos) dos seguintes elementos: *linguagem, situações, definições (conceitos), proposições, procedimentos e argumentos*.

(1) **Linguagem** (termos, expressões, notações, gráficos): em um texto vem dada em forma escrita ou gráfica, mas no trabalho matemático podem se usar outros registros (oral, gestual). Mediante a linguagem (ordinária e a específica matemática) são descritos outros objetos não lingüísticos;

(2) **Situações** (problemas mais ou menos abertos, aplicações extramatemáticas ou intramatemáticas, exercícios...): são as tarefas que induzem à atividade matemática;

(3) **Procedimentos**: são utilizados pelo sujeito ante as tarefas matemáticas (operações, algoritmos, técnicas de cálculo, ...);

(4) **Conceitos**:<sup>2</sup> dados mediante definições ou descrições (número, ponto, reta, função...);

(5) **Proposições** (propriedades, teoremas, corolários, lemas, etc.);

(6) **Argumentos** usados para validar e explicar as proposições (sejam dedutivas ou de outro tipo) (Godino, 2002 apud Gusmão, 2006, grifo do autor, tradução nossa).

- 
- 1 Godino (2002); Font e Godino (2006); Godino, Contreras e Font (2006); Godino, Font e Wilhemi (2006); Font, Godino e D'Amore (2007); Godino, Batanero e Font (2007 e 2008); Font e Contreras (2008); Ramos e Font (2008); Godino et al. (2009).
  - 2 “Os conceitos ou propriedades são interpretados aqui como propõe Wittgenstein, como ‘regras gramaticais sobre o uso de símbolos e expressões’ para descrever as situações e as ações que realizamos ante ditas situações (Baker e Hacker, 1985, p. 285). Tais regras mudam segundo a fenomenologia, os jogos de linguagem, as formas de vida, as instituições.

Em cada caso, esses elementos estarão relacionados entre si, formando *configurações*, definidas como as redes de objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas e suas relações. Essas configurações podem ser *epistêmicas* (redes de objetos institucionais) ou *cognitivas* (redes de objetos pessoais) (ver Figura 1).

A linguagem é um instrumento inseparável dos demais, uma vez que este lhe dá forma. Mediante os enunciados lingüísticos, podemos expressar situações, definições de conceitos, procedimentos, propriedades e argumentos.<sup>3</sup> Por situações, entendemos os problemas, as aplicações, os exercícios, exemplos, etc. que são as tarefas que induzem a atividade matemática do sujeito.<sup>4</sup>

Assim, para realizar uma prática matemática, o agente (instituição ou pessoa) necessita de uma série de conhecimentos que são fundamentais, tanto para a sua realização como para a interpretação de seus resultados como satisfatórios. Se considerarmos os componentes do conhecimento que é necessário que o agente tenha para a realização e avaliação da prática que lhe permite solucionar uma determinada situação-problema (por exemplo, primeiro planejar e depois resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas) vemos que, de início, ele tem que utilizar uma determinada *linguagem*, por exemplo verbal (termos como “solução” ou “solução da equação”, “incógnita”, etc.) e simbólica (“ $x$ ”, “ $=$ ”, etc.). Essa linguagem é a parte ostensiva de uma série de *conceitos* (equação,<sup>5</sup> sistema de duas equações, etc.), *proposições* (soma-se o mesmo termo aos dois membros da equação e se obtém uma equação equivalente, etc.) e

---

3 Os enunciados que expressam situações, definições de conceitos, procedimentos, propriedades e argumentos, neste trabalho, não são incluídos na categoria da linguagem porque os diferentes elementos representados por ditos enunciados aparecem em outras categorias (conceitos, situações, procedimentos, propriedades e argumentos). Neste trabalho, na categoria da linguagem, aparecem, sobretudo, termos, expressões, notações e gráficos.

4 Neste trabalho utilizaremos como sinônimos os termos situação e situação-problema.

5 Os conceitos estão presentes na atividade matemática mediante os termos que os representam ou bem mediante enunciados que os definem (explícita ou implicitamente). Por exemplo, o conceito “equação de primeiro grau” pode se apresentar na atividade matemática mediante o termo “equação de primeiro grau” ou bem mediante um enunciado como “uma equação é uma igualdade cujos membros têm letras e números relacionados por operações aritméticas. As letras são chamadas incógnitas”.

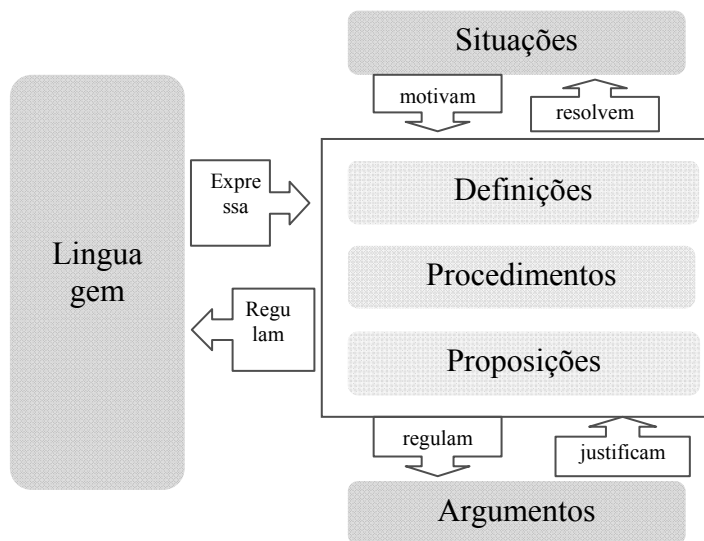


Figura 1 – Componentes de uma Configuração Epistêmica (Cognitiva)

*procedimentos* (resolução por substituição, igualação, redução,<sup>6</sup> etc.) que se utilizarão na elaboração de *argumentos* para decidir se as ações simples que compõem a prática, e ela mesma entendida como ação composta, são satisfatórias.

6 O método de igualação consiste em colocar a mesma incógnita em ambas as equações e igualar as expressões resultantes; resolve-se a equação de primeiro grau com uma incógnita obtida e substitui-se este valor nas equações iniciais. O método de substituição consiste em colocar uma incógnita numa das equações e substituí-la na outra; assim, obtém-se uma só equação com uma incógnita. Uma vez obtido o valor dessa incógnita, substitui-se seu valor em qualquer das equações do sistema inicial para calcular o valor da outra incógnita. O método de redução consta dos seguintes passos: a) multiplicam-se ou dividem-se os membros das duas equações pelos números que convenham para que uma das incógnitas tenha o mesmo coeficiente em ambas; b) subtraem-se as duas equações resultantes, eliminando-se uma incógnita; c) resolve-se a equação com uma incógnita obtida e substitui-se seu valor em qualquer das equações iniciais para calcular a segunda.

## 1.2. Configuração metacognitiva institucional de referência

A ferramenta configuração epistêmica (cognitiva) nos informa sobre a “anatomia” da atividade matemática do episódio analisado. Se, além da “estrutura”, interessa o “funcionamento” (como interagem os objetos), numa perspectiva temporal e dinâmica é necessário utilizar, entre outras ferramentas, processos metacognitivos. Fazendo um paralelismo com o EOS, Gusmão (2006) chama *configuração metacognitiva institucional* a configuração que servirá como modelo de referência para a *configuração metacognitiva pessoal* desenvolvida pelo estudante.

Para a realização da prática, como, por exemplo, resolver um problema que represente um grau de dificuldade importante, um solucionador experiente (ou especialista) colocará em funcionamento uma configuração epistêmica/cognitiva (segundo se olhe desde a perspectiva institucional ou pessoal), mas para isso tem que tomar uma série de decisões de gestão dos componentes da configuração epistêmica/cognitiva ao longo do processo de resolução (ações de coordenação, planificação/organização, supervisão/controle, regulação e revisão/avaliação que podem ser automáticas ou declaradas em função do tempo, instrumentos disponíveis, etc.). De modo geral, tendo em conta diferentes investigações<sup>7</sup> sobre a metacognição na resolução de problemas matemáticos e principalmente os últimos trabalhos de Gusmão (2006), consideramos, com base nessa autora, os seguintes níveis de metacognição, que chamaremos aqui de configuração metacognitiva:

---

7 Flavell (1976); Schoenfeld (1985); Fernandes (1988); Polya (1989); Gonçalves (1996); Gónzales (1999); Schraw (2001); Mateos (2001); Carrel, Gajdusek e Wise (2001); Gusmão (2005, 2006).

## Quadro 1 – Configuração metacognitiva institucional de referência

<p><b>Considerações para uma <i>Configuração Metacognitiva Institucional de Referência</i></b></p>
<p><b><i>Gestões primárias (metacognição primária)</i></b></p> <p>Para começar a resolver um problema, o solucionador experiente deve compreender primeiro o que se pede no enunciado, deve tomar consciência de todos os aspectos que terão que ser levados em conta para a resolução da situação-problema. Ditos aspectos guiarão o desenvolvimento das ações posteriores. Depois, tendo em vista as exigências e condições impostas pela tarefa, deve decidir ou eleger os passos que supostamente o levarão à solução. Dado que se supõe que é experiente na matéria, as decisões que tomará na maioria dos problemas serão rápidas (e inclusive em alguns casos automáticas); também suas argumentações sobre a eficiência do plano adotado serão precisas e de acordo com os conhecimentos institucionais.</p> <p>As gestões para este primeiro nível cobrem desde a fase de ataque ao problema até o ensaio de um ou mais planos de resolução e, com isso, um nível relativamente semi-automático de processos de supervisão, regulação e avaliação.</p> <p>Podemos dizer, de modo geral, que as ações metacognitivas iniciais que se esperam para este nível serão, sobretudo, de <i>compreensão</i> e de <i>organização/planificação</i>.</p>
<p><b><i>Gestões secundárias (metacognição secundária)</i></b></p> <p>A metacognição primária em geral vai associada as ações do solucionador experiente manifestadas de forma rápida (e inclusive automática), dada a suposta familiaridade que se supõe que ele tenha com os conhecimentos necessários para a resolução da situação (tarefa).</p> <p>Quando não se trata de gestões rápidas ou automáticas devido à complexidade do problema proposto, serão necessários períodos de espera e de novas indagações e planejamentos. Estes novos planejamentos implicam gestões deliberadas de supervisão, regulação e avaliação mais reflexivas que as que se dão na primeira.</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) Dado um plano que pode ser o adequado ou não, uma ação <i>supervisora</i> é aquela em que o solucionador, implícita ou explicitamente, faz questionamentos do tipo “estou seguindo corretamente o plano previsto?”. Questionamentos como este são indícios da existência consciente de um processo de supervisão pontual ou constante das ações empreendidas. Tal supervisão conduz (e garante) um maior rendimento.</li><li>2) Numa ação <i>reguladora</i>, supõe-se que o solucionador, implicitamente ou explicitamente, faz questionamentos do tipo “se não consigo os objetivos ou não cumpro as condições impostas, que posso corrigir? Ou que novo caminho posso emprender?”. Ele se dá conta de que se equivocou e sobretudo se pergunta <i>quando</i> ou <i>onde</i> se equivocou.</li><li>3) Numa ação <i>avaliativa/verificativa</i> supõe-se que o solucionador explicitamente faz questionamentos do tipo “estou respondendo corretamente a tarefa?” “A solução que dou é a que resolve o problema?”. Este tipo de perguntas é indício da existência consciente de um processo de avaliação/verificação final das ações empreendidas.</li></ol>
<p><b><i>Gestões para uma metacognição ideal</i></b></p> <p>Quando não se trata de gestões rápidas ou automáticas devido à complexidade do problema proposto, tal como se falou, serão necessários períodos de espera e de novos planejamentos. Estes novos planejamentos implicam gestões deliberadas de supervisão, regulação e avaliação. O que caracteriza este terceiro nível metacognitivo é o recurso deliberado de processos cognitivos de características muito gerais (pensamento metafórico, analógico, particularização, generalização, transferência, contextualização, descontextualização, mudança de representação, resolução alternativa, uma solução original, etc.), as quais se propõem como novas alternativas (muito mais conscientes e reflexivas) às demandas anteriores de supervisão, regulação e avaliação.</p>

Fonte: Gusmão, 2006.

Ainda que esses três níveis de metacognição se apresentem separados, faz-se necessário pensar neles como um processo contínuo que se desenvolve em espiral. Em muitos casos, será suficiente o nível primário de metacognição (quando, por exemplo, um solucionador experiente enfrenta um problema que para ele é simples). Só aparecerão explicitamente os níveis secundário e terciário, descritos anteriormente, quando o solucionador enfrente uma situação-problema cuja complexidade o obrigue a colocá-los em funcionamento, posto que os níveis de metacognição necessários para a resolução de um problema dependerão da complexidade dele e do nível de conhecimentos (cognitivos e metacognitivos) do solucionador.

Na confecção desta configuração metacognitiva institucional de referência foram levados em conta os seguintes aspectos: 1) a atividade metacognitiva dos professores de matemática que resolveram o conjunto de nossos problemas que posteriormente propusemos aos alunos, 2) a revisão da literatura sobre a metacognição que consultamos e 3) a experiência dos autores na resolução de problemas para a formação contínua dos professores e 4) a opinião de especialistas da metacognição. Depois, essa configuração foi refinada tendo em conta matizes sugeridos pelas respostas de alguns estudantes.

### **1.3. Unidade mínima de análise**

Consideramos, pois, que para uma compreensão mais eficaz das práticas manifestadas pelos estudantes no contexto das tarefas que lhes propomos, é necessário contemplar uma unidade mínima de análise composta pelas configurações epistêmicas (cognitiva) e metacognitiva institucional de referência (pessoal) conjuntamente, conforme podemos apreciar no esquema da Figura 2.

Salientamos que esses constructos formam parte de um todo integrado, que em seu conjunto contribui para explicar a realização de dita prática.



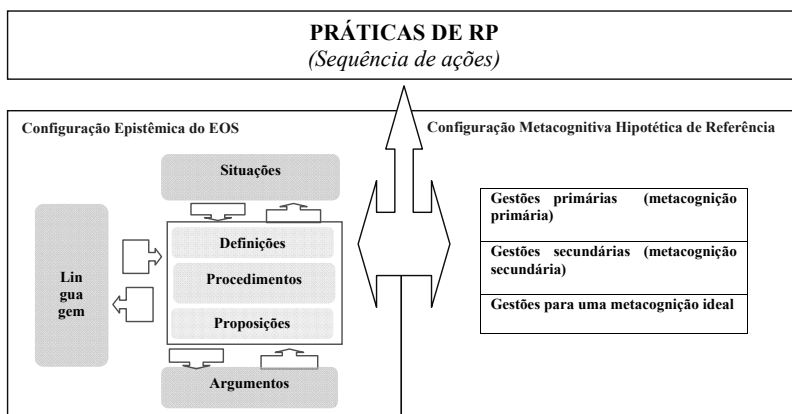


Figura 2 – Unidade mínima de análise (Fonte: Gusmão, 2006).

## 2. Um problema como contexto de reflexão

Antes de proceder à análise da resposta dada por uma estudante, aqui chamada de Nerea, ao problema da figura escondida (Figura 3), faremos uma exposição do nosso objetivo ao propor tal situação e depois explicitaremos o que seria uma configuração epistêmica de referência e uma configuração metacognitiva institucional de referência para este problema.

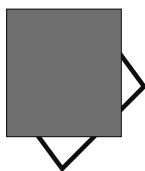


Figura 3 – Problema da figura escondida (Fonte: Gusmão, 2006).

No desenho do enunciado deste problema levamos em conta dois aspectos: 1) que os conhecimentos necessários para sua resolução formassem parte da bagagem de conhecimentos matemáticos dos alunos e 2) que se prestassem a múltiplas respostas, para isso, no enunciado, pergunta-se deliberadamente por “figura” no lugar de “figuras” (é preciso recordar que as respostas são infinitas ao se ter em conta a norma matemática de que em ausência de restrições a um problema, sua solução deve ser a mais geral possível).

O processo seguido para desenhar as configurações epistêmica e metacognitiva de referência para esse problema foi o seguinte: 1) um matemático experiente (especialista) resolveu o problema, 2) essa resposta foi submetida à opinião de outros solucionadores experientes com o objetivo de validá-la e de observar se ofereciam soluções alternativas, 3) a partir do protocolo de resolução e das respostas a algumas perguntas que lhes formulamos<sup>8</sup> confeccionamos um primeiro esboço e 4) depois esse esboço foi submetido a consideração de vários outros matemáticos experientes.

## 2.1. Solução ideal

Reproduzimos em seguida o *protocolo de um solucionador experiente (especialista)*:

Dado que não existe restrição alguma acerca da figura que pode se esconder atrás do quadro, interpretando, a partir da informação visual, que se trata da representação plana de uma forma que pode ou não enlaçar com a poligonal que se mostra por fora do quadro, existem teoricamente infinitas possibilidades de desenho de uma tal figura. Ao tomar a decisão de desenhar uma figura “exemplo”, esta deverá ser a mais geral possível, evitando que cumpra propriedades geométricas elementares (um quadrilátero, um polígono, convexa, etc.), posto que, do contrário, estaria submetida a restrições não impostas pelo problema. Uma possibilidade seria uma figura de contorno misto, côncava e com buracos, como a figura seguinte:



Figura 4 – Uma solução ao problema da figura escondida

Os demais especialistas consultados aceitaram essa solução como válida, sem necessidade de indicar respostas alternativas.

---

8 Ex. Por que considera que deve haver soluções do tipo: a mais geral possível?, em algum momento pensou que dado o enunciado do problema deveria considerar uma solução única?, por que estima necessário desenhar um caso particular?, por que considerou como hipótese que a figura atrás do quadro há de enlaçar com a poligonal que está fora?

Como consequência da leitura do problema, o solucionador tem em conta a norma matemática que prescreve que em ausência de restrições concretas sobre um determinado problema, suas soluções devem ser as mais genéricas possíveis, pois, do contrário, responderiam a restrições inexistentes. Essa norma se converte no motor das ações atuativas e argumentativas que se realizam. Estas são: 1) dar o argumento de que há infinitas soluções e 2) a realização de um desenho, como exemplo, de possível solução. Há que destacar que o solucionador poderia ter levado sua argumentação ao extremo de considerar que não há nenhuma figura.

Para a realização da sucessão de ações que resolvem a tarefa, é necessário ativar os componentes da configuração epistêmica simultaneamente a configuração metacognitiva que segue.

## **2.2. Configuração epistêmica**

Para realizar as ações apropriadas para a resolução da tarefa, o solucionador experiente ativa a seguinte configuração epistêmica (Figura 5), esta entendida como referencial que utilizaremos para analisar a adequação das configurações cognitivas dos estudantes.

Com relação à configuração epistêmica da Figura 5 convém levar em conta as seguintes considerações:

*Linguagem (termos e expressões):* utilizam-se o termo “figura”, que pode estar sujeita a distintas interpretações (figura plana, contorno de uma figura, figura convexa/não convexa, figura com buracos, etc.), que supõem-se familiar a um solucionador experiente, e “atrás de” que, neste caso, é sinônimo de “escondido”, que não se pode ver. *Representações gráficas:* neste caso, o tipo de representação relevante é a geométrica bidimensional.

*Definições: os conceitos prévios* que tem que empregar para construir uma resposta à tarefa são noções geométricas ligadas à de “figura plana” e à de sua classificação em famílias (figura plana, contorno de uma figura, figura convexa/não convexa, figura com buracos, figura geométrica – triângulo, quadrilátero, polígono regular/irregular, poligonal, círculo, etc.).

*Procedimentos:* o primeiro processo que foi considerado por parte do solucionador experiente foi a necessidade de contemplar que a figura que estava escondida era plana, pelo que se produz uma descontextualização para converter a tarefa num problema de geometria plana; a partir dessa descontextualização, as exemplificações produzidas a modo

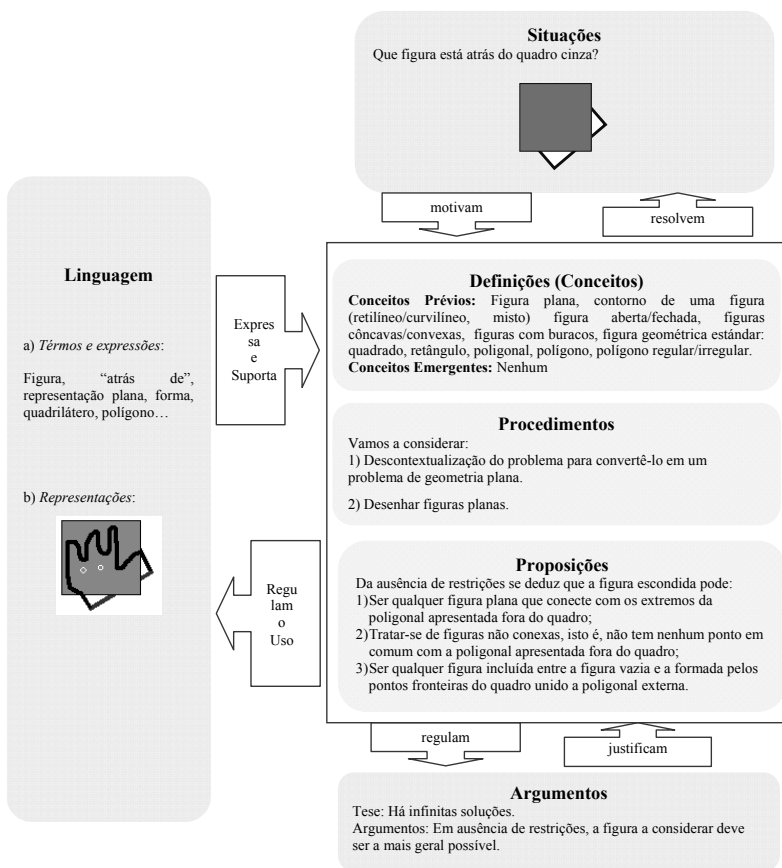


Figura 5 – Configuração epistêmica da resolução ideal ao problema da figura escondida

de representação cristalizaram no desenho da figura, como a do exemplo que se mostra, se baseiam em figuras planas.

*Proposições:* o solucionador considerou implicitamente as três proposições enunciadas no esquema anterior.

*Argumentos:* a posição do solucionador diante desse problema leva-o a formular a tese enunciada, colocando como argumento a norma implícita de que em ausência de restrições, a figura a considerar deve ser a mais geral possível, em particular, não deve verificar nenhuma propriedade geométrica elementar que pode sugerir alguma característica que deve possuir a solução.

### 2.3. Configuração metacognitiva institucional de referência

Um solucionador ideal, para ativar a configuração epistêmica da Figura 5, tem que tomar uma série de decisões de gestão: coordenação, supervisão/controle, revisão, regulação e avaliação.

Temos analisado primeiro a metacognição do professor experiente (solucionador ideal). Nesse caso, podemos dizer que ele necessitou de um conjunto de ações metacognitivas que se produziu de maneira rápida, simultânea e semi-automática, dada a simplicidade que a tarefa representou para ele. A lista de ações metacognitivas é a seguinte: 1) Leitura reflexiva da situação-problema. 2) Reconhecimento de que não existem restrições que limitem os tipos de formas. 3) Buscar solução a mais geral possível. 4) Particularizar uma solução a modo de exemplificação e, tudo isto acompanhado de 5) Gestões de monitoramento necessárias para resolver a tarefa. Podemos dizer que lhe bastou um nível primário de metacognição para resolver a tarefa, dada a simplicidade da mesma. Agora, pensando nos alunos, para os quais o problema apresenta uma dificuldade importante, convém desenhar, para poder discriminar seus níveis de competências metacognitivas, uma configuração metacognitiva hipotética de referência que contemple os três níveis propostos.

#### Quadro 2 – Configuração metacognitiva hipotética de referência

<b>Gestões primárias (<i>metacognição primária</i>)</b> 1) <i>Leitura reflexiva</i> da situação-problema. 2) <i>Ser consciente</i> ao propor figuras que se considerem soluções válidas. 3) <i>Dar por válido um argumento</i> (para si mesmo).
<b>Gestões secundárias (<i>metacognição secundária</i>)</b> 1) <i>De supervisão</i> . 2) <i>De regulação</i> . 3) <i>De avaliação/verificação</i> .
<b>Gestões para uma metacognição ideal</b> 1) <i>Generalização</i> : refletir sobre tipos de figuras planas complexas, que por seu caráter irregular tendem a não cumprir propriedades geométricas elementares. 2) <i>Particularização</i> : desenhar uma figura que seja um exemplo ilustrativo da solução geral.

#### Gestões primárias (metacognição primária)

1) *Leitura reflexiva da situação-problema*: para um solucionador ideal, flui em paralelo a construção de significados apropriados para responder à situação, evocando os conhecimentos matemáticos precisos para resolvê-la

da forma mais eficiente possível. Sobre a própria leitura, o solucionador tomará decisões acerca das condições da tarefa. Depois dessa leitura, a consciência deliberada de todos os aspectos que se tem que ter em conta para proceder à ação subsequente, levam as duas seguintes considerações:

2) *Ser consciente de que propôs* um exemplo de figura que ele considera que pode ser a solução do problema.

3) *Dar por válidos os argumentos* que sustentam a solução que propôs.

### Gestões secundárias (metacognição secundária)

1) *De supervisão*. Um exame sobre as ações induzirá questionamentos do tipo: estou me adaptando às condições da tarefa? (pergunta que resultará pertinente, neste caso, se a primeira decisão adotada levar, por exemplo, a considerar só famílias de polígonos). Esses questionamentos deveriam permitir o controle das ações, garantindo maior eficácia na resolução da tarefa.

2) *De regulação*. Em caso de não cumprir alguma das condições, o solucionador, de forma consciente, deverá empreender novas ações que cumpram os requerimentos da situação (ex. se ele decide num primeiro momento por figuras convexas, no nível de supervisão, deverá detectar que está impondo uma restrição não contemplada no enunciado da tarefa, e portanto deve regular suas ações, considerando figuras não convexas como mais representativas da solução).

3) *De avaliação/verificação*. Os questionamentos hipotéticos de estar respondendo ou não às condições impostas pela tarefa são indícios da existência consciente de um processo de avaliação/verificação constante das ações empreendidas.

### Gestões para uma metacognição ideal

1) *Generalização*: refletir sobre tipos de figuras planas complexas, que por seu caráter irregular tendam a não cumprir propriedades geométricas elementares. A forma poligonal visível fora do quadro na formulação da tarefa poderia fazer pensar, num primeiro momento, que as únicas figuras a considerar são de tipo poligonal convexo. Entretanto, uma análise mais reflexiva conduz a desestimar essa suposição ao não existir restrição alguma no enunciado.

Para concluir, *reconhece-se que não existem restrições que limitem os tipos de formas que podem se “esconder” atrás do quadro cinza*, salvo talvez subtender que se trata de figuras planas que podem ou não enlaçar com

o “pedaço” poligonal que se visualiza por fora do quadro e que, por isso, deve considerar figuras genéricas, o que se ilustraria com o feito de ser o mais irregular possível. Essa decisão é conseqüência do conhecimento consciente de que a falta de restrições sobre um determinado problema deve conduzir o solucionador a considerar os casos mais gerais possíveis (menos restritivos), nesse caso aqueles tipos de formas que menos condições cumpram (nesse caso, propriedades geométricas estandarizadas). Por outra parte, esse conhecimento lhe permite reconhecer que se trata de um problema com infinidade de soluções.

2) *Particularização*: dentro de ilimitadas possibilidades deve optar, para dar uma resposta concreta ao problema, por uma figura não sujeita a propriedades geométricas padronizadas (ex. “quadrilátero”, “polígono regular”, “polígono”, “convexo”, etc.), desenhando, por exemplo, uma figura com contorno misto, não convexa e com buracos.

### **3. Análise da resolução de uma aluna**

Nessa terceira parte analisa-se a solução de uma aluna (Nerea), estudante da carreira de Magistério (Especialidade em Educação Primária) da Universidade de Santiago de Compostela – Espanha. Levamos em conta três momentos diferentes: a) resolução individual, b) entrevista com a investigadora e c) discussão em grupo das soluções individuais. Em concreto, utilizam-se as configurações epistêmicas e metacognitivas de referência para determinar suas respectivas configurações pessoais.

#### **3.1. Primeiro momento: prova escrita individual**

Segue-se a resposta de Nerea à prova escrita individual (Figura 6).

Na sua resposta escrita, distinguem-se dois níveis de ação. No princípio, desenha e explica que a solução é um retângulo que afirma ser “igual à metade do quadrado” pode ser construída sobre a silhueta visível. Num segundo nível, reconhece que atrás do quadro “pode haver qualquer coisa”, desenhando famílias de polígonos (irregulares, côncavos, convexos). Para a realização da sucessão de ações cujo produto é a resposta da Figura 6, Nerea teve que ativar os componentes da configuração epistêmica simultaneamente a configuração metacognitiva que segue (Figura 7).

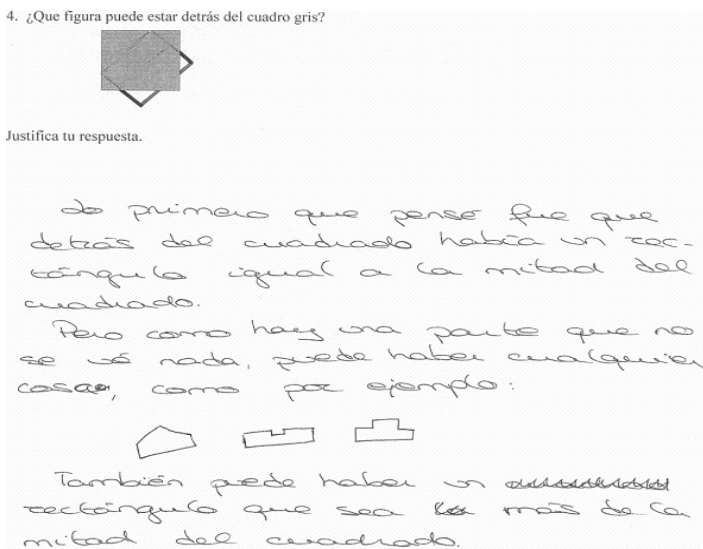


Figura 6 – Resposta de Nerea na prova individual

O que pensei primeiro foi que atrás do quadrado havia um retângulo igual à metade do quadrado.

Mas, como tem uma parte que não se vê nada, pode haver qualquer coisa, como por exemplo:



Também pode haver um retângulo que seja mais da metade do quadrado.

Com relação à configuração cognitiva de Nerea da Figura 7, convém levar em conta as seguintes considerações:

*Linguagem (termos e expressões)*: faz referência à noção de retângulo (igual a metade do quadrado) que utiliza como elemento que vem a sua mente para resolver o problema. Numa segunda fase, utilizando uma linguagem comum, afirma que atrás do quadro “pode haver qualquer coisa”. *Representações*: nessa mesma fase recorre a representações gráficas



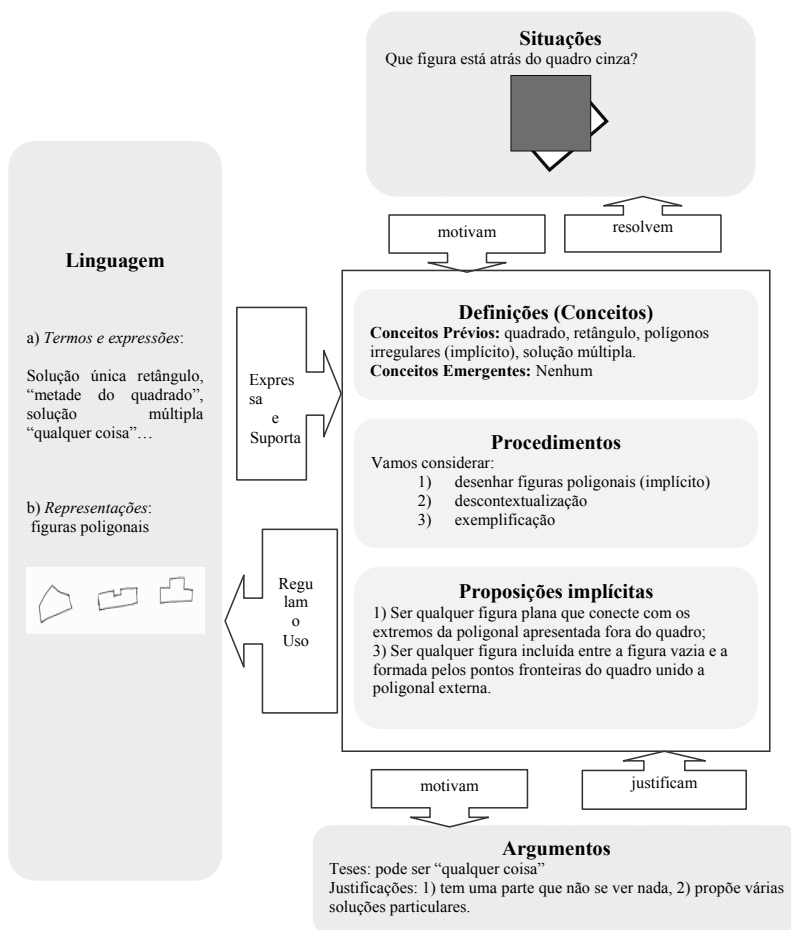


Figura 7 – 1ª Configuração cognitiva de Nerea ativada na sua resolução individual

de famílias de polígonos, sem referir explicitamente suas características, associando qualquer coisa a formas geométricas baseadas em polígonos irregulares.

*Procedimentos:* o primeiro pensamento de Nerea leva-a a considerar processos de representação de retângulos (metade do quadrado) enlaçando com a poligonal que se visualiza fora do quadro. Após a percepção de que pode haver “qualquer coisa” pode ampliar o processo a representações de figuras poligonais arbitrarias. Tudo isto ela realiza também mediante um

processo de descontextualização que lhe permite considerar a geometria plana como a dimensão adequada para suas representações.

*Definições:* os conceitos que ela emprega se referem, num princípio, a quadrados e a retângulos para depois referir-se, mediante representação gráfica, a tipos de polígonos arbitrários.

*Proposições:* somente tem em conta parcialmente que não há restrições ao tipo de figura quando afirma que “como (...) não se vê nada, pode haver qualquer coisa”. Afirmação que entretanto restringe a polígonos.

*Argumentos:* se produz uma evolução rápida e positiva quando Nerea percebe que “ao não ver nada atrás do quadro”, pode haver “qualquer coisa”. Isso lhe permite justificar que além de retângulos, pode haver outros tipos de figuras, ainda que restritas a figuras poligonais.

Nerea, para ativar a configuração epistêmica da Figura 7 tem que tomar uma série de decisões de gestão (coordenação, supervisão/controle, revisão, regulação e avaliação). Isto é, tem que pôr em funcionamento a seguinte configuração metacognitiva pessoal (Quadro 3):

Quadro 3 – 1ª configuração metacognitiva de Nerea

<b>Gestões primárias (metacognição primária)</b> 1) <i>Leitura parcialmente reflexiva</i> da situação-problema. 2) <i>Ser consciente</i> ao propor figuras que considera que são soluções. 3) <i>Dar por válido um argumento</i> (para si próprio).
<b>Gestões secundárias (metacognição secundária)</b> 1) <i>De supervisão.</i> 2) <i>De regulação.</i> 3) <i>De avaliação/verificação (implícita).</i>
<b>Gestões para uma metacognição ideal</b> Não existe, ao menos explicitamente.

### Gestões primárias (metacognição primária)

1) *Leitura parcialmente reflexiva* da situação-problema. Da resposta de Nerea deduzimos que, num primeiro momento, tem uma reflexão parcial e simples que a leva a dar uma primeira solução.

2) *Ser consciente de propor* uma primeira solução que, de início, considera correta: “havia um retângulo igual à metade de um quadrado”. As ações que empreende a partir dessa reflexão nos levam a inferir que os conhecimentos matemáticos que manipula para resolver com eficácia dita situação são de tipo restritivo.

3) O argumento de que seja “a metade de um quadrado” num primeiro momento parece-lhe um argumento válido.

### **Gestões secundárias (metacognição secundária)**

1) *De supervisão*: o comentário “mas como há uma parte que não se vê nada” é uma ação supervisora da solução encontrada inicialmente que a leva a regulação do processo.

2) *De regulação*: a regulação, conseqüência da supervisão, faz com que Nerea considere outras soluções, além do mencionado retângulo, passando de considerar uma única solução a múltiplas soluções (todas elas polígonos).

3) *De avaliação/verificação*: podemos deduzir que Nerea avalia tendo em vista que dá por resolvido o problema com o feito anteriormente.

Com relação à ação metacognitiva de avaliação, cabe comentar que esta não a leva a se dar conta de que a formulação “pode haver qualquer coisa” entra em contradição com as restrições do problema (não diz, por exemplo, que pode haver qualquer coisa que respeite o contorno).

### **Gestões para uma metacognição ideal**

Não existe, ao menos explicitamente.

## **3.2. Segundo momento: entrevista individual**

Continuando, segue a transcrição da entrevista semi-estruturada realizada com Nerea sobre sua resposta individual.

*Entrevistadora (E): Que tipo de pensamentos ou idéias vieram a sua mente quando estava resolvendo o problema?*

*NEREA: Pois... em princípio, acreditei que somente tinha uma solução. Porque sei lá... via mais que evidente que a parte escura era a metade exata do quadrado. Não sei por que mas foi a impressão que me deu, mas claro, eu disse a mim mesma, “há uma parte que não se vê absolutamente nada e pode ser qualquer coisa”. Sei lá... pode haver... creio que pode haver, que pode ser a metade de um quadrado, que pode ser um retângulo maior, que pode ter inclusive uma forma de picos, de muitas coisas. Não sei. Minha cabeça deu muitas voltas. Eu creio que pode ser qualquer coisa. E: Por que acredita que a princípio lhe ocorreu que poderia ser somente um quadrado?*

NEREA: *Porque como eu disse... Não. Somente a metade de um quadrado, que é um retângulo, porque como se via este pedaço assim {apontando a figura} eu vi tão estreito que disse: não, com certeza a metade do quadrado. E já pensei que tinha resolvido, porque tem os lados delimitados, sem parar para pensar que atrás não se vê nada.*

E: *Então, lhe faço a pergunta de outra forma: por que depois pensou que poderia haver mais?*

NEREA: *Porque tem uma parte que não se vê absolutamente nada. E pode haver qualquer coisa ou não haver nada também. Mas bom, supombamos que se fecha {a figura visível}...*

E: *E quanto a seu estado emocional enquanto resolvia o problema?*

NEREA: *Inicialmente isso, muito segura de que era a metade do quadrado. Entretanto, depois rapidamente... eu fiquei muito surpreendida quando vi que não tinha por que ser assim. Que poderia ser outra coisa. Surpreendeu-me muito. Porque eu disse a mim mesma: claro, se não se vê, posso ver qualquer coisa. Por isso aí sim que fiquei surpreendida.*

E: *Acredita que esta primeira impressão que teve do problema, pode ter a ver com o modo pelo qual teve contato com a geometria desde pequena?*

NEREA: *Não sei, porque comigo sempre me deram tudo assim. Isto é assim, assim e assim. E não foi de outra maneira. Eu, com as matemáticas acontece sempre o mesmo. Sempre as vejo de uma mesma maneira e não sou capaz de vê-las de outra. Se a vejo assim, é muito difícil para mim, muito complicado de... ficar dando voltas na cabeça e fazer a matemática de outra forma. Por isso surpreendi com isso de eu dizer. Todas! {muitas figuras} {risadas, com expressão de surpresa}.*

E: *Algo mais?*

NEREA: *Não...*

E: *Muito obrigada.*

Como consequência da intervenção da entrevistadora, Nerea realiza ações discursivas nas quais seus argumentos se fazem mais explícitos. O mais relevante de suas argumentações consiste na descrição que realiza do desequilíbrio de seus esquemas de pensamento (provocado por ações deliberadas de supervisão, “dar voltas”, do significado da não existência de restrições ao problema) que lhe permite evoluir do pensamento restritivo que aflora no primeiro momento (ao admitir uma única solução) a um esquema de pensamento mais geral (ao admitir múltiplas soluções), o que lhe provoca um impacto emocional importante. Não obstante, não

parece haver superado a limitação de identificar figura qualquer e figura poligonal qualquer.

Com esta entrevista, Nerea explicita elementos não declarados no primeiro momento, de maneira que podemos representar seus novos matices em outra configuração cognitiva (Figura 8) e metacognitiva pessoal.

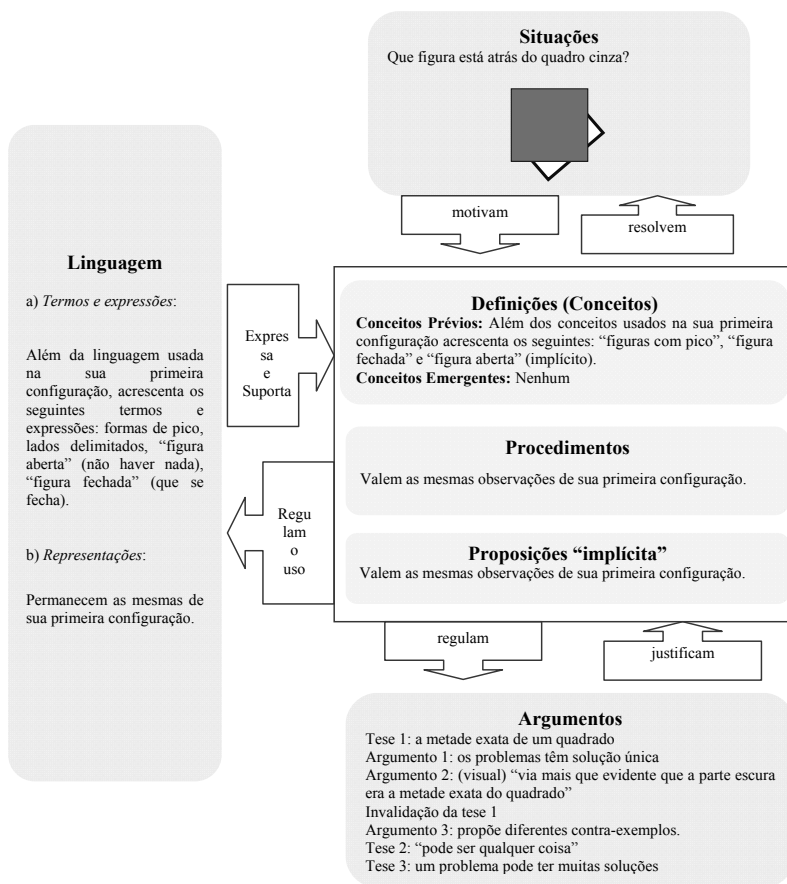


Figura 8 – 2ª Configuração cognitiva de Nerea ativada na sua entrevista

Com relação a configuração cognitiva de Nerea da Figura 8 convém ter em conta as seguintes considerações:

*Linguagem (termos e expressões)*: em relação a este objeto observa-se uma maior clareza aquilo que ela considera como soluções múltiplas factíveis, ao fazer menção de expressões como: figuras fechadas, figura aberta, formas de pico. Parece que sua concepção de retângulo está esquematizada numa imagem particular de metade de um quadrado e, ainda, observamos que sua linguagem continua limitada a figuras poligonais. *Representações*: não se produz nenhuma conseqüência sobre as representações gráficas anteriores.

*Procedimentos*: não há variação no que se refere a processos que utiliza na sua primeira configuração.

*Definições*: torna-se explícito o conceito de figura fechada. Faz-se referência ao conceito de figura aberta, que não aparecia no primeiro momento. Faz explícitas as noções de solução múltipla (qualquer coisa) e forma de pico.

*Proposições*: segue utilizando as mesmas proposições de sua configuração anterior.

*Argumentos*: seu processo argumentativo permite apreciar com mais clareza quais são suas teses, que argumentos validam essas teses e que argumentos as invalidam.

Com relação à configuração metacognitiva anterior de Nerea (Quadro 3), essa entrevista nos permitiu corroborar a existência dos dois níveis da metacognição primária e secundária que havíamos inferido de seu protocolo escrito. Suas respostas manifestam claramente a metacognição primária (leitura pouco reflexiva, primeira solução...), mas o que resulta mais relevante é que confirma plenamente a existência de metacognição secundária (supervisão, regulação e avaliação). Os indicadores empíricos que, em nossa opinião, mostram a existência deste nível secundário de metacognição acham-se em certas expressões da entrevista:

*NEREA: Pois... em princípio, acreditei que somente tinha uma solução. Porque sei lá... via mais que evidente que a parte escura era a metade exata do quadrado. Não sei por que, mas foi a impressão que me deu, mas claro, eu disse a mim mesma, "há uma parte que não se vê absolutamente nada e pode ser qualquer coisa". Sei lá... pode haver... creio que pode haver, que pode ser a metade de um quadrado, que pode ser um retângulo maior, que pode ter inclusive uma forma de picos, de muitas*

*coisas. Não sei. Minha cabeça deu muitas voltas. Eu creio que pode ser qualquer coisa.*

...

*NEREA: Não sei, porque comigo sempre me deram tudo assim. Isto é assim, assim e assim. E não foi de outra maneira. Eu, com as matemáticas acontece sempre o mesmo. Sempre as vejo de uma mesma maneira e não sou capaz de vê-las de outra. Se a vejo assim, é muito difícil para mim, muito complicado de... ficar dando voltas na cabeça e fazer a matemática de outra forma. Por isso surpreendi isso de eu dizer. Todas! {muitas figuras} {risadas, com expressão de surpresa}.*

Por último, consideramos que, nessa entrevista, aparece de maneira incipiente o terceiro nível de metacognição já que, numa de suas respostas, Nerea considera que uma resposta válida seria que não existe nenhuma figura, que consideramos como solução original:

*NEREA: Porque tem uma parte que não se vê absolutamente nada. E pode haver qualquer coisa ou não haver nada também. Mas bom, suponhamos que se fecha {a figura visível}...*

### 3.3. Terceiro momento: debate em grupo

Depois da resolução individual e da entrevista semi-estruturada, quatro alunos (Nerea, Rocio, Noa e Juan) participantes na investigação debateram em grupo o problema. Desde que responderam individualmente até o momento do debate, os alunos não tiveram a oportunidade de conversar sobre o problema uns com os outros, ou seja, foi vedada a comunicação a respeito do problema. Ao se reunirem em grupo para debater dita questão, Nerea foi a primeira que interviu, conforme transcrição abaixo.

*NEREA: A primeira coisa que eu pensei foi que... a figura essa tinha que ser a metade do quadrado. Ainda que depois... tentei fazer e disse a mim mesma que não tinha porque... porque como esse lado não se vê... pode haver qualquer coisa. Pode haver algo que termine assim em pico... podemos ver qualquer coisa, como aqui não há nada. Com tanto que entre no quadrado pode haver qualquer coisa.*

*ROCIO: Mas só há uma que não pode ser. Um quadrado não pode ser.*

*NEREA: O quadrado não.*

...

NOA: *Mas não pode ser, por exemplo, um círculo, não pode ser triângulo, não pode ser...*

NEREA: *Sim que pode haver. Pode haver talvez a metade de um círculo.*

ROCIO: *Puxa!, tinha que ter sempre como premissa que é isso [refere-se a forma visível com a que enlaçar a figura escondida]. A partir daí pode colocar a forma que quiser.*

NEREA: *Mas, não pode ser um círculo toda essa figura?* [perguntando com consentimento dos demais]

ROCIO: *Sim.*

NOA: *Como assim?* [desenhando um pedaço de circunferência que enlaça com a forma visível]

JUAN: *Um círculo não seria. Teria um lado circular.*

NOA: *Sim. Isto é o que me fez equivocar. Ou seja, considere só uma figura completa: círculo, triângulo, hexágono... e a primeira coisa que olhei foi assim... antes de ler também. Pareceu-me poder ver um retângulo, unindo o segmento este com isto. E depois disse: não! muito fácil.*

JUAN: *Fácil porque você pensava que o retângulo ia pelo meio. Tal e como está aqui parece que não, que não vai pelo meio. Nerea, disse que partiu o quadrado a metade.*

NEREA: *Eu pensei que ao fazer assim que era justamente a metade de um quadrado.*

...

NOA: *Pensei em excluir tudo. Todas as figuras conhecidas...*

JUAN: *Que figuras mais conhecidas pode haver? Um pentágono...*

ROCIO: *Retângulo, trapézio...*

NEREA: *Pentágono eu creio que não.*

*(Falam todos)*

NEREA: *Claro que não! Um pentágono de jeito nenhum [implicitamente está pensando em polígono regular, a figura desenhada por ela não é identificada como um polígono, senão como uma figura com pico].*

JUAN: *Claro que sim, j.....!. [desenha um pentágono irregular].*

NEREA: *Eu não pensei isso!. Não pensei que fosse outra coisa [além de um quadrilátero].*

JUAN: *você disse: pensei que havia um retângulo que passava justo pela metade de um quadrado...*

NEREA: *Isto colocando-o assim... ou seja... [unindo os extremos da forma visível].*

JUAN: *Ja, ja, ja, ja!*

NEREA: *Claro. Não necessita que seja um quadrado...*



O seguinte episódio, distancia-se do objetivo do problema, por uns momentos, ao se ocupar o debate da forma do quadro:

*NOA: Literalmente o quadro é um quadrado ou não?*

*ROCIO: Não.*

*NEREA: Eu acreditava que era um quadrado. Por isso pensei na metade de um quadrado.*

*JUAN: Mas aqui não se diz que é um quadrado.*

*NEREA: Não. Diz quadro.*

*ROCIO: Claro.*

*NOA: Eu pensei que quadro fosse quadrado porque acreditava que fosse a mesma palavra.*

*JUAN: Um quadro pode ser um retângulo... [risadas].*

*ROCIO: Sim. Isso vai com a moda [risadas].*

...

Na sequência, o debate dirige-se de novo a tratar de dar resposta à situação-problema:

*JUAN: Não sei, vi a silhueta e a primeira figura que veio à minha mente, depois do retângulo, foi uma assim e tal que abarcasse a máxima superfície por trás do quadro: um decágono.*

[Irregular, enlaçando com os limites do quadro]

[Se produz silêncio durante uns segundos]

*ENTREVISTADORA: Juan, por que lhe ocorreu que tem que abarcar a máxima superfície?*

*JUAN: Não sei. Talvez porque estudei economia e sempre estávamos pensando em sacar o máximo benefício das coisas...*

*ROCIO: Eu pensei em um círculo mas não, porque pode complicar-se muito.*

*NEREA: Ah claro!. Sim, eu creio que é isto [aceitando e apontando a proposta de Juan].*

*ROCIO: Eu creio que é isto [concordando].*

*NEREA: Sim, mas uma figura que vá até aqui [assinalando a borda do quadro] sairá fora.*

*JUAN: Assim como esta que fiz agora.*

*ROCIO: Sim. Mas se você pega uma figura que vá até aqui e depois cubra até ali...*

*NEREA: Não.*

*ROCIO: Ficarà justo debaixo.*

*NEREA: Não, não... Isto sai para fora, não fica justo debaixo!*

*ROCIO: Não.*

*NEREA: Como que não fica justo?*

ROCIO: *Vamos ver! Se isto o pego e agora faz, se a contorna pelas bordas, chas, chas, chas...*

NEREA: *Fica justo.*

JUAN: *Se pega desde este risco, a pega por dentro, pois claro que sai fora.*

ROCIO: *Claro, tem que ajustar-se ao tamanho das bordas.*

NEREA: *O que eu digo é que, se você segue por aqui e por aqui [bordando o quadro, tentando desenhar um decágono regular] ao final eu creio que sairá [do quadro].*

JUAN: *Com as medidas exatas é impossível que saia.*

NEREA: *Mas é que tem parte por fora.*

ROCIO: *Não... olha... olha, se pega simplesmente a parte que se vê e simplesmente pega justo a área que ocupa a figura, o encontra... homem, desde já, se move isto se verás, mas se não o... aqui não diz que... diz agora mesmo.*

JUAN: *Calculando as medidas...*

(Falam todos de uma vez)

ROCIO: [voltando a recuperar o objetivo da tarefa] *Mas aqui não está lhe dizendo que você não tenha... ou seja que... a figura tem que ser menor, ou que não tenha que ver com que se a move de outra maneira, simplesmente está lhe dizendo... tem este quadro cinza e isto.... Pensa o que pode haver debaixo simplesmente, nesta posição. Que você desde já, sim tem, sei lá...*

NEREA: *Ah bom, claro, não tem porque... [refere-se à superfície]*

ROCIO: *Claro!!*

(Falam juntos)

ROCIO: *Estamos condicionados pelo que sabemos de pequenos.*

NEREA: *É o que dizia [referindo-se a Juan]. É como se estivesse algo por debaixo que segue a mesma "ordem".*

JUAN: *Se estivesse uma mesa, por exemplo, uma pasta e uma folha que se sai por fora. Está vendo isso! [se refere ao retângulo].*

NOA: *É também porque é o mais simples: uma linha reta, para chegar de um ponto a outro. Pode ser assim [unindo os extremos da forma visível]*

NEREA: *Diretamente é a forma que eu coloquei aqui. Primeiro comecei pelo retângulo.*

ROCIO: *O primeiro que lhe ocorre é o conhecido.*

NEREA: *Não. Não é pelo conhecido, senão pelo que dizia Noa, a linha reta, o mais rápido de uma esquina a outra. Mas depois vi que podia haver qualquer coisa, não tinha porque haver esquinas...*

JUAN: *Inclusive pensa que pode ser um desenho, um polígono, uma figura geométrica. Pode haver uma casinha pintada com um telhado vermelho com sua janela azul, pode...*

*NEREA: Como se não há nada! Como se talvez seja uma caixa que não tem tampa!*

*ROCIO: Não tem porque haver nenhuma figura. Talvez já seja assim [tal como mostra o gráfico do enunciado].*

*JUAN: Pode haver muitas figuras...*

*ROCIO: Por poder... pode haver infinitas, salvo o quadrado.*

*JUAN Tá, tá. Talvez existe o vazio.*

*ENTREVISTADORA: [dirigindo-se a Noa] Pensa como eles que pode haver infinitas?*

*NOA: Sim, sim. Por exemplo, se consideramos que o que não se pode ver, mas que completa a esta [a forma visível]. Tirando esta maneira “não regular” eu estou convencida que pode haver infinitas.*

...

*Falam todos.*

Os protagonistas desse debate atuam como proponentes e oponentes do discurso. As seguintes teses têm lugar no debate:

T1 (*Nerea*): “enquanto entre no quadrado pode haver qualquer coisa”.

T2 (*Rocio*): “um quadrado não pode ser”.

T3 (*Noa*): “não pode ser um círculo, não pode ser um triângulo...”.

T4 (*Nerea*): “pode ser uma parte de um círculo”.

T5 (*Juan*): “pode haver um pentágono...”

T6 (*Nerea*): “um pentágono, não”.

T7 (*Juan*): “um quadro pode ser um retângulo”.

T8 (*Juan*): “uma figura que abarque a máxima superfície, um decágono”.

T9 (*Nerea*): “um decágono, não”.

T10 (*Nerea*): “um decágono irregular pode ser a solução”.

T11 (*Rocio*): “uma figura que se ajuste ao tamanho das bordas”.

T12 (*Nerea*): “um decágono regular não pode ser”.

T13 (*Juan*): “pode ser um desenho, um polígono, uma figura geométrica, uma casinha pintada...”.

T14 (*Nerea*): “como pode não haver nada... uma caixa sem tampa”.

T15 (*Juan*): “pode haver muitas figuras”.

T16 (*Rocio*): “pode haver infinitas, salvo o quadrado”.

Traçamos a trajetória argumentativa individual de cada participante:

*Nerea*: há distintos segmentos no discurso em que ela atua como proponente e oponente do discurso. Num primeiro segmento, explica sua resposta dada no protocolo de entrevista e, por conseguinte, matiza-a e a reformula com a tese (T1). Matizando essa tese concorda com (T2) e invalida parcialmente (T3), chegando a um consenso com os outros membros do grupo sobre a validade de (T4). Num segundo segmento, opõe-se a (T5). Num terceiro segmento, juntamente com os demais, trata sobre se o quadro cinza pode ser um quadrado. Num quarto segmento, em conformidade com (T1) concorda com (T8) e propõe (T10) e na seqüência (T12). No último segmento, propõe (T14) e chega ao acordo com (T16).

*Juan*: também há distintos segmentos no discurso de Juan. Entra no discurso concordando com as teses (T3) e (T4). Na seqüência, propõe (T5), que reafirma ante a oposição de seus companheiros. Posteriormente, a partir da discussão sobre a forma que pode adotar o quadro cinza propõe (T7). Noutro segmento, Juan, apoiado em seus conhecimentos metacognitivos derivados de experiências anteriores, propõe (T8), que é aceita com restrições por outros companheiros e que o leva a justificá-la. Na seqüência, amplia o campo de possibilidades de soluções admissíveis, propondo as teses (T13) e (T15).

*Rocio*: também Rocio atua como proponente e oponente, como os demais. Sua primeira tese (T2) consiste num contra-exemplo que invalida parcialmente (T1). Admite as teses (T3) e (T4). Acrescenta, na direção de (T5) outras figuras factíveis. Noutro segmento, parece concordar com (T7). Reforça (T8) ao tempo em que trata de esclarecer essa tese para os outros participantes. Concorda no último segmento do debate com as teses (T13), (T14) e (T15), formulando por sua vez (T16).

*Noa*: do mesmo modo que Rocio, entra no discurso propondo a tese (T3) que inclui contra-exemplos a (T1) e, ademais, justifica sua tese. Apresenta a confusão entre as noções de quadro e de quadrado, que gera um debate entre seus companheiros e que levou a Juan a propor (T7). Ao final do debate, Noa apóia sua primeira visão da solução com o argumento de que poderia ser um retângulo, posto que se poderiam prolongar os extremos da poligonal visível por meio de uma “reta”. Por fim, chega ao acordo com a tese (T16).

A evolução das ações atuativas e discursivas de Nerea talvez constitua a mudança mais notável com relação às configurações anteriores.

As contribuições que realiza e recebe do grupo levam-na a aceitar e rejeitar diferentes tipos de figuras como possíveis soluções da tarefa. Em particular, podemos identificar que suas concepções de polígonos se restringem, no nível discursivo, em princípio, à noção de polígono regular. Também reconhecemos em Nerea uma evolução da idéia de retângulo que, em princípio, parecia associá-la à metade de um quadrado, restrição que agora ela supera. Por outra parte, identifica agora uma figura aberta com uma caixa sem tampa, feito que amplia sua primeira concepção de figura aberta como figura vazia. Suas argumentações justificam alguns conceitos de momentos anteriores e, ao mesmo tempo, confirmam suas concepções confusas de polígono (representando polígonos irregulares como soluções factíveis, enquanto invalida essas representações em nível discursivo). De modo geral, suas argumentações são mais ricas e se revelam ainda com muito mais detalhe em relação às outras duas configurações anteriores. O debate permite-lhe reconhecer de forma mais deliberada algumas limitações que possui, como, por exemplo, que o retângulo não é só a metade de um quadrado, que outras figuras não pensadas podem ser soluções para o problema. Entretanto, suas concepções “confusas” sobre a “idéia” de polígono levam-na a rejeitar, em princípio, soluções factíveis.

Durante o debate em grupo, Nerea considera novos elementos a se ter em conta na resolução da tarefa que não havia explicitado nos dois primeiros momentos. Esses novos elementos nos permitem desenhar novas configurações cognitivas e metacognitivas que, em certa medida, ampliam, mas também introduzem modificações com respeito às anteriores.

Com relação à configuração cognitiva de Nerea da Figura 9, convém levar em conta as seguintes considerações:

*Linguagem:* Nerea maneja, agora, novos termos e expressões devido ao próprio desenvolvimnto do debate, alguns dos quais são fruto de contribuições de outros membros do grupo e que ela aceita ou rejeita em função de seus esquemas de pensamento.

*Definições:* os conceitos mencionados nesse terceiro momento, que se encontram no quadro anterior, aparecem como conseqüência de contribuições comuns ao debate; entre elas podemos citar os de pentágono e decágono, que associa aos pentágonos e decágonos regulares, porque geram discussões de interesse acerca de se podem ser ou não consideradas soluções factíveis: “um pentágono de jeito nenhum”, “não fica justo” (porque se sairia da borda do quadro). Ao afirmar que o pentágono não

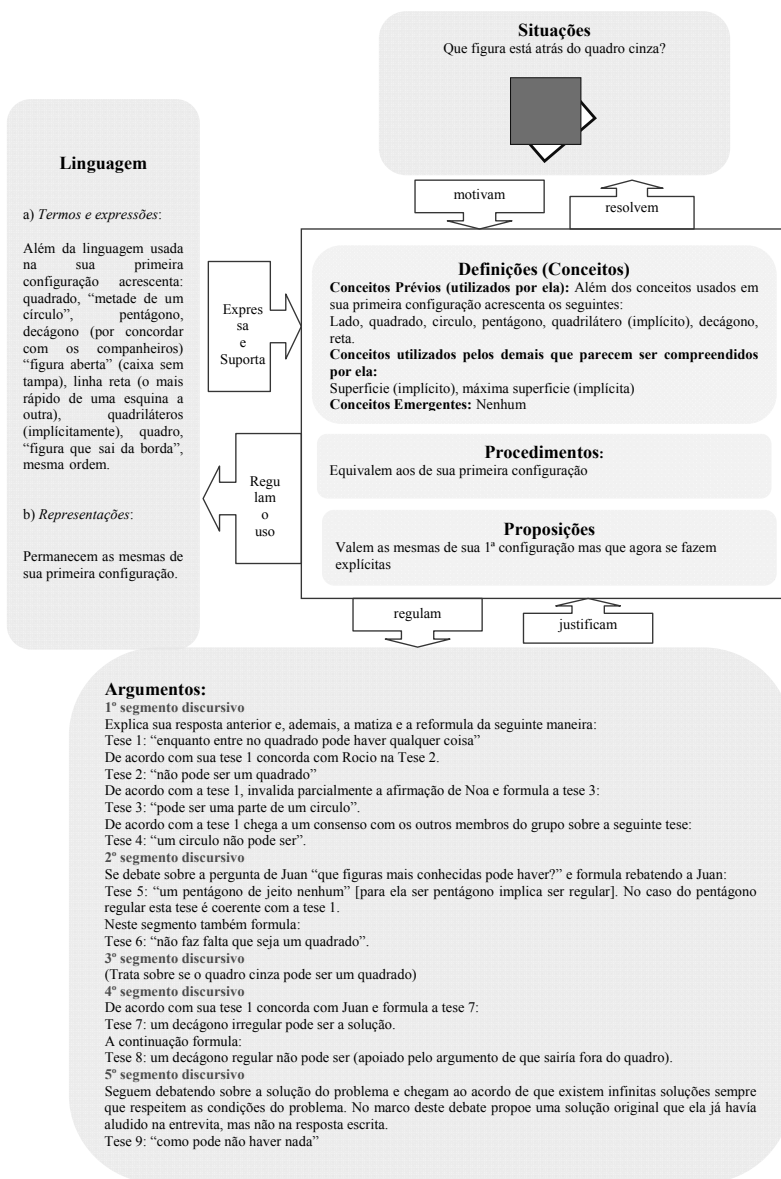


Figura 9 – 3ª Configuração cognitiva de Nerea ativada no debate em grupo

pode ser solução ao problema, enquanto que o representa em seu protocolo escrito (primeiro momento) como uma possível solução, Nerea nos permite deduzir que sua concepção de pentágono está associada à de pentágono regular. Do mesmo modo ocorreu em relação ao decágono. De novo, sua concepção errônea de identificar polígono com polígono regular leva-a a duvidar sobre a viabilidade da proposta de Juan (um de seus companheiros do debate).

*Proposições:* as proposições (1) qualquer figura plana que conecte com os extremos da poligonal apresentada fora do quadro e (2) qualquer figura incluída entre a figura vazia e a formada pelos pontos fronteiras do quadro unindo a poligonal externa, se fazem explícitas quando Nerea concorda com os companheiros e quando ela apresenta uma solução original “como se não nada” (figura vazia).

Com relação às duas configurações metacognitivas anteriores de Nerea, esse debate em grupo nos permitiu corroborar a existência dos dois níveis da metacognição primária e secundária que havíamos inferido de seu protocolo escrito e em sua entrevista. Mas, sobretudo, nos permitiu inferir o terceiro nível de metacognição.

#### Quadro 4 – 3<sup>a</sup> configuração metacognitiva de Nerea

<p><b>Gestões primárias (<i>metacognição primária</i>)</b></p> <p>1) <i>Leitura reflexiva</i> da situação problema.</p> <p>2) <i>Reconhece</i> que algumas figuras regulares (e.x. pentágono e decágono) não podem ser soluções.</p> <p>3) <i>Dar por válido</i> um argumento (para si própria, ainda que tenha sido dado por outros; por exemplo reconhece que o círculo não pode ser, que o decágono irregular pode ser, etc.)</p>
<p><b>Gestões secundárias (<i>metacognição secundária</i>)</b></p> <p>1) <i>Supervisiona</i>: “esta figura pode (ou não pode) ser solução da tarefa”.</p> <p>2) <i>Regula</i> suas ações mediante reflexões que surgem do debate.</p> <p>3) <i>Avalia/verifica</i>: o mais destacável é que produziu-se um processo de avaliação que transcorre entre a entrevista e a formulação de sua resolução para o resto do grupo (aproximadamente 20 minutos). Durante esse processo matiza e reformula a solução exposta na entrevista “enquanto entre no quadrado pode haver qualquer coisa”.</p>
<p><b>Gestões para uma metacognição ideal</b></p> <p>Apresenta uma solução original e a justifica com a contextualização: “como se não há nada. Como se talvez seja uma caixa que não tem tampa” (que poderíamos considerar como o caso de generalização máxima).</p>

### Gestões primárias (metacognição primária)

Assim como ocorreu com a entrevista (segundo momento) o debate em que Nerea participa nos permitiu comprovar o dito no primeiro nível de sua primeira configuração. Ela dá por válidos os argumentos mencionados na sua configuração epistêmica cognitiva e também alguns argumentos dos demais. Quanto ao nível de metacognição secundária, merece ser destacado que:

### Gestões secundárias (metacognição secundária)

De modo geral, os três processos que seguem estão intimamente relacionados nesse debate. E, como consequência, tem-se que, ao mesmo tempo que Nerea contribui para a supervisão, regulação e avaliação dos processos de pensamento por parte dos demais companheiros, eles também contribuem para a supervisão, regulação e avaliação que Nerea faz de seus próprios processos de pensamento.

1) *Supervisiona*: nos momentos em que põe à prova seus próprios processos de pensamento e dos demais: “esta figura pode (ou não pode) ser solução da tarefa”.

2) *Regula*: ao colocar à prova a afirmação “esta figura pode (ou não pode) ser solução da tarefa”, há uma mudança na sua forma de pensar; ou quando, por exemplo, abandona sua primeira concepção de retângulo ou quando parece “aceitar” a existência do decágono como uma solução factível.

3) *Avalia/verifica*: quando, por exemplo, leva a cabo a verificação da afirmação “esta figura pode (ou não pode) ser solução da tarefa”, ou seja, avalia se as formas sobrepõem os limites do quadro antecipando-se a sua representação ostensiva.

### Gestões para uma metacognição ideal

Consideramos que há indícios de uma metacognição ideal porque apresenta uma solução original e a justifica com a contextualização: “como se não há nada. Como se talvez fosse uma caixa que não tem tampa” (que poderíamos considerar como o caso de generalização máxima).



#### **4. Considerações finais**

Com relação ao caso Nerea, é possível inferir uma evolução relevante (apesar de suas limitações cognitivas e metacognitivas) de seu pensamento, dado que passa de considerar, num primeiro momento, uma única solução ao problema, a considerar múltiplas soluções (o que lhe provoca, inclusive, um sentimento de surpresa) proporcionando representações gráficas das soluções.

Em sua primeira resposta escrita, só considera formas poligonais, ainda que não se refira a elas de forma explícita. No entanto, no debate, admite como soluções figuras com contornos entre as quais podem fazer parte, em particular, pedaços de círculo. Também admite qualquer figura que respeite a forma visível, excluindo alguns polígonos regulares por não respeitar a restrição  $e$ , ademais, traz uma solução original que consideramos de máxima generalização (“como pode não haver nada”). Nessa evolução, é fundamental a intervenção do “outro” (ou entrevistadora ou companheiros do debate).

As ações restritivas que a princípio Nerea empreende parecem ser reflexo de uma instrução “fechada”, que gerou atitudes restritivas de sua autonomia pessoal, como podemos observar em suas declarações, no momento da entrevista individual e, também, nas de seus companheiros durante o debate em grupo que apoiam esta idéia:

*NEREA: Não sei, porque comigo sempre me deram tudo assim. Isto é assim, assim e assim. E não foi de outra maneira. Eu, com as matemáticas acontece sempre o mesmo. Sempre as vejo de uma mesma maneira e não sou capaz de vê-las de outra. Se a vejo assim, é muito difícil para mim, muito complicado de... ficar dando voltas na cabeça e fazer a matemática de outra forma. Por isso surpreendi com isso de eu dizer. Todas! {muitas figuras} {risadas, com expressão de surpresa}.*

*NOA: Sim. Isto é o que me fez equivocar. Ou seja, considerei só uma figura completa: círculo, triângulo, hexágono... e a primeira coisa que olhei foi assim... antes de ler também. Pareceu-me poder ver um retângulo, unindo o segmento este com isto. E depois disse: não! muito fácil.*

*ROCIO: Eu pensei em um círculo mas não, porque pode complicar-se muito.*

De um ponto de vista metacognitivo, podemos observar que houve uma evolução contínua. Do protocolo escrito temos inferido que, na resolução, Nerea ativou o primeiro e o segundo níveis da configuração metacognitiva de referência. Com relação ao segundo momento, a entrevista com a investigadora nos permitiu corroborar a existência dos dois níveis da metacognição primária e secundária que havíamos inferido de seu protocolo escrito e observar indícios de um terceiro nível de metacognição quando considera como válida a seguinte resposta, que consideramos original: “pode haver qualquer coisa ou não haver nada também”. Esses processos metacognitivos são ainda mais ativos durante o debate. Inicialmente, Nerea reformula a solução exposta na entrevista dizendo que “enquanto entre no quadrado pode haver qualquer coisa”, matiz essa que pensamos poder ser consequência de uma avaliação ocorrida no intervalo de tempo (de mais ou menos 20 minutos) entre a entrevista e o debate, ou inclusive no próprio momento do debate, durante seu “discurso”.

De modo geral, durante o debate em grupo se produz um importante trabalho de supervisão e avaliação das sucessivas soluções que vão sendo referenciadas por parte de cada um de seus membros, situação em que Nerea participa ativamente quando assinala aqueles tipos de forma que podem ser ou não admitidos como solução, sempre apoiando-se em suas concepções confusas da idéia de polígono.

Também fazendo uma confrontação dos três momentos em que acompanhamos Nerea, foi possível reconhecer que qualquer análise realizada sobre provas escritas ou entrevistas individuais (e aqui incluímos nossos instrumentos de coleta de dados) serão de fato restritivos, simples ... dado que estas análises não conseguirão revelar nuances de pensamento “escondidos” atrás das palavras e expressões e, portanto, podem induzir-nos a extrair conclusões pouco confiáveis em relação aos conhecimentos reais do sujeito. Desse modo, reconhecemos o valor do debate e portanto do diálogo e pensamos que seria o diálogo espontâneo (em sala de aula e entre todos) o que melhor se aproximaria de uma informação mais precisa dos conhecimentos reais de cada sujeito. No “caso Nerea” observamos esse fato quando inferíamos, nos dois primeiros momentos (prova escrita e entrevista), que ela manejava a idéia de que “não existem restrições que limitem os tipos de formas”, garantida pelas representações gráficas que havia feito de formas poligonais irregulares e que, no terceiro momento, se contradiz quando discute a impossibilidade de considerar pentágonos

ou decágonos como soluções factíveis (ao restringir seu pensamento aos polígonos regulares). O diálogo (consigo mesma e com os demais) lhe permitiu fazer mudanças e avançar em suas configurações metacognitiva e cognitiva. Nesta direção D'Amore (1997) sinala a importância das reflexões pessoais explícitas antes, durante e depois do processo de resolução de problemas e, como tal, observa que concluir precipitadamente que uma pessoa “não sabe resolver os problemas” é algo arriscado e vago, buscar as causas do por que se bloqueou parece ser um exemplo de diagnóstico muito mais sério.

A ativação, durante a entrevista, do nível secundário de metacognição de referência, em específico, a ação avaliativa que atua sobre a solução encontrada em sua resposta escrita, facilita a solução do problema e melhora sua configuração cognitiva, dado que faz explícita uma propriedade que antes tinha como implícita. Todo esse contexto converge na direção de aceitar a seguinte hipótese: o fato de que uma pessoa tenha adquirido e controle o conhecimento metacognitivo indicado para enfrentar novas aprendizagens, ainda que nem sempre é garantia de êxito, em muitos casos consegue melhorar sua configuração cognitiva, facilitando a aquisição da aprendizagem.

Em definitivo, observamos a importância do diálogo em grupo para favorecer desenvolvimentos de estruturas de pensamento, principalmente de ordem metacognitivo. Os distintos caminhos que oferecem uns participantes a outros, durante o debate/diálogo, proporcionam discussões, reflexões ativas, comprovação de hipóteses, idéias emergentes, estabelecimento de relações... e mais oportunidades para aprender cognitiva e metacognitivamente. O diálogo em grupo possibilita processos de regulação e supervisão próprios, ou seja, Nerea se auto-supervisiona e se auto-regula e também regula os demais. Uns regulando aos outros e a si mesmos.

Como consideração final, ressaltamos que o uso da ferramenta composta pelos constructos configuração epistêmica/cognitiva e configuração metacognitiva permite uma melhor compreensão da prática matemática que um sujeito realiza quando resolve problemas.

Fica claro, então, que as configurações de referência são ferramentas que permitem avaliar e compreender as de ordem pessoal que são ativadas nas práticas de resolução de problemas.

## Referências

- CARREL, P. L.; GAJDUSEK, L. e WISE, T. (2001). "Metacognition and EFL/ESL reading". In: HARTMAN, H. J. (ed.). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice*. Nova York, Kluwer Academic Publishers.
- D'AMORE, B. (1997). *Problemas: pedagogía y psicología de matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid, Editorial Síntesis,.
- FERNANDES, D. (1988). Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática. *Educação e Matemática*, n. 8, 4º trimestre de 1988.
- FLAVELL, J. (1976). "Metacognitive aspects of problem solving". In: RESNICK, L. (ed.). *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- FONT, V. e GODINO, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 8, n. 1, pp. 67-98, São Paulo.
- FONT, J. D.; GODINO, J. D. e D'AMORE, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, v. 27, n. 2, pp. 3-9.
- FONT, V. e CONTRERAS, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, n. 69, pp. 33-52.
- GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 22, n. 2/3, pp. 237-284.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C. E FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, v. 39, n. 1-2, pp. 127-135.
- GODINO, J. D.; CONTRERAS, A. e FONT, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 26, n. 1, pp. 39-88.

- GODINO, J. D.; FONT, V. e WILHELMI, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, pp. 131-155.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C. e FONT, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae, Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 10, n. 2, pp. 7-37.
- GODINO, J. D. et al. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 27, n. 1, pp. 59-76.
- GONÇALVES, M<sup>a</sup>. C. M. (1996). *A influência da Metacognição na aprendizagem: uma intervenção realizada na aula de matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Católica Portuguesa. Faculdade de Ciências Humanas. Lisboa.
- GONZÁLEZ, F. (1999). Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos. *Epsilon*, SAEM Thales, n. 43-44, pp. 199-208.
- GUSMÃO, T. C. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. Tesis Doctoral – Departamento de Didáctica das Ciências Experimentales e das Matemáticas. Santiago de Compostela, España.
- GUSMÃO, T.C.; CAJARAVILLE, J. A. e LABRAÑA, P. A. (2005). Percepciones e indagaciones en el reconocimiento de estrategias meta-cognitivas en el contexto de resolución de problemas. In: V CIBEM: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Porto. Anais, período 17-22 julho de 2005, Porto/ Portugal.
- \_\_\_\_\_. (2005). Metacognitive processes and mathematical competencies of junior high school students. In: CONGRESSO EUROPEU DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Barcelona. Anais, 2005, Barcelona/España.
- MATEOS, M. (2001). *Metacognición y educación. Serie Psicología Cognitiva y Educación*. Buenos Aires, Aique Grupo Editor.

- POLYA, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. 15ª reimpressão. Serie matemáticas. Traducción, Prof. Julián Zugazagoitia. México, Trillas.
- RAMOS, A. B e FONT, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, v. 11, n. 2, pp. 233-265.
- SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Londres, Academic Press.
- SCHRAW G. (2001). "Promoting general metacognitive awareness". In: HARTMAN, H. J. (ed.). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice*. Nova York, Kluwer Academic Publishers.

*Recebido em mar./2009; aprovado em abr./2009*