Construtivismo e educação matemática

MARIA LUCIA FARIA MORO*

Resumo

O artigo examina aspectos que aproximam o construtivismo piagetiano da educação matemática. Após analisar contribuições capitais da epistemologia genética às questões da compreensão do conhecimento matemático, são lembrados estudos que verificaram e reinterpretaram proposições da Escola de Genebra no campo da educação matemática. Para ilustrar como contribuições contemporâneas, de origens e áreas diversas, remetem a pressupostos da epistemologia genética no campo da educação matemática, são discutidos resultados de pesquisas sobre a contagem, uma das dimensões essenciais da aprendizagem inicial da matemática.

Palavras-chave: epistemologia genética; educação matemática; aprendizagem inicial da matemática.

Abstract

This paper considers aspects that connect the Piagetian constructivism to mathematics education. Upon analyzing some central contributions of genetic epistemology to issues concerning the understanding of mathematical knowledge, studies that both verified and reinterpreted the Geneva School propositions on the field of mathematics education are remembered. Finally, there is a discussion focused on research results about counting, one of the most important dimensions of the initial learning of mathematics, in order to illustrate how contemporary contributions, coming from different sources and areas, refer to assumptions of genetic epistemology.

Keywords: *genetic epistemology; mathematical education; initial learning of mathematics.*

* Doutora em Psicologia, Psicologia da Educação – PUC-SP, Professora colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação – UFPR. E-mail: mlfmoro@sul.com.br.

Introdução

As duas expressões que compõem o título deste texto devem, de imediato, trazer ao leitor interrogações como as seguintes: "*construtivismo*... qual?". E "*educação matemática*... segundo que ponto de vista?"

Essas perguntas (e outras, provavelmente parecidas) são absolutamente plausíveis, esperadas, por causa da amplitude com que, atualmente, pode-se pensar o significado da corrente denominada construtivismo, como também da extensão e da complexidade da hoje reconhecida área da educação matemática. Logo, um primeiro e importante desafio que esse assunto aqui nos coloca é delimitar o terreno de tratamento do tema.

Escolhemos, então, oferecer ao leitor o que, em nosso entender, seriam as principais dimensões que, historicamente, aproximaram e aproximam esses dois terrenos.

Nessa perspectiva, de início impossível seria não recordar, no texto, contribuições capitais com que, em sua história, a epistemologia genética marcou as preocupações dos que se voltaram para questões referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática.

Na seqüência, há referências a algumas das principais posições que, apoiando-se em pressupostos da Escola de Genebra, verificaram e reinterpretaram tais pressupostos no campo da educação matemática, dando-lhes rumos específicos, renovados, e, por vezes, também acarretando malentendidos em sua divulgação para aplicação em sala de aula.

O artigo é encerrado com uma análise do que atualmente se conhece sobre a contagem, uma das dimensões capitais na aprendizagem inicial da matemática. Queremos, assim, ilustrar como resultados de investigações contemporâneas, de origens e áreas diversas, remetem-nos a pressupostos da epistemologia genética no campo da educação matemática.

As contribuições clássicas da Escola de Genebra. Ou a criança e o número

As relações da epistemologia genética com a educação matemática são inegavelmente marcadas pelo significado da publicação, em 1941, do livro *A gênese do número na criança*, de Jean Piaget e Alina Szeminzka (ver, por exemplo, Bideaud, Meljac e Fischer, 1991).

A partir de resultados dos estudos específicos ali relatados sobre a hipótese de que as categorias lógicas se constroem e, entre elas, a do número, Piaget e Szeminzka (1971) argumentam que as idéias numéricas mais elementares surgem de toda uma complexa e rica atividade da inteligência das crianças em suas relações de interação com seu meio-ambiente. Ou seja, vêm de relações que elas, as crianças, desde pequenas, podem retirar de suas ações sobre as coisas do mundo real; por exemplo, quando contam uma coleção de coisas quaisquer, quando comparam coleções em termos de bastante, pouco, mais, menos.

É defendida na obra a idéia de que relações como a da reunião (adição) aritmética das partes de um mesmo todo é uma das operações básicas na gênese da idéia de número. Esta adviria da síntese das relações simétricas das classes (reunião pelas semelhanças) com as relações assimétricas das séries (ordenação pelas diferenças), em um sistema cujas raízes repousam nas ações naturais de reunir (compor, adicionar) e separar (decompor, subtrair).

Essas investigações indicaram que a criança não constrói separadamente a adição e a subtração, tampouco constrói separadamente os dois sistemas numéricos, o cardinal e o ordinal. O número é, ao mesmo tempo, cardinal e ordinal e sua estrutura seria uma síntese operatória original, ultrapassando as estruturas lógicas elementares de tipo qualitativo.

A ampla divulgação de *A gênese do número na criança*, no final dos anos quarenta e nos anos cinqüenta, logo provocou vários trabalhos sobre implicações e derivações dos resultados ali relatados para a iniciação matemática das crianças, ainda que essa não fosse, absolutamente, a intenção de Piaget.

Foi assim que, já no bojo do movimento mundial da chamada modernização do ensino da matemática, houve a significativa proposição de Zoltan Dienes (1960) com ênfase no trabalho com os blocos lógicos.

Conseqüentemente, naquele período e em anos subseqüentes, entre várias propostas interessantes de aplicação escolar dos resultados de Genebra (recordar, por exemplo, Aebli, 1958), surgiram outras tantas, em que nem sempre houve, por exemplo, a compreensão pertinente da idéia de que o número adviria de uma síntese original das estruturas de classes e séries. Generalizou-se, entre estudiosos das mais diversas origens e na formação de educadores, a indicação equivocada de que o domínio operatório das classes e das séries seria pré-requisito para o ensino inicial dos números na escola.

Entrementes, no início dos anos sessenta, em Genebra, são retomadas as pesquisas sobre a epistemologia do número. São publicados resultados de um programa de trabalho desenvolvido no âmbito do Centro Internacional de Epistemologia Genética com o propósito de rever as questões referentes às condições da origem do número, em seus níveis mais elementares, mas conforme suas especificidades e sob a ótica das suas supostas relações com noções quantitativas elaboradas pelas crianças no plano de uma "aritmética natural". Ou seja, desenhou-se o objetivo de testar as interpretações anteriores a respeito, não mais a partir do exame das operações lógicas, mas sim a partir da compreensão que as crianças têm dos números e da utilização que deles fazem, isto é, seus outros caminhos de acesso ao número, além das classes e das relações.

Não foi então considerado adequado olhar apenas as práticas numéricas escolares das crianças, cristalizadas, impostas. Os autores optaram por verificar as estruturas em que elas se apóiam, a partir do fato de que as crianças, muito cedo, contam coisas, antes de receber na escola elementar um ensino aritmético sistemático. E, ao contá-las, recitando a seqüência numérica, utilizam sem saber: a correspondência biunívoca, a adição iterativa, a comutatividade da ordem das unidades.

Essas descobertas foram relatadas em três obras principais: *Problemas da construção do número* de Gréco, Grize, Papert e Piaget (1960); *Estruturas numéricas elementares* de Gréco e Morf (1962) e *A Formação dos raciocínios recorrenciais* de Gréco, Inhelder, Matalon e Piaget (1963).[1]

Dos estudos sobre as inferências aritméticas que apóiam modos de raciocínio da aritmética pré-operatória da criança pequena, relatados em *Problemas da construção do número*, e realizados por Pierre Gréco e Seymour Papert, temos os resultados seguintes cuja síntese Piaget orienta (Gréco, Grize, Papert e Piaget, 1960):

1. Ao (re)construir e representar a seqüência de números na composição de coleções, as crianças não demonstram uma aritmética pré-operatória no sentido de sistema estruturado e geral, anterior às estruturas operatório-concretas. Também não demonstram estruturas aritméticas ou intuições estritamente aritméticas. Mas apresentam, precocemente, algumas noções ou quase-estruturas numéricas: a conservação das

1 A tradução dos títulos dos originais em francês é de nossa responsabilidade, assim como o são as traduções dos demais trechos de originais em língua francesa, adiante citados.

quotidades, a composição limitada de relações iterativas por adição +1. Isso indica uma especificidade crescente da noção de número em construção em relação às noções lógicas correspondentes, significando que as construções aritméticas infantis são originais, mas são coniventes com o pensar lógico.

2. Os números não são fruto de capacidades inatas da criança: esta os elabora mediante atividades inferenciais de iteração que podem organizar. Nos níveis pré-operatórios, há uma indiferenciação entre pré-estruturas numéricas e as de classes e séries, passando depois à diferenciação. Há interações na construção de tais estruturas: classes, relações e números não se isolam em seus respectivos processos de elaboração, mas estes ocorrem entre estruturas ou pré-estruturas de conjunto. Logo, as origens do número operatório são anteriores aos agrupamentos das classes e das séries.

3. As pré-estruturas numéricas constituem uma aritmética quando integradas progressivamente às estruturas lógicas gerais. Por exemplo: para constituir uma aritmética parcial, a compreensão da iteração cardinal como lei de construção da série numérica por acréscimos (cada termo é igual ao precedente, acrescido de uma unidade: as iterações +1, +1...) é insuficiente. Também não foi observada progressão autônoma das inferências seriais que a iteração transformaria repentinamente em inferências aritméticas. Logo, há uma evolução conjunta desses diferentes sistemas de operações.

4. Desde níveis elementares, existe uma certa idéia de iteração que assegura as primeiras inferências quantitativas, mas estas não têm muita mobilidade (não levam diretamente a composições quaisquer na seqüência dos números naturais) e não são muito estáveis para resistir a certos efeitos seriais quando há deslocamento dentro das séries de coleções de quantidades diferentes. Também não são ainda reversíveis para assegurar a compreensão da seqüência das quantidades maiores.

5. A seqüência dos números (limitada aos que a criança pode verbalizar para contar) é progressivamente aritmetizada: o conjunto dos números conhecidos (e desconhecidos), culturalmente transmitidos, não fornece por si só as propriedades operatórias (ou mesmo as qualitativas) de caráter geral. Um exemplo desse fenômeno é o fato de que a relação iterativa $Sn=n+1$ (onde n é um número qualquer da série de números naturais, e S é seu sucessor: $11[10]=10+1$) e as inferências dali decorrentes,

Sn>n, não se aplicam com rigor e certeza além de um certo limite, este talvez ligado à capacidade de representação das crianças.

6. Assim, para as crianças pequenas, a síntese progressiva do número se faz por partes da numeração natural: primeiro até 6 ou 7, depois de 8 até 15 ou 16 elementos. As crianças efetuam operações sobre os pequenos números e as inferem, melhor precisando-os, mas também assim (re) criando novos números. Alguma generalização sobre a seqüência numérica só vai surgir aos 8 anos em média, sendo sua compreensão baseada no princípio da iteração. É a partir dessa idade que a iteração operatória aparece, entendendo a criança que n+1=Sn, e n=Sn-1 ou Pn+1=n (onde S é sucessor de n e P seu antecessor). Logo, a iteração operatória define os números da seqüência natural como cardinais ordenados, na síntese então da cardinalidade com a ordinalidade, síntese essa gradual, lenta, na aritmetização progressiva da série de números.

7. A progressão construtiva dos números tem na recorrência outra inferência importante que lhe atesta sua especificidade crescente. Esse tipo de raciocínio é tardio, apesar de dar sinais em idades anteriores (entre 6 e 8 anos). Sua elaboração faz-se com a construção do campo dos números quando o princípio do raciocínio e seu objeto apóiam-se um no outro. Logo, inferências recursivas não estão *a priori* formadas e não estão completas no plano das operações concretas: sujeitos mais jovens chegam à recursão móvel e liberam-se do material, porém não generalizam ao infinito. Suas constatações referem-se, primeiro, a cada número seguinte; só depois passam de um número dado a outro por aproximações, somente adiante fazendo tais passagens a distância. Para atingir um nível mais adiantado de recorrência, provavelmente, há que ser vencida a dificuldade de compreensão da idéia de infinito, de "número qualquer", por oposição à idéia de "os números".

8. Eesultados como esses sobre a iteração e a recorrência apontam para a complexidade das relações existentes em, por exemplo, 2+2=4, e que consistem em um feixe de operações empíricas e lógicas. Demonstram que, como comportamento, a aritmética concreta é, essencialmente, uma adaptação do sujeito.

Em *Estruturas numéricas elementares*, Gréco e Morf (1962) examinam a posição das noções numéricas em relação a outras noções quantitativas e à correspondência biunívoca e buscam a origem da conexidade na seqüência dos primeiros números inteiros presentes na atividade espontânea da criança pequena (os fatores que levam à organização progressiva desses números em um sistema conexo, por adição-subtrações iterativas de elementos). São significativos desses trabalhos os seguintes resultados:

1. A natureza pré-operatória (qualitativo-figurativa) dos pré-números manifesta-se quando as crianças compõem coleções iguais por correspondência biunívoca e compreendem igualdades numéricas, antes da conservação de quantidades. Essas igualdades, não-quantitativas, são as quotidades.

2. A noção de quotidade tem um significado além do aspecto serial da numeração (sua dimensão serial) porque esse aspecto, inerente à ação de enumerar, determina classes de equivalência numérica, antes da constituição operatória de invariantes quantitativos. É uma noção que tem *status* cardinal, mas quase-numérico porque ainda não tem o sistema de encaixes. Logo, a quotidade possui já certos aspectos fundamentais ao número e é etapa operacional da construção ativa das estruturas numéricas, dado que as crianças manifestam uma conservação da quotidade.

3. A correspondência biunívoca é esquema poderoso no quadro das afirmativas das crianças não-conservadoras numéricas sobre a igualdade da quantidade de dois conjuntos quando estes, mediante aquele esquema, são comparados a um terceiro, de referência. Nesse caso, a igualdade afirmada supõe a transitividade com a conservação do conjunto de referência. A ação de parear elementos um a um traz a equivalência como resultado, um passo relevante para a compreensão da noção de equivalência.

4. Dessa perspectiva, a idéia de quotidade é vista como passagem para a de quantidade numérica ou para a idéia de número: a criança admite a igualdade de coleções, atribuindo-lhes um numeral, mas este tem o caráter de denominador das coleções, sem haver a conservação das quantidades numéricas propriamente dita.

5. Outro esquema importante é o da contagem. Combinado com o da correspondência biunívoca, ele se revela essencial para a invariância numérica por transformar a realidade físico-espacial de uma coleção de objetos em uma realidade numérica, matemática. Na contagem de elementos de coleções há a exploração e a geração da correspondência biunívoca entre quantidades reais em um espaço. E é por meio da contagem que o sujeito chega à noção de quotidade como diferente da de quantidade, enquanto a esta ele chega pelo julgamento comparativo de duas coleções fisicamente presentes.

6. É da coordenação de esquemas como os de contar, separar, corresponder termo a termo, que o número surgirá como numerador de conjuntos, como instrumento de equivalência numérica, e não mais como denominador. Essa passagem para a equivalência quantitativa é mais precoce com material ou quantidades discretas justamente graças às possibilidades abertas por aquela correspondência.

7. Na construção da série numérica como conjunto conexo, os números se coordenam pela elaboração progressiva de relações de conexidade, em uma seqüência propriamente aritmética. A progressão dessas relações se faz de números seriados não conexos (não ligados entre si pela relação de sucessor, mas por uma relação qualitativa "maior que") para outro momento, em que a relação aditiva aparece de forma momentânea, local, entre números vizinhos na série, os quais temporariamente se tornam sucessores no sentido aritmético. O processo de adições reiteradas (1+1...) se faz passo a passo, levando à equalização, mas o número é ainda uma classe isolada, não é entendido como produto de adições iteradas. No terceiro momento, essas elaborações locais se generalizam e resultam na formação de uma estrutura conexa, total e estável.

8. A construção da série conexa dos números é assim tributária de duas estruturas de agrupamentos qualitativos: a do encaixe de relações de inclusão (entre os números e seus sucessores) e a das relações aditivas $Sn=n+1$, coordenadas progressivamente. É uma inter-relação que as condutas que caracterizam o avanço da construção da conexidade podem mostrar: primeiro, sem dificuldade a criança entende que as sucessivas adições e subtrações +1, -1 de elementos mudam a extensão de um conjunto. Porém, ela ainda não tem a idéia do número de elementos porque a quantidade total das coleções é avaliada em função da disposição espacial dos elementos dessas coleções. Em um segundo momento, esse critério é abandonado e a criança identifica a extensão do conjunto com a quantidade de elementos. Embora essa quantidade não seja ainda numérica, o número contado começa a ter seu papel (é um ponto atingido na enumeração), para comparar duas coleções, mas cada numeral não corresponde a certa quantidade de elementos. Somente depois os numerais passam a representar de fato quantidades de elementos seriados, mas não ainda conexos, com uma avaliação apoiada na coordenação das noções de: quantidade de elementos, números contados e seqüência verbal aprendida. A partir

desse ponto, a construção da conexidade ocorrerá em relação à estrutura do conjunto dos números.

9. A história natural da conexidade aritmética mescla-se, dessa forma, à da aritmetização progressiva da seqüência dos números. A conexidade não é retirada diretamente da aprendizagem da série verbalizada dos numerais ou dos elementos de coleções compostas pelos sujeitos, nem é uma superestrutura que se subordina depois a números previamente estruturados. Ela se origina dos mecanismos gerais que asseguram a construção progressiva dos próprios números naturais.

10. Outra propriedade, a comutatividade da adição (conservação da soma sob comutação dos termos) tem sua gênese precoce, em forma pré-operatória, quando a correspondência biunívoca entre duas coleções assegura a igualdade. Mas, sem o apoio dessa correspondência, na situação em que ações de equalização de excedentes devem ser efetuadas sem a visualização destes, a comutatividade é tardia. É quando se lhe impõem, ao mesmo tempo, a dissociação dos conjuntos e subconjuntos e a recomposição destes, com os excedentes passando a subconjuntos disjuntos de seus conjuntos de origem, uma composição reversível tão complexa quanto a das classes. Logo, essa comutatividade operatória da aritmética exige, ao mesmo tempo, as estruturas do pensamento operatório e a do número, não sendo estrutura autônoma.

Na terceira das obras desse ciclo, *A formação dos raciocínios recorrenciais*, Gréco, Inhelder, Matalon e Piaget (1963) examinam em crianças e adolescentes a gênese da recorrência ou das inferências recursivas em relação ao número qualquer e ao infinito. O raciocínio por recorrência sobre a série de números implica não só a compreensão da passagem de n a n+1, mas, ainda, a captação do caráter de "qualquer" de n e a possibilidade de seguir com n+1 ao infinito. Segue a síntese dos resultados das experiências sobre inferências aritméticas que exigem a coordenação dos aspectos cardinal e ordinal com apoio na estrutura iterativa da seqüência dos números naturais:

1. Sujeitos com menos de doze anos têm dificuldades em raciocinar com mobilidade sobre a série de números naturais na base de n+1, qualquer que seja n, como também em avaliar cardinais arbitrários. Mas, muito cedo, podem entender que avançar uma posição na série equivale a juntar um (+1), e que recuar uma posição equivale a tirar um (-1). No entanto, é somente no nível formal que coordenam as duas

operações nas dimensões cardinal e ordinal. Haveria assim uma espécie de "*quelconquification*" progressiva do número.

2. A relação iterativa assume papel importante na construção da noção de número, na compreensão das inferências a respeito, especialmente da recursão. É ela uma relação enriquecedora, pois seu emprego ocorre de várias maneiras, conforme o caso, na seqüência dos números naturais, esta como seqüência iterativa. É uma relação que se constrói a partir de características pontuais, para a idéia de que toda passagem de um número a outro pode ser decomposta em uma seqüência de passagens elementares +1, -1.

3. A evolução das iterações é assim delineada: a) *iteração construtiva* (5/6anos) que ocorre por aproximações e com uso limitado do procedimento de +1; b) a *iteração qualitativa* (6-8 anos), um processo em parte recursivo, com a seqüência dos números sendo formada sem a coordenação da cardinalidade com a ordinalidade. É uma forma de iteração que permite todas as inferências aritméticas, mas não implica estrutura de conjunto; c) *iteração operatória* (8-9 anos) em que há coordenação da cardinalidade com a ordinalidade, constituindo-se a seqüência de números como estrutura de um conjunto de cardinais ordenados; d) *iteração generalizada* (9-10 anos), horizontal, por ser generalizável a uma propriedade (as relações entre cardinais), mas não ao conjunto de propriedades coordenadas umas às outras por relações aritméticas (as relações aritméticas entre operações e entre os operadores numéricos): a criança sabe encontrar um divisor, mas não sabe determinar sua periodicidade, dado certo divisor; e) *iteração generalizante* (10-12 anos) quando a idéia de número qualquer é qualificada; f) *iteração recorrencial* (12-14 anos), quando a aritmética se formaliza.

4. A hipótese de que a iteração da ação de fazer a correspondência mais do que a correspondência figural levaria a avanços expressivos na compreensão das equivalências e de sua conservação não foi apoiada, mas sim a de que o sucesso precoce em provas com iteração pode ser devido a mecanismos que, no terreno da iteração das ações, prefigurariam operações numéricas (o que levaria a alguma forma elementar de recorrência). Contudo, permanece a questão: a recorrência seria ligada, desde seu início, à natureza do número ou seria forma tardia e superior de raciocínio?

5. O exame da relação das equivalências entre coleções de elementos (por correspondências repetidas) identificou uma forma elementar de recorrência, tão precoce que precede as conservações. Seria um raciocínio

ligado ao próprio número pela repetição da ação, com transmissão de uma posição (ordem) ao número seguinte nas ações sucessivas ("... se antes era igual de 1 a 1, agora continuam iguais..."). Logo, trata-se da propriedade da ação repetida de juntar um elemento em correspondência biunívoca.

6. Para raciocinar, então, sobre o número qualquer e sobre toda a série, o sujeito precisa de uma relação de vicariância que, generalizando-se, tende à combinatória e lhe permitiria coordenar as transformações ordinais e as cardinais. Mas, por outro lado, essas novas operações não resultam na criação de novos entes matemáticos, como seria o caso para outros esquemas operatórios específicos do plano hipotético-dedutivo: servem de instrumentos para possibilitar uma abstração reflexionante, coordenando, sob a forma de raciocínios sobre a série, as diversas inferências recursivas que, em níveis anteriores, serviram para construir essa série por aproximações. Nesse caso, a recorrência se reduz ao aspecto inferencial da série como tal.

7. Nesse processo, a conexidade própria da série de números se constrói como inferência importante relativa ao número. Segundo ela, cada elemento, enquanto distinto de outro, é conectado a este outro na composição. Primeiro, ela é concebida como seriação qualitativa (sem diferenciação, sendo o número entendido como estrutura lógica qualitativa), para depois se especificar em suas propriedades quantitativas específicas.

8. Aritmetizar quantidades significa, portanto, considerar as partes ou elementos em jogo como tantas quantas unidades equivalentes, iteráveis, e que são, ao mesmo tempo, distintas. Na criança, a aritmetização progressiva da série de inteiros é conhecida verbalmente antes de ser compreendida.

9. A comutatividade da adição é também verificável como propriedade de uma operação cujo resultado independe da ordem. Envolvida na construção do número, a compreensão da comutatividade evidencia a importância da correspondência biunívoca na aritmetização progressiva da criança. Ela seria decisiva à passagem da iteração centrada na ação para a iteração como operação recorrencial de transformação.

Construtivismo, Piaget, matemática na escola: influências, desdobramentos, interpretações

Após a publicação da trilogia sobre a epistemologia do número e em decorrência das aproximações de Piaget ao trabalho do grupo Bourbaki, surgiram algumas manifestações do autor suíço sobre aspectos relativos ao ensino da matemática, a maioria delas escritas sob encomenda.

Assim, por exemplo, em texto de 1965, Piaget (1969) aponta ser o problema central do ensino das matemáticas o ajuste entre as estruturas inteligentes próprias do sujeito e os programas ou os métodos de ensino da matemática escolar. A partir de sua hipótese do parentesco entre as estruturas operatórias naturais em construção e as estruturas gerais da matemática contemporânea propostas pela Escola Bourbaki, o autor ali insiste em que se devam buscar formas mais adequadas de provocar a passagem daquelas estruturas naturais, ainda não objeto de reflexão pelo sujeito, para a reflexão sobre elas. Daí a necessidade de intervenções do professor que levem os alunos prioritariamente à reflexão e, então, a descobrir noções, relações, propriedades matemáticas, em vez de ser-lhes imposta a elaboração adulta, pronta, formalizada a respeito.

Sobre aquelas formas de intervenção, vem do próprio Piaget, em texto original de 1962, uma crítica sobre a aquisição de conceitos, na escola, ocorrer exclusivamente via intervenção didática do adulto. Diz o autor:

> Eu não penso, ao contrário de Vygotsky, que os novos conceitos, mesmo no nível escolar, sejam sempre adquiridos pela intervenção didática do adulto. Isto pode acontecer, mas há uma forma muito mais produtiva de ensino: a da chamada escola "ativa" que se esforça em criar situações que, se não são "espontâneas" em si mesmas, evocam uma elaboração espontânea de parte da criança, e em que se busca, ao mesmo tempo, provocar seu interesse e apresentar o problema de tal modo que ele corresponda às estruturas que ela mesma construiu. (Piaget, 1985, p. 134)

Nessa perspectiva, segue Piaget (1969), o ensino deve levar à objetivação das operações do aluno, quando é importante o papel da linguagem matemática.

Depois de sublinhar a relevância da descoberta, das buscas do próprio aluno, no mesmo texto, Piaget alerta, porém, para os malentendidos e riscos de uma tal posição na prática (ênfase em aspectos figurativos no uso de materiais, por exemplo), como também chama a atenção para experiências produtivas a respeito, em realização na época.

Em entrevista de 1969, Piaget sustenta serem as matemáticas um sistema de construções que, com apoio de início nas coordenações das ações e operações do sujeito, faz-se em uma seqüência de abstrações reflexionantes em níveis sempre progressivos. Assim, não haveria dicotomia entre a razão e a natureza no caso da matemática, dado que a razão humana é parte da natureza:

> [...] para mim, biólogo,... as matemáticas são a união das possibilidades e o real, incluindo a razão humana... as matemáticas estão na natureza, a natureza englobando a razão humana; a razão humana as elabora com um organismo, um sistema nervoso e todo o organismo que o envolve, e que faz parte da natureza física, de tal sorte que há um acordo entre as matemáticas e a realidade através do organismo... (Bringuier, 1978, p. 91)

Com Brun (1996), vemos que, nesses textos, Piaget deixou claro não ser um pedagogo, embora sempre uma participante ativo, nos anos cinqüenta e sessenta, de comissões internacionais e colóquios que resultaram na reforma internacional do ensino da matemática, em alguns casos com publicações decorrentes e com expressiva influência no movimento francês da Didática das Matemáticas, então em plena gestação. Porém, também vemos, nos mesmos textos, ditos pedagógicos, o quanto Piaget discute epistemologia, a epistemologia da matemática.

Para Brun (ibid.) é possível resumir a posição de Piaget sobre o ensino da matemática tomando os pontos seguintes: a) a epistemologia é essencial em toda a reflexão sobre o ensino da matemática; b) a ação prepara a abstração lógico-matemática, posto que esta dela deriva no quadro de uma lógica da ação; c) a teoria matemática e o desenvolvimento espontâneo da construção das estruturas de conjunto são convergentes; d) o ensino da matemática deve levar à reflexão sobre as estruturas operatórias.

Tomando como exemplo a teoria psicogenética de Piaget e a da didática das matemáticas, Brun (1994) analisa como a psicologia do desenvolvimento cognitivo passou de ciência de referência externa para ciência participante em pesquisas sobre o ensinar matemática. Lembra que trabalhos derivados da teoria piagetiana ou se colocaram conforme uma concepção "aplicativista" (aprendizagem de estruturas lógicas, por exemplo), ou tomaram a teoria como ciência de referência a ser inserida em outro quadro teórico original, como é o caso das didáticas das matemáticas.

Brun (1994; 1996) entende que a epistemologia genética e a didática das matemáticas têm questões comuns se, e conforme a idéia da transformação do conhecimento pelo aluno, é assumida a especificidade do fenômeno da transmissão cultural dos saberes na escola, mesmo porque são três os níveis pelos quais a dimensão cognitiva faz parte da análise didática: o da filiação e das rupturas dos conhecimentos no âmago dos campos conceituais; o das conversões recíprocas entre saberes constituídos e conhecimentos espontâneos, nas situações representativas das diferentes práticas e funções do saber; o da organização e reorganização pessoal dos saberes pelos alunos no tempo.

Logo, de parte da didática, há necessidade de apoio em uma posição epistemológica sobre a relação sujeito-objeto. É então que a didática das matemáticas assume uma posição construtivista e interacionista, posto que, conforme Gérard Vergnaud (apud Brun, 1994), é a ação na situação fonte e critério decisivo da elaboração conceitual, enquanto que a linguagem tem seu papel fundamental no discurso teórico presente nos conceitos, mas não é seu critério decisivo, tal como o seria para Vygotsky.

Brun (1994) aponta a teoria de Vergnaud sobre os campos conceituais como a mais adequada tentativa atual de dar conta daquelas relações, no ensino das matemáticas, por causa do *status* nela atribuído, então, à ação no conhecer. O significado dessa contribuição, como proposta apoiada na teoria de Piaget e elaborada no âmbito da matemática, leva-nos a dela aqui tratar especificamente.

Embora com preocupações comuns às de programas de pesquisa desenvolvidos em outros países, como os anglo-saxônicos, o movimento da didática das matemáticas, desenvolvido na França a partir dos anos sessenta, teve como apoio outra tradição filosófica (Bachelard e Canguilhem) e outra tradição científica (Piaget) (Artigue, Gras, Laborde e Tavignot, 1994; Vergnaud, 1981).

Propondo-se a descrever e a explicar os fenômenos relativos ao ensino e à aprendizagem daquele campo específico, o movimento apareceu como reação às desilusões com posições que consideravam suficiente saber matemática para poder ensiná-la, e com o "romantismo" dos que apostavam na força maior da atividade do aluno, na sua descoberta mais livre do saber no contexto do ensino.

As proposições adotadas da base piagetiana (a importância da atividade do sujeito na construção do conhecimento; a caracterização dos invariantes operatórios, o modelo de equilibração na dialética da interação, o lugar, nesse processo, da tomada de consciência da ação) trazem junto o reconhecimento de seus limites, a saber: o desinteresse de Piaget pela aquisição de conhecimentos escolares, pelo papel ali dos conteúdos desses conhecimentos, a par do interesse maior pelas estruturas evolutivas, pelas operações, sem destaque à evolução específica dos conhecimentos em situações específicas; a exagerada separação entre o conhecimento matemático e a realidade física (Vergnaud, 1981).

Para sua contribuição, parte Vergnaud (1981; 1989-1990; 1990) de algumas proposições de base, a saber:

- o conhecimento tem função adaptadora; logo, um conceito só faz sentido para a criança em situações-problema, sem que essa dimensão pragmática seja reducionista e signifique perda da dimensão teórica dos conceitos. Afirma Vergnaud (1989-1990, p. 56): “a resolução de problemas é a fonte e o critério do saber operatório”.
- o estudo da aquisição dos conhecimentos na ótica psicogenética exige, não o exame em separado da construção de diversos conceitos, mas em domínios amplos, correspondentes às diversas situações de sua elaboração no tempo.
- toda construção conceitual supõe a elaboração de um conjunto de representações simbólicas em inter-relação. Mas deve-se fazer a diferenciação entre o conceito e sua representação, entre os significados conceituais e os sistemas de significantes que os explicitam. A ausência dessa diferenciação em matemática traz, muitas vezes, a idéia de que os símbolos e as operações sobre eles são a essência do conhecimento matemático.

Para Vergnaud (ibid.), um conceito se define com apoio no seguinte tripé: o conjunto de situações que lhe dão sentido (referência); o conjunto de invariantes que constituem suas propriedades (significado); o conjunto de formas simbólicas ou lingüísticas que permitem suas representações (significante).

A integração dessas perspectivas com a da construção psicogenética desses conceitos leva Vergnaud (1981; 1989-1990; 1990) a propor sua *teoria dos campos conceituais*, estes concebidos como um espaço de problemas, de classes de problemas “o conjunto de situações cujo domínio requer variedade de conceitos, procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (Vergnaud, 1989-1990, p. 62).

Para o autor (Vergnaud, 1981), um dos méritos da idéia de campo conceitual é o de permitir o exame, de forma mais coordenada, dos conceitos envolvidos na compreensão de várias categorias de problemas, bem como seus procedimentos de tratamento e simbolismos representativos. É, assim, uma idéia que reabilita a de conteúdo do conhecimento.

Dois constructos piagetianos fundamentais são tomados e revisitados para a elaboração da idéia de campos conceituais: o de esquema e o de invariantes operatórios.

O conceito de esquema (Vergnaud, 1990) permite explicar a organização da atividade do sujeito em dada situação. Logo, está no âmago da atividade adaptadora das estruturas cognitivas, permitindo melhor caracterizar os diversos momentos da psicogênese em determinado campo conceitual. Funciona, assim, como unidade de análise das ações em uma situação: quando a situação já é dominada pelo sujeito, o esquema é visto como uma organização invariante da conduta para essa classe de situações; quando a situação não é dominada, ocorrerá a construção de novo esquema a partir da transformação do anterior.

Portanto, além de regras de ação, o esquema comporta necessariamente invariantes operatórios e inferências, estas indispensáveis à aplicabilidade do esquema, enquanto universal temporalizado, em cada situação (Vergnaud, 1990; 1996). É exemplo lembrado pelo autor o da enumeração, que traz dois invariantes necessários ao seu funcionamento: a bijeção e a cardinalidade (considerar o último numeral pronunciado como representando a grandeza de toda a coleção).

Vergnaud (1990; 1996) enfatiza, na elaboração do conhecimento, a importância da relação dialética entre saberes de ação e saberes teóricos na perspectiva de que a conceitualização do real se faz a partir da ação, com defasagem entre o plano da ação e o da teoria. É nesse quadro que o autor considera interessante a idéia de esquema para o estudo das relações entre aqueles saberes e de suas defasagens, idéia que torna viável entender como a ação é possível em domínios nos quais a teoria é pobre ou inexistente, e como a ação pode alimentar-se da teoria e vice-versa. É fundamental nessa dinâmica o processo paralelo e complexo da explicitação, da teorização dos conhecimentos pelo sujeito, o que transforma então saberes "em ato" em saberes teóricos. Nessa transformação, as ações comportam uma parte de automatismo e uma de decisão consciente, algo inerente ao funcionamento cognitivo.

Em decorrência, não somente do movimento da didática das matemáticas na França, mas também de outras tendências desenvolvidas em outros países, a literatura contemporânea sobre o processo ensino-aprendizagem da matemática é pródiga em resultados, trazendo implicações fundamentais ao terreno da formação de professores. E, há muito, já é reconhecida a área chamada de psicologia da educação matemática.

Nesse quadro, aparecem muitos estudos sobre a psicogênese de vários conceitos da matemática, junto com descobertas significativas sobre a elaboração do conceito de número, em gestação desde idades as mais precoces em nosso tipo de cultura (por exemplo, Bideaud, Meljac e Fischer, 1991; Brissiaud, 2003; Brissiaud e Sander, 2007; Hiebert, 1986; Kamii e De Clark, 1985; Nunes e Bryant, 1997; Nunes, Bryant, Pretzlik, Bell, Evans e Wade, 2007).

Nesse terreno, a produção científica brasileira tem acompanhado a internacional em qualidade e em quantidade (por exemplo, Brito, 2001; 2006; Carraher, Carraher e Schliemann, 1988; Moro e Soares, 2005; Nunes, Campos, Magina e Bryant, 2005; Schliemann, Carraher, Spinillo, Meira, Falcão e Acioly-Regnier, 1997; Spinillo e Lautert, 2006).

Ligados ao tema, vários estudos sobre a representação notacional matemática apontam as peculiaridades das construções em curso desde idades precoces, dos sistemas de marcas numéricas, bem como o complexo caminho da compreensão das notações numéricas conforme o valor posicional. Dados significativos permitem afirmar que a construção das escritas numéricas tem sua psicogênese própria, o que não se confunde com o processo de construção de noções descrito pelas pesquisas sobre a epistemologia do número (Janvier, 1987; Lerner e Sadovsky, 1996; Sinclair, Mello e Siegrist, 1990; Sinclair e Scheuer, 1993; Sinclair, Tièche-Christinat e Garin, 1994; Teixeira, 1996).

Como não é possível, no espaço deste artigo, analisar detalhadamente em que medida os diferentes eixos de tão extensa produção se aproximam, afastam-se, sustentam ou não as proposições centrais da epistemologia genética no quadro da educação matemática, exploramos, no item seguinte, referências sobre a contagem infantil para ilustrar a forma pela qual marcas do construtivismo piagetiano estão ainda presentes no exame de um esquema essencial à iniciação matemática das crianças.

Contar, pensando... Sobre um dos mais importantes esquemas da construção do número

É sabido que contar é algo que crianças, em geral e das mais diversas culturas, fazem ou podem fazer em dado momento de seu desenvolvimento psicológico. À primeira vista, o ato de contar aparece como singelo e naturalmente esperado entre os pequenos.

Neste texto, a literatura contemporânea das diferentes áreas da psicologia e do terreno da educação matemática muito já nos indicou sobre o quanto a contagem, desde seus inícios em crianças pequenas, é um comportamento rico, ao entremear de modo complexo aspectos procedurais e conceituais, como também os referentes aos planos da sua representação oral e sua escrita. Nesse entremeado, todos esses aspectos guardam suas especificidades e trazem dificuldades próprias ao domínio progressivo daquele comportamento. Relembrando rápida e incompletamente alguns desses estudos, são exemplos importantes os que colocam em pauta:

- a identificação de diferentes formas hierárquicas de contagem em crianças, ou de procedimentos protonuméricos e numéricos no contar (Baroody, 1991; Baroody e Ginsburg, 1986; Droz e Paschoud, 1981; Gelman e Meck, 1991; Saada-Robert, 1991). São formas e procedimentos que envolvem princípios ou operações mentais em jogo na atribuição de significado às ações infantis de contar em direção aos primeiros cálculos matemáticos e ao progresso das representações numéricas (Brissiaud, 1991, 2003; Fischer, 1991; Steffe, 1991; Steffe e Von Glasersfeld, 1985).
- a presença de dificuldades e resistências das crianças na compreensão do sistema de numeração oral e escrita, compreensão necessariamente em jogo na progressão do contar como esquema significativo. Por exemplo: o apoio de palavras-número na seqüência numérica contada e recontada e, adiante, cardinalizada (Fuson, 1991); a influência das características dos sistemas de nomes dos números na aprendizagem das primeiras operações aritméticas com apoio na contagem com os dedos. É especialmente destacada a regularidade dos sistemas asiáticos de nomenclatura (Fuson e Kwon, 1991), o que gerou crítica interessante sobre a relativa importância daquelas regularidades (Park, 2000); os erros infantis, lexicais e sintáticos, na transco-

> dificação de números, por causa da generalização inadequada de regras coerentemente construídas pelas crianças para certos casos típicos, o que é compatível com a idéia de que os sistemas de numeração falada e escrita, produtos culturais, são objetos de conhecimento que elas, as crianças, constroem (Lerner e Sadovsky, 1996; Orozco-Hormaza, 2005; Seron, Deloche e Noël, 1991; Sinclair, Tièche-Christinat e Garin, 1994).

De seu lado, a literatura de marca antropológica mostra o contar como presente em etnias as mais diferentes do planeta, e que utilizam outras formas de contagem em bases diversas, que não a de base 10, a predominante na cultura contemporânea.

É interessante saber que os diferentes grupos étnicos que não utilizam o sistema decimal dispõem de formas de contagem para avaliar a quantidade de elementos de coleções; em outras palavras, para medi-las do ponto de vista quantitativo. Logo, são formas que, em cada cultura, foram criadas e transformaram-se por conta de necessidades específicas, para resolver problemas do dia-a-dia, os comerciais, por exemplo (Crump, 1993). Mas, ainda que aparentemente mais elementares ou menos poderosas que a contagem de base dez, formas de contagem em outras bases (vinte, doze, conforme partes do corpo ou orientadas por sistemas especiais de marcas ou pequenas coleções de objetos) organizam-se em sistemas específicos e guardam, assim, sua própria lógica, segundo a análise de especialistas.

Por sua vez, estudos da neuropsicologia sobre mecanismos e correlatos cerebrais em jogo na cognição numérica, realizados por meio de neuro-imagem (ver, por exemplo, Houdé, Mazoyer e Tzourio-Mazoyer, 2002), já respondem afirmativamente a hipóteses anátomo-funcionais relativas a certas atividades numéricas básicas. Dentre resultados do gênero, destaca-se o lugar de uma rede parieto-premotora esquerda naquelas realizações matemáticas, com os sulcos parietais traduzindo mecanismos de representação e de tratamento de quantidades numéricas. No entanto, a especificidade propriamente numérica daquela relação não é vista ainda como suficientemente esclarecida; nem há elementos definitivos sobre a contribuição de processos neurológicos verbais na solução dos fatos aritméticos básicos, pois, na recuperação desses fatos, áreas da linguagem, as pré-silvianas, não estão totalmente implicadas, sendo mesmo desativadas em casos de adição e de multiplicação. Porém, no que concerne à atividade de contar, há fatos a favor da hipótese de que a referida implicação do córtex parietal pode estar traduzindo tratamentos numéricos apoiados em rede de coordenação manual. Essa rede originar-se-ia da manipulação de quantidades e da contagem dos dedos, dado que o córtex parietal faz parte do circuito neural que controla os movimentos dos dedos e a forma das mãos.

Contribuições como as aqui lembradas têm, sem dúvida, enriquecido a discussão sobre a força dos diversos paradigmas que explicam a contagem, suas origens, seu lugar na iniciação numérica infantil. Por um lado, tais contribuições alimentam formulações teóricas que defendem ser o advento da contagem nas crianças de ordem inata, advogando a presença de um "sentido numérico" inerente ao funcionamento mental humano e mesmo a zonas cerebrais previamente programadas para tal; mas elas também clamam haver fortes marcas culturais na origem daquela ação de quantificação.

Entretanto, há evidências e argumentos expressivos a favor de posições construtivistas a respeito do tema. Para estas, a ação infantil sobre o mundo seria guia ou ingrediente essencial para interpretá-lo matematicamente. O contar aparece, então, como um dos esquemas mais elementares para a matematização infantil. Nessa linha, aparecem argumentos relevantes a favor de paradigmas interativos naquela construção, segundo uma perspectiva neoconstrutivista, a que dá margem a contrapartidas culturais expressivas e necessárias, mas não suficientes, à elaboração numérica (Bideaud, Meljac e Fischer, 1991; Brissiaud, 2003).

As considerações acima expostas levam-nos a assumir as idéias que seguem, como apoio ao que pensamos sobre o que nos ajuda a aprender a contar:

– primeiro, ainda que organizado conforme diferentes sistemas, o contar tem sido, para a humanidade, em sua história, uma das formas de avaliar, de medir quantitativamente a realidade.
– segundo, para cumprir sua finalidade como medida de quantidades, os diversos sistemas de contagem que existem ou existiram em diferentes grupos humanos claramente transformam-se no tempo, assumindo diversas formas de organização.
– terceiro, criar, organizar e transformar tais sistemas decorre da constante atividade cognitiva do homem ao defrontar-se com problemas de quantificação da realidade, atividade que, por

sua vez, nessa dinâmica, também se transforma. Logo, haveria nos diferentes sistemas de contagem, não importando o grau de sofisticação que eles venham ou vieram a atingir, a marca da constante atividade humana de interpretar a realidade, segundo organizadores mentais que lhe são típicos e que se fazem neste mesmo processo.

– quarto, não se pode mais ver a ação de contar como separada ou oposta à sua representação oral e escrita porque são importantes as evidências a favor da idéia de que a contagem, uma das aquisições matemáticas básicas, é uma das formas de o ser humano interpretar, conceituar numericamente o real, logo, de representá-lo de alguma forma.

Assim, aceitando a idéia da contagem como medida de quantidades e como atividade organizada em sistemas em constante transformação e decorrentes da história cognitiva humana, vemos como muito influentes os paradigmas explicativos que trazem a idéia de uma construção do ser humano como processo em curso. Para esse processo, estão em cena relações complexas entre aportes de ordem interna, típicos do funcionamento dos indivíduos (os de ordem neurológica e da hereditariedade), com os de ordem externa, sejam os traços epistemológicos típicos do contar como quantificação do real (um objeto de conhecimento), sejam as contingências próprias de seus usos culturais.

Então, como ajudar uma criança a aprender a contar?

- se o contar é um esquema de medir quantitativamente a realidade e, como tal, ele se faz e se transforma na medida em que as crianças exercem essa ação sobre os elementos da realidade, ensinar a contar significa provocar, favorecer tais ações das crianças, o que subentende provocar, simultaneamente, a elaboração progressiva de sua representação conforme as formas (verbais, não verbais) que lhes são possíveis por conta de seu desenvolvimento. Logo, só se aprende a contar contando.
- porém, desse contar nada resultará de cognitivamente produtivo para as crianças se elas não forem levadas a pensar sobre o que estão fazendo, se não atribuírem significados às suas ações, se não estabelecerem relações entre tais ações e seus resultados. Tais significados e relações, considerados em seus componentes operatórios e representacionais, são em si mesmos frutos de

uma construção pela criança com o concurso de ingredientes socioculturais e individuais em interdependência. Nesse quadro, conforme a idéia do contar como medir, é essencial que as crianças comparem quantitativamente coleções, verifiquem a equivalência numérica entre elas com base em uma unidade constante (Crump, 1993). Por exemplo, quando uma criança pequena aponta cada uma das 5 bolinhas de gude que recebe e diz "um, dois, três, quatro, cinco", cabe ao educador provocar sua significação desta ação (de juntar um mais um) para compreender que há ali "cinco bolinhas", o mesmo ocorrendo quando ela aponta e diz para outra coleção "um, dois, três, quatro, quatro bolinhas", e em que e por que tais coleções são diferentes (uma a menos, uma a mais).

- mas, em que consiste, para as crianças, o que chamamos de produtividade cognitiva do contar? Como uma forma de medida quantitativa do mundo real, temos que o contar está entre os diversos esquemas envolvidos na conceitualização do número. Nessa perspectiva, a idéia de número, propriamente dita, vem de um processo de compreensão da quantidade numérica como cardinal de coleções. Isso se dá pela organização, em sistemas, de diversos esquemas, entre os quais, o de composição e de decomposição de elementos de uma coleção como unidades (Piaget e Szeminska, 1971). Ao progredir, então, em suas formas de contar, as crianças compreendem cada elemento como unitário e que pode ser "juntado a" ou "separado de" outros. Estabelecendo, essas relações, entre outras, as crianças dar-se-ão conta de que novas coleções de extensão diversa podem ser obtidas daquelas suas ações, do que podem inferir quantidades numéricas diversas. Esse gênero de relações, das quais derivam os números (e, adiante, a idéia de número), são fundamentais ao ser humano em sua interpretação matemática da realidade. São, assim, essenciais ao aprendizado escolar da matemática.

Em suma, o que ajuda uma criança a aprender a contar é fazê-la contar, usando o sistema de sinais correspondentes em situações e atividades diversas para que ela seja levada a avaliar, a comparar quantitativamente coleções, a elaborar tais inferências numéricas como resultados de suas ações. E, dessa forma, provocar-lhe a elaboração de princípios de ordem lógica, inerentes ao número.

Contudo, essa posição somente faz sentido se o contar for visto como um esquema que não se reduz ao recitar a seqüência dos nomes dos números, mas que contém, necessariamente, a ação de correspondência entre cada conjunto de elementos e a respectiva palavra-número, quando cada elemento designado ou indicado pelo dedo, pelo olhar, guarda seu sentido unitário. É no quadro dessa interdependência de relações de números e de relações de elementos, no caso da aprendizagem inicial dos números naturais (Vergnaud, 1985), que o contar é construído como esquema significativo de medir quantitativamente a realidade, na matematização do mundo pela criança.

Considerações finais

Para encerrar este texto, deixamos ao julgamento do leitor a posição de que o construtivismo de Jean Piaget segue, de diversas formas, marcando bastante muitas linhas de investigação sobre a elaboração do conhecimento no âmbito da matemática escolar. Essas marcas são explícitas em proposições e resultados de vários pesquisadores, mas são implícitas em tantos outros, alguns dos quais avançam discordâncias ou posições denominadas pós ou neopiagetianas.

Porém, que marcas seriam essas? São marcas que concernem, sobretudo, a proposições ou hipóteses que compõem o chamado núcleo duro da teoria, entre as quais: a ação do sujeito é ingrediente fundamental do conhecer, pois o conhecimento é construído na interação do indivíduo com seu meio ambiente; essas construções se processam psicogeneticamente, resultando em modos próprios de conhecer, ligados à dinâmica da interação e à peculiaridade de cada objeto de conhecimento; a interação se faz em um processo dinâmico de trocas, cujo funcionamento é complexamente regulado, para atender à necessidade de adaptações contínuas do indivíduo ao seu meio-ambiente, do sujeito aos seus objetos de conhecimento.

Esse conjunto de proposições, muito sinteticamente apresentadas acima, é continuamente colocado à prova quando pesquisas sobre a elaboração de conceitos de um domínio específico como o da matemática, entre outros, as tomam como referência. Dentre elas, as relativas aos diversos aspectos do funcionamento cognitivo ganham cada vez mais espaço entre as que são reexaminadas e se sustentam.

É exemplo o interesse sobre o papel, no processo de conceitualização, da reflexão do sujeitos sobre sua própria ação, interpretado por Piaget (1974) como a tomada de consciência da ação, inerente ao funcionamento cognitivo do ser humano. No caso da contagem, usado acima como ilustração, seria, portanto, essencial à criança refletir sobre sua ação de contar e sobre o que dela resulta. Portanto, trata-se da hipótese de que as crianças constroem esse esquema em sua interação com realidades que, segundo seu meio ambiente, podem ser contadas. Na perspectiva da Escola de Genebra, o processo de o sujeito tomar consciência de suas ações de conhecer e do que resulta dessas ações é indispensável à conceitualização, uma vez que "a tomada de consciência de um esquema de ação transforma este em um conceito, consistindo essa tomada de consciência então, essencialmente, em uma conceitualização" (ibid., p. 261).

Resta-nos destacar o quanto tem sido produtivo à epistemologia genética ter suas proposições mais e mais testadas em domínios específicos como os dos conteúdos escolares, os da matemática em particular, não apenas por conta da verificação de suas possibilidades de aplicação no terreno da aprendizagem escolar, mas, especialmente, pelas ocasiões ímpares que tais verificações constituem como campo de prova da força de suas hipóteses principais, tendo em vista sua transformação necessária enquanto modelo teórico sobre a origem do conhecimento humano.

Referências

AEBLI, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Trad. F. F. Monjardin. Buenos Aires, Kapelusz.

ARTIGUE, M.; GRAS, R; LABORDE, C. e TAVIGNOT, P. (eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

BAROODY, A. J. (1991). "Procédures et principes de comptage: leur développement avant l'école". In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

BAROODY, A. J. e GINSBURG, H. F. (1986). "The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic". In: HIEBERT, J. (ed.). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Londres/Hillsdale, Lawrence Erlbaum.

BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.) (1991). *Les Chemins du Nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

BRINGUIER, J.C. (1978). *Conversando com Jean Piaget*. Trad. J. M. Guedes. Rio de Janeiro, Difel.

BRISSIAUD, R. (1991). "Un outil pour construire le nombre: les collections-témoins de doigts". In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

_____(2003). *Comment les enfants apprennent à calculer*. 2è. ed. Paris, Retz/VUEF.

BRISSIAUD, R. e SANDER, E. (2007). "Conceptusalisation mathématique, résolution de problèmes et enseignement des opérations arithmétiques à l'école: une étude longitudinale au CE1". In: MERRI, M. (coord.). *Activité Humaine et Conceptualisation: Questions à Gérard Vergnaud.* Toulouse, Presses Universitaires du Mirail/Ardeco (CD-ROM).

BRITO, M. R. F. de (org.) (2001). *Psicologia da educação matemática. Teoria e pesquisa*. Florianópolis, Insular.

_____(org.) (2006). *Solução de problemas e a matemática escolar*. Campinas, Alínea.

BRUN, J. (1994). "Évolution des rapports entre la psichologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques". In: ARTIGUE, M.; GRAS, R.; LABORDE, C. e TAVIGNOT, P. (eds.). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

_____(1996). *Constructivisme et didactique des mathématiques*. Genebra, Université de Genève (mimeo).

CARRAHER, T.; CARRAHER, D. W. e SCHLIEMANN, A. D. (1988). *Na vida dez, na escola zero*. 3 ed. São Paulo, Cortez.

CRUMP, T. (1993). *La antropología de los números*. Trad. P. G. Crespo. Madri, Alianza.

DIENES, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. Londres, Hutchinson Educational.

DROZ, R. e PASCHOUD, J. (1981). Le comptage et la procédure "(+1) itéré" dans l'exploration intuitive de l'addition. *Révue Suisse de Psychologie*, n. 40, pp. 219-237.

FISCHER, J. P. (1991). "Le subitizing et la discontinuité après 3". In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

FUSON, K. C. (1991). "Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans". In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

FUSON, K. C. e KWON, Y. (1991). "Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels: effets sur les premiers calculs de l'enfant". In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

GELMAN, R. e MECK, E. (1991). "Premiers principes et conceptions du nombre". In : BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

GRÉCO, P.; GRIZE, J. B.; PAPERT, S. e PIAGET, J. (1960). Problèmes de la construction du nombre. *Études d' Epistémologie Génétique*, v. XI. Paris, PUF.

GRÉCO, P.; INHELDER, B.; MATALON, B. e PIAGET, J. (1963). La formation des raisonnements récurrentiels. *Études d'Epistémologie Génétique*, v. XVII. Paris, PUF.

GRÉCO, P. e MORF, A. (1962). Les Structures Numériques Elémentaires. *Études d'Epistémologie Génétique*, v. XIII. Paris, PUF.

HIBERT, J. (ed.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge*: *the case of mathematics*. Londres/Hillsdale, Lawrence Erlbaum.

HOUDÉ, O.; MAZOYER, B. e TZOURIO-MAZOYER, N. (dir.) (2002). *Cerveau et psychologie. Introduction à l'imagerie cérébrale anatomique et fonctionnelle*. Paris, PUF.

JANVIER, C. (ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres/Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

KAMII, C. e De CLARK, G. (1985). *Young children reinvent arithmetic: implication of Piaget's theory*. Nova York, Teachers College Press.

LERNER, D. e SADOVSKY, P. (1996). "O sistema de numeração: um problema didático". In: PARRA, C. e SAIZ, I. (orgs.). *Didática da matemática. Reflexões psicopedagógicas*. Trad. J. A. Llorens. Porto Alegre, Artes Médicas.

MORO, M. L. F. e SOARES, M.T.C. (orgs.) (2005). *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba, Editora UFPR.

NUNES, T. e BRYANT, P. (1997). *Crianças Fazendo Matemática*. Trad. S. Costa. Porto Alegre, Artes Médicas.

NUNES, T.; BRYANT, P.; PRETZLIK, U.; BELL, D.; EVANS, D. e WADE, J. (2007). "La comprehension des fractions chez les enfants". In: MERRI, M. (coord.). *Activité Humaine et Conceptualisation: Questions à Gérard Vergnaud*. Toulouse, Presses Universitaires du Mirail/Ardeco.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. e BRYANT, P. (2005). *Educação matemática. Números e operações numéricas*, v.1. São Paulo, Cortez.

OROZCO-HORMAZA, M. (2005). "Os erros sintáticos das crianças ao aprender a escrita dos numerais". In: MORO, M. L. F. e SOARES, M. T. C. *Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba, Editora UFPR.

PARK, M. (2000). Linguistic influence on numerical development. *The Mathematics Educator*, v. 10, n. 1, pp. 19-24.

PERRET, J. F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres*. Berna, Peter Lang.

PIAGET, J. (1985). "Commentaires sur les remarques critiques de Vygotsky". In: SCHNEWLY, B. e BRONCKART, J. P. (dir.). *Vygotsky aujourd'hui*. Neuchâtel/Paris, Delachaux et Niestlé.

______(1967). *Logique et connaissance scientifique*. Paris, Gallimard.

______(1969). *Psychologie et pédagogie*. Paris, Denoel.

______(1974). *La prise de conscience*. Paris, PUF.

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. (1971). *A gênese do número na criança*. Trad. C. M. Oiticica. Rio de Janeiro, Zahar.

SAADA-ROBERT, M. (1991). "Comprendre la microgenèse du nombre: analyse des séquences". In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; SPINILLO, A. G.; MEIRA, L. L.; FALCÃO, J. T. R. e ACIOLY-RÉGNIER, N. M. (1997). *Estudos em psicologia da educação matemática*. 2 ed. Recife, Editora Universitária da UFPE.

SERON, X.; DELOCHE, G. e NOËL, M. P. (1991). "Un transcodage des nombre chez l'enfant: la production des chiffres sous dictée". In: BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

SINCLAIR, A.; MELLO, D. e SIEGRIST, F. (1990). "A notação numérica na criança". In: SINCLAIR, H. (org.). *A produção de notações na criança*. Trad. M. L. F. Moro. São Paulo, Cortez.

SINCLAIR, A. e SCHEUER, N. (1993). Understanding the written system: 6 year-olds in Argentina and Switzerland. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 1-23 (separata).

SINCLAIR, A.; TIÈCHE-CHRISTINAT, C. e GARIN, A. (1994). "Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres?". In: ARTIGUE, M.; GRAS, R.; LABORDE, C. e TAVIGNOT, P. (orgs.). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

SPINILLO, A. G. e LAUTERT, S. (2006). "O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática". In: MEIRA, L. L. e SPINILLO, A. G. (orgs.). *Psicologia cognitiva. Cultura, desenvolvimento e aprendizagem*. Recife, Editora Universitária UFPE.

STEFFE, L. P. (1991). "Stades d'apprentissage dans la construction de la suite des nombres". In *:* BIDEAUD, J.; MELJAC, C. e FISCHER, J. P. (eds.). *Les chemins du nombre*. Lille, Presses Universitaires de Lille.

STEFFE, L. P. e Von GLASERSFELD, E. (1985). Helping children to conceive of number. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, n. 6, p. 269-303.

TEIXEIRA, L. R. M. (1996). "Aprendizagem inicial do valor posicional dos números: conceituação e simbolização". In: NOVAES, M. H. e BRITO, M. R. F. de (orgs.). *Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica*. Coletâneas da ANPEPP 5. Rio, ANPEPP.

VERGNAUD, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 2, n. 2, pp. 215-232.

______(1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. 3 ed. Berna, Peter Lang.

______(1989-1990). Psichologie du développement et didactique des mathématiques. Un exemple: les structures additives. *Petit x,* n. 22, pp. 51-69.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 10, n. 23, pp. 133-170.

______(1996). "Au fond de l 'action, la conceptualisation". In: BARBIER, J. M. (dir.). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, PUF.

Recebido em nov./2008; aprovado em dez./2008