Usos de la historia de las matemáticas en la educación matemática. El caso del teorema de Pitágoras

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
guacaneme@pedagogica.edu.co
Profesor Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. El Teorema de Pitágoras ofrece un potente ámbito matemático e histórico-epistemológico desde el cual ilustrar de manera precisa usos no triviales de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática, ello en tanto que constituye una pieza invaluable que expresa una manera de hacer matemáticas y ha sido estudiado desde diferentes enfoques. El estudio de los discursos matemáticos y metamatemáticos al respecto del teorema, brinda exquisitos niveles de conciencia sobre las características de las Matemáticas y sus objetos, sean éstas y éstos escolares o, erróneamente llamados, formales.

Palabras Claves: Historia de las Matemáticas, Educación Matemática, Teorema de Pitágoras, Conocimiento del profesor de Matemáticas.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy, sin temor a equivocarnos, podemos afirmar que existe una línea de investigación que estudia la relación entre la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática [HM–EM] y que en Colombia se está avanzando tanto en la realización de trabajos investigativos en ésta, como en su reconocimiento de facto; una evidencia de ello es la inclusión de tal relación como una de las áreas temáticas del 12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Es precisamente en este marco contextual en el que se propone este curso, el cual pretende ilustrar, de manera concreta, algunas especificidades de la relación HM–EM a través del estudio, desde una perspectiva histórico-epistemológica, del famoso, pero paradójicamente poco conocido, Teorema de Pitágoras.

Sin lugar a dudas, este teorema constituye un hito en la Historia de las Matemáticas y en la matemática escolar; sin embargo, el escaso conocimiento de diseñadores curriculares y profesores sobre el discurso histórico relacionado con el teorema no permite que en los procesos de aprendizaje de éste se incorporen elementos histórico-epistemológicos esenciales y consustanciales al mismo. En efecto, en el ámbito escolar el Teorema de Pitágoras termina siendo un algoritmo para relacionar tres números asociados a algunas las medidas de un triángulo rectángulo, con usos abusivos y poco rigurosos de su generalización. Se deja de lado así, entre otras, su potencial impacto en el desarrollo del pensamiento cuantitativo no numérico, en el reconocimiento de la estructura hipotético-deductiva de las Matemáticas o en la conciencia sobre la naturaleza de sus diferentes pruebas y generalizaciones.

Antes de entrar en materia, debemos precisar que el curso no es ni de Historia de las Matemáticas, ni de Matemáticas, ni de Educación Matemática, lo cual no obsta para que en el mismo se estudien y reflexione sobre discursos provenientes de éstos y otros campos investigativos metamatemáticos, y con toda razón, sobre los discursos matemáticos.

2. REFERENTES TEÓRICOS

Como lo reseñamos hace algunos años (Guacaneme, 2007), la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" [HM–EM] ha sido objeto de amplia reflexión y en las últimas décadas se ha convertido en objeto de investigación; asimismo afirmamos que esta relación se expresa en al menos tres ámbitos relacionales: HM–Enseñanza de las matemáticas, HM–Investigación en Didáctica de las Matemáticas y HM–Conocimiento del profesor de Matemáticas. Este marco de reflexión e investigación constituye el marco general sobre el cual se estructura el trabajo que se propone para el presente curso, el cual aborda de manera específica el estudio del Teorema de Pitágoras, en tanto hito histórico y escolar.

Al respecto del teorema en cuestión, vale la pena reconocer que culturas milenarias, matemáticamente muy desarrolladas, disponían de un excelso conocimiento del mismo, incluso antes de que éste fuese objetivado en una teoría matemática hipotético-deductiva como la expuesta magistralmente por Euclides en sus Elementos. Este hecho pone de relieve un aspecto fenomenológico del teorema, con consecuencias indiscutibles pero poco exploradas o implícitas: su existencia, justificación y aplicación, previas a su aparición en el marco de una teoría. Este aspecto evidencia, entre otros: el carácter paramatemático del teorema, el cual sorprende a quienes asumen que las aplicaciones de las matemáticas devienen de su constitución teórica o conciben la existencia de los objetos matemáticos sólo cuando éstos se han adscrito a una teoría; el carácter praxeológico, que inquieta a quienes conciben la práctica hipotética-deductiva como la única práctica matemática válida, en desdeño de otras modalidades de práctica; o, el carácter indubitable, relacionado con la existencia de una justificación o intuición sobre la validez del teorema, previa a su demostración (la cual tampoco demuestra su carácter verdadero, aunque sí su deducibilidad). Estos rasgos del teorema constituyen no un caso excepcional, sino más bien normal para muchos objetos matemáticos, hecho que se advierte cuando se estudia su historia, más que su herencia[1].

Respecto de su lugar en Elementos, específicamente su papel como proposición 47 y 48 del Libro I, el Teorema de Pitágoras se puede reconocer como piedra angular y empresa de dicho libro (Campos, 1994), o como algoritmo de la suma de superficies, vía la construcción de lo que hoy se reconoce como una estructura algebraica para las magnitudes geométricas (Recalde, en prensa). Para argumentar a favor de la primera de estas interpretaciones basta hacer un seguimiento a la línea deductiva utilizada por Euclides y reconocer que más de la mitad de las proposiciones del Libro I son empleadas en la prueba de la proposición 47. Advertir la intención euclidiana de dotar a las magnitudes geométricas de una cierta operatoria y de exhibir los algoritmos geométricos para realizar las operaciones con las cantidades de las magnitudes (sin necesidad de acudir a sus medidas), configura un argumento a favor de la segunda interpretación. La existencia de al menos dos interpretaciones del papel de un mismo teorema o proposición en el marco de una misma teoría, como las reseñadas, ofrece un interesante panorama de discusión acerca del sentido de una obra matemática, así como de la objetividad de la interpretación histórica y del hecho histórico.

Estudiar las proposiciones 47 y 48 del Libro I de Elementos ofrece una referencia específica para significar la actividad de estudio de las Matemáticas; a través de ello se evidencia la necesidad de reconocer la estructura argumentativa y procedimental de la demostración del enunciado, como una condición sine qua non para que la comprensión de un elemento de la teoría trascienda la comprensión del enunciado. En esta dirección se advierte que se puede comprender el enunciado de un teorema, al punto incluso de usarlo apropiadamente en el ámbito teórico o en el pragmático, sin comprender su prueba; ello lleva de inmediato a reflexionar acerca del sentido de la prueba, cuando en el horizonte de inteligibilidad se ubica al aprendizaje de las matemáticas, más que a su comunicación bajo los cánones hipotético-deductivos.

Bajo la consideración de este horizonte, el estudio de la prueba lleva indudablemente al reconocimiento de las partes de ésta, definidas desde una perspectiva funcional; de esta manera, se logra la distinción del enunciado [prótasis], exposición [ékthesis], delimitación [diorismós], preparación [kataskeue], demostración [apodeixis] y conclusión [sympérasma], como pasos de la prueba en una matemática que prioriza el razonamiento sintético, al menos en su versión comunicativa. Así mismo, se reconoce la falta de explicitación de una actividad matemática constructiva en donde la línea creativa se vea reflejada y se distinga de la línea argumentativa.

Bajo el mismo horizonte se advierte el papel discursivo, y no auxiliar, de las figuras geométricas propias en la prueba misma[2], con lo cual es ineludible encarar la discusión

[1] En al menos tres documentos (Grattan-Guinness, 2004a, 2004b, 2005) el destacado historiador inglés describe estas dos facetas de la Historia de las Matemáticas.
[2] El papel de la figura en *Elementos* es discutido ampliamente por Gardies (1997, pp. 127-155) en el capítulo titulado *Le rôle de la figure chez Euclide et Archimède*.

acerca de los procesos de visualización, como parte de los procesos de enunciación, en la comprensión de la argumentación euclidiana. No parece plausible seguir y validar la prueba euclidiana de la proposición 47 sin incorporar como parte sustancial del discurso hipotético-deductivo a la figura que contiene tanto el triángulo rectángulo y los cuadrados construidos sobre sus lados, como a la recta (en tanto construcción auxiliar) que deja el camino expedito para la demostración. Por otra parte, el papel de la figura en la proposición 48 brinda un panorama de reflexión no menos fructífero; en efecto, la imposibilidad de disponer de partida de una figura que contenga tanto el triángulo rectángulo como los cuadrados, ofrece una evidencia más del papel discursivo de la figura geométrica en la obra euclidiana.

Ahora bien, trascendiendo las dos proposiciones reseñadas del Libro I, Euclides nos ofrece a través de la proposición 31 del Libro VI de sus Elementos una interesante generalización del Teorema de Pitágoras para la misma magnitud geométrica (la cantidad de superficie), pero en relación con la semejanza de las figuras rectilíneas construidas sobre los lados del triángulo rectángulo. El estudio de la perspectiva de generalización allí implicada, lleva consustancialmente a considerar otras posibles perspectivas de generalización del teorema, empleadas como fundamento de explicaciones y aplicaciones en las matemáticas escolares, cuya racionalidad puede resultar relativamente obvia, pero su rigor matemático queda en entredicho. Tal es el caso del uso abusivo del Teorema de Pitágoras en Trigonometría para “deducir” la identidad trigonométrica básica, $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ o en Geometría analítica para calcular la distancia usual entre dos puntos, dadas sus coordenadas cartesianas.

Por otra parte, considerar otras demostraciones del teorema, entendidas como demostraciones en el marco de otras teorías, conduce a reflexionar, como lo planteó ya Bagni (2008) para el caso de una proposición de la teoría de números euclidiana, en el papel cognitivo y epistemológico del contexto histórico-cultural sobre la manera de pensar matemáticamente. Igualmente, lleva a reflexionar acerca de si en efecto la finalidad de la prueba es la demostración de la verdad y sobre el carácter perenne de ésta.

Indiscutiblemente, todo lo anterior debe ser objeto de estudio desde los tres ámbitos aludidos para la relación HM–EM. Sin embargo, incluir los resultados de tal estudio en este documento impondría un carácter prescriptivo al curso e impediría a los asistentes/participantes del mismo (potenciales lectores de este texto) construir de manera libre sus propias conclusiones e implicaciones. No obstante lo anterior, consideramos que la conciencia sobre el conocimiento matemático y su naturaleza es la mayor ganancia que desde lo estudiado se espera que logren quienes participen del curso. Sin duda dicha conciencia ofrecerá sus réditos en la educación en matemáticas, en la investigación en Didáctica de las Matemáticas y en el conocimiento del profesor de Matemáticas.

3. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

El curso se desarrollará en tres sesiones. En la primera, inicialmente se recapitularán los conocimientos de los asistentes sobre el teorema, tanto desde la perspectiva escolar como desde el enfoque histórico. Posteriormente, se observará el documental "Pitágoras, mucho más que un teorema" de la serie Universo Matemático, producida en el año 2000 por el programa La aventura del saber, de La 2 de Televisión Española. De éste se destacarán algunas ideas y se realizará una reflexión acerca de la información histórica importante del documental, desde la perspectiva de los asistentes; asimismo se hará una referencia específica a las características de la demostración del Teorema de Pitágoras allí presentada.

En la segunda sesión se estudiará la demostración del Teorema de Pitágoras expuesta en Elementos de Euclides, particularmente las proposiciones 47 y 48 del Libro I. En este sentido se estudiarán: los aspectos matemáticos per se, las particularidades semánticas de los enunciados o prótasis de las proposiciones y de las figuras en el discurso demostrativo, algunos resultados de la indagación histórico-epistemológica sobre la estructura lógica de tales proposiciones y sobre la estructura hipotético-deductiva de las mismas y un nivel de generalización del teorema a través del enunciado de la proposición 31 del Libro VI de Elementos.

En la última sesión se examinarán superficialmente otras demostraciones relativamente difundidas (v.g., la demostración en el Chou Pei, la atribuida a Pitágoras, la presentada por Pappus, la propuesta por Bhaskara, la expuesta por Leonardo da Vinci y la demostración de Garfield) a partir de lo cual se discutirá la aparente ineficacia de la empresa demostrativa, una vez que se dispone de una prueba avalada por la comunidad matemática. Para finalizar se hará un inventario de los conocimientos y reflexiones logradas y se realizará una reflexión acerca de cómo éstos se incorporan a los tres ámbitos de expresión de la relación HM–EM, citados en el primer párrafo de la sección 2 de este documento.

Referencias bibliográficas

- Bagni, G. T. (2008). A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-Cultural Perspective. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8(3), 217-232.
- Campos, A. (1994). Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki. Bogotá.
- Gardies, J.-L. (1997). L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.
- Grattan-Guinness, I. (2004a). History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education. American Mathematical Monthly, 111(1), 1-12.
- Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: Distinguishing its history from our heritage. Historia Matemática, 31(2), 163–185.

- Grattan-Guinness, I. (2005). History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education. In Mathematics and the Historian's Craft (pp. 7-21).
- Guacaneme, E. A. (2007). Una aproximación a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática". Unpublished Essay.
- Recalde, L. C. (en prensa). Lecturas de Historia de las Matemáticas. Cali: Universidad del Valle.

Volver al índice
Cursos