La Historia y las Nuevas Tecnologías en la enseñanza de los conceptos de máximos y mínimos

Mª Teresa González Astudillo
maite@usal.es
Universidad de Salamanca

Resumen. A lo largo de este curso se hará una revisión de algunos de los problemas más importantes, más significativos, más interesantes y más famosos que fueron estudiados por los matemáticos a lo largo de la historia de las matemáticas y que se refieren a la determinación de máximos y mínimos. Se pretende dar una panorámica de la importancia que tuvieron estos problemas para el avance de algunos de los conceptos esenciales del Análisis Matemático, descubrir los diferentes fenómenos con los que están relacionados estos problemas y las variadas heurísticas que permitieron obtener su solución.

Palabras clave: historia de la matemática, nuevas tecnologías, cálculo diferencial, máximo, mínimo

1. Introducción

La historia de la matemática puede proporcionar muchas formas de resolución de problemas diferentes de las utilizadas hoy en día. Esos procedimientos pueden ocultar el pensamiento que hay detrás de ellos: "por eso, se debe realizar un ejercicio de descifrado para entender lo que se hizo, cuál fue el razonamiento que se oculta, y cuál es el sustrato matemático que hace que un método inusual sea válido y posiblemente general" (Arcavi e Isoda, 2007).

El conocimiento de la historia nos puede ayudar a comprender mejor el sentido de las matemáticas. Integrar la historia en la matemática nos permite colocar el desarrollo de las matemáticas en el contexto científico y tecnológico de un momento particular, en la historia de la ciencia y de las ideas y también considerar la historia de la enseñanza de las matemáticas desde perspectivas que yacen fuera de los límites de la disciplina. La comprensión cultural y el avance promovido por la historia tiene algún vínculo con la necesidad de humanizar la educación matemática "introducir a los alumnos en una aventura humana".

Los problemas que se presentan en este cursillo son producto de una revisión histórica procurando obtener la versión original de estos problemas y cuando se ha encontrado mucha diferencia con la terminología actual se han adaptado a ella con fines exclusivamente didácticos y temporales.

2. Estrategia metodológica

Se plantea como objetivo general: dar una panorámica de los diferentes problemas de máximos y mínimos a lo largo de la historia de la matemática así como de los métodos usados para su resolución.

Siendo los objetivos específicos:

- Plantear diferentes problemas relacionados con máximos o mínimos
- Mostrar diferentes contextos relacionados con los problemas de máximos y mínimos.
- Integrar contenidos matemáticos relativos a diferentes ramas de las matemáticas: Geometría, Álgebra, Cálculo, Trigonometría,…
- Comprender la evolución de los conceptos matemáticos implicados en la resolución de estos problemas.
- Repasar algunas anécdotas históricas relacionadas con los máximos y los mínimos.

Al mismo tiempo que se van repasando las diferentes etapas de la historia de la matemática se van resolviendo algunos problemas clásicos. Se expondrá el método de solución, se irán resolviendo los problemas planteados y se reflexionará sobre las características del método utilizado y su potencialidad en la enseñanza.

3. Desarrollo del curso

Los términos **máximo y mínimo** se utilizan para indicar que el valor de la función en un punto es mayor/menor que otros. Dichos valores se llaman también **extremos**, término que fue sugerido por el matemático alemán du Bois-Reymond (1831-1889) y que combina los dos conceptos de máximo y mínimo. También se asocian con el término **óptimo** para referirse al mejor, el perfecto, que ha sido un término adoptado universalmente en los últimos tiempos.

La teoría que trata de los problemas concernientes a magnitudes máximas o mínimas se llama **teoría de los problemas extremos** o **teoría de optimización.** Si en los problemas se trata de calcular la mejor influencia en algunos procesos o fenómenos que se pueden controlar bajo ciertas limitaciones, la teoría de los problemas extremos se denomina de **control óptimo** y si trata de problemas de trasportes en los que hay que minimizar una función sujeta a limitaciones por medio de funciones lineales, se llama **programación lineal**.

3.1.- El primer problema de máximos y mínimos

El problema más antiguo relacionado con este tipo de puntos está recogido en la Eneida de Virgilio (70-19 a.C.) en la que se cuenta la siguiente historia:

> Rige este imperio la reina Dido, que abandonó su ciudad de Tiro, huyendo de su hermano; larga es la historia de estas disensiones, muchos sus accidentes, pero sólo recordaré los puntos principales. Era Dido esposa de Siqueo, el más rico señor de tierras entre los Fenicios, y a quien profesaba la infeliz grande amor; virgen se la había dado su padre al unirla con él bajo felices auspicios; pero, como reinase en Tiro su hermano Pigmalión, el más perverso de los hombres, suscitose entre ellos un odio terrible, y el impío Pigmalión, ciego con el amor del oro, asesinó al desprevenido Siqueo delante de los altares, despreciando el dolor de su amante hermana. Por largo tiempo tuvo encubierto el crimen, e inventando mil pretextos, burló con vanas esperanzas a ala triste esposa; más vió ésta en sueños la imagen de su marido insepulto, el cual, levantando la faz, maravillosamente pálida, le descubrió su pecho, traspasado por el hierro al pie del ara, y le reveló todo el oculto crimen de su familia. Persuádela en seguida a acelerar la fuga y abandonar su patria, y para auxilio del viaje le descubre antiguos tesoros que tenía enterrados, en cantidad inmensa de plata y oro. Agitada con esto, Dido preparaba su fuga y reunía a los que habían de acompañarla señalados entre los que más detestaban o temían al tirano; apoderándose de unas naves que por dicha estaban aparejadas, y las cargan de oro; las riquezas del avaro Pigamlión van por el mar, y una mujer capitanea la empresa. Llegaron los fugitivos a estos sitios, donde ahora ves las altas murallas y el alcázar, ya comenzado a levantar de la nueva Cartago, y compraron una porción de terreno, tal que pudiera toda ella cercarse con la piel de un toro, ... (Eneida, Libro I, pp. 16-17)

Dido determinó el terreno cortando la piel en estrechas tiras, las ató una a continuación de otra y aprovechando la costa, determinó una semicircunferencia (Pérez y otros, 2000).

ACTIVIDAD 1:

Suponiendo que la piel fuese equivalente a la superficie de un cilindro de 2m. de altura y 0,5 m de radio

- ¿Cuál sería la superficie del cilindro?
- Imaginemos que se cortasen tiras de 2 mm ¿cuál sería la superficie de cada una de esas tiras?
- ¿cuántas tiras se podrían hacer?
- Si unimos una tira a otra y formamos con esa unión una semicircunferencia ¿qué longitud tendría?
- ¿Cuál sería el radio de esa semicircunferencia?
- ¿Qué superficie podríamos encerrar? ¿A cuántas hectáreas equivale esa superficie?

Formulada esta cuestión de una forma puramente matemática este problema se conoce como el **problema de Dido** o el **problema clásico isoperimétrico** que se podría enunciar como sigue:

> Entre todas las curvas planas de longitud dada, la que encierra la mayor área es la circunferencia.

De forma paralela, en el espacio tridimensional, se puede considerar lo que los antiguos matemáticos griegos conocían con el nombre de **propiedad isoepifánica de la esfera**, es decir, la propiedad de que la esfera es el cuerpo geométrico que encierra mayor volumen entre todas las figuras que tienen la misma superficie lateral.

El primero que se considera que resolvió el problema isoperimétrico fue Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.), e investigadores de la Historia de la ciencia atribuyen a Zenodoro (180 a.C.) el haber desarrollado completamente la teoría de los isoperímetros en el siglo II a.C. en un tratado sobre las figuras isoperimétricas hoy desaparecido. Posteriormente, otros pensadores de la Antigüedad se interesaron por este problema. Herón de Alejandría (126?

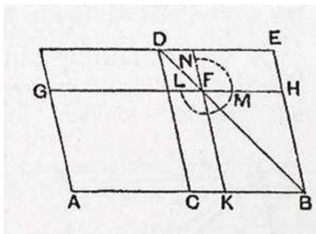
a.C.-50? a.C.), Ptolomeo (90-168), Pappus (300-360), Theón de Alejandría (370-415),... El primero que proporcionó una demostración rigurosa de la propiedad del máximo de la circunferencia y de la esfera fue H. A. Schwartz (1843-1920) basándose en las aproximaciones que hicieron los antiguos griegos al problema.

3.2.- Los difíciles inicios con la Geometría como única herramienta

Uno de los primeros problemas (Tikhomirov, 1986), también de carácter geométrico, formulados en relación con los máximos y los mínimos se debe a Euclides (aprox. 325 a. C.-265 a. C.) y se puede encontrar en sus *Elementos*.

ACTIVIDAD 2:

Leer, analizar y discutir la proposición 27 del libro VI de los Elementos de Euclides.

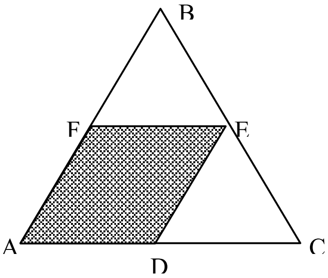


Enunciado (Prótasis)
De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramos semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de una recta, el (paralelogramo) mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto. (p. 98)
Exposición (ékthesis)
Sea AB la recta y divídase en dos partes iguales en el (punto) C y aplíquese a la recta AB el paralelogramo AD deficiente en la figura paralelograma DB construida sobre la mita de AB, es decir CB;
Determinación (diorismós)
Digo que, de todos los paralelogramos aplicados a AB y deficientes en las figuras semejantes y situadas de manera semejante a BD, el mayor es AD.
Construcción (kataskeue)
Pues aplíquese a la recta AB el paralelogramo AF deficiente en la figura paralelograma FB semejante y situada de forma semejante a DB;
Determinación (diorismós)
Digo que el paralelogramo AD es mayor que el paralelogramo AF.
Demostraciòn (apódeixis)
Pues como el paralelogramo DB es semejante al paralelogramo FB, están en torno a la misma diagonal. Trácese su diagonal DB y constrúyase la figura.
Pues bien, dado que el paralelogramo CF es igual a FE, y FB es común, entonces el (paralelogramo) entero CH es igual al paralelogramo entero KE. Pero CH es igual a CG, porque AC es también igual a CB. Por tanto GC es también igual a EK. Añádase a ambos el paralelogramo CF; entonces el paralelogramo entero AF es igual al gnomon LMN, de modo que el paralelogramo CE, es decir, el paralelogramo AD es mayor que el paralelogramo AF.
Conclusión (syumpérasma)
Por consiguiente de todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramas semejantes situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el (paralelogramo) mayor es el aplicado a la mitad de la recta.

ACTIVIDAD 3:

Vamos a utilizar el método anterior para resolver el siguiente problema que es una adaptación a la terminología actual:

Dado un triángulo ABC, inscribir un paralelogramo ADEF (EF││AB, DE││AC) de área máxima.



Según la proposición de Euclides, el paralelogramo que resuelve esta situación, es aquel que pasa por los puntos medios de los lados de triángulo tal como se ha representado en la figura 2. Vamos a ir construyendo la demostración tal como la hizo él por reducción al absurdo partiendo de dicho paralelogramo, y demostrando que no hay ningún otro paralelogramo que cumpla las condiciones del problema y cuya área sea mayor que la del escogido.

- Dibujemos otro paralelogramo que cumpla las condiciones del problema AD'E'F'.
- Llamemos G al punto de intersección de las líneas D'E' y EF y G' al punto de intersección de DE y E'F'
- Hay que demostrar que el área del paralelogramo AD'E'F' es menor que el área del paralelogramo ADEF y que justamente la diferencia es el paralelogramo EG'E'G.
- Demostrar que los triángulos ABC y GE'E son semejantes
- Escribe la razón de proporcionalidad entre las bases y las alturas de los dos triángulos___________________________________
- Expresa la fórmula que nos permite calcular el área del paralelogramo FF'G'E_______________________________________
- Expresa la fórmula que nos permite calcular el área del paralelogramo D'DEG____

- ¿Cómo son esas dos áreas?________________________
- ¿Qué relación hay entre el área de ADEF y el área de AD’GEG’F’?_____
- ¿Qué podemos concluir? ____
- ¿Qué conocimientos matemáticos se han usado para resolver este problema? ¿Qué elementos son esenciales o necesarios para poder realizar una demostración de este tipo?____

Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.), en su libro *Sobre la esfera y el cilindro* (225 a.C.), propuso el siguiente problema:

> Dada una esfera con centro en A, y consideremos una de las cinco figuras de la que hablamos con superficie total equivalente a la de la esfera; digo que la esfera es la que encierra mayor volumen.

ACTIVIDAD 4:

Tratemos de seguir el razonamiento que hizo Arquímedes. Este razonamiento se basa en la relación entre el volumen de la esfera y el volumen del cono.

- Recordemos:
  - La fórmula de la superficie de una esfera
  - La fórmula del volumen de la esfera
  - La fórmula del volumen del cono.
- Imaginemos otra esfera inscrita en uno de esos poliedros y tangente a él. ¿cuál es mayor la superficie de esa esfera o la del poliedro?
- La superficie del poliedro era la misma que la de la esfera A, luego la superficie de la esfera A es __________ que la de la esfera inscrita al poliedro.
- El radio de la esfera A será _____________ que el de la esfera inscrita.
- Consideremos el cono cuya base es un círculo equivalente a la superficie de la esfera A (y cuya altura es igual al radio de la esfera A). El volumen de este cono es igual a ____________
- Consideremos una pirámide con la misma base y de altura el radio de la circunferencia inscrita al poliedro. Su volumen será ___________

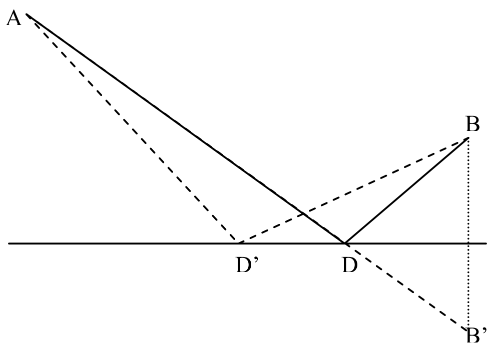
- ¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide y el del cono?
- El volumen de la esfera A y el del cono son _____________
- El volumen de la pirámide y el del poliedro son ______________
- ¿Qué conclusión podemos sacar?___________________
- ¿Qué diferencias existen entre esta demostración y la anterior?_________

Antes de resolver el siguiente problema vamos a recordar otro problema muy conocido y también muy antiguo. Se cree que este problema apareció por primera vez en un libro de Herón de Alejandría (126? a.C.-50? A.C.), al que casi todos conocemos por su famosa fórmula para el cálculo del área de un triángulo en función de sus lados a, b y c $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro del triángulo. El libro en el que apareció este problema se llamaba *Espejos* y no se sabe exactamente la fecha en la que se escribió pero se cree que data del primer siglo antes de Cristo. Aunque el libro desapareció nos han llegado noticias de él a través de comentarios realizados por otros matemáticos posteriores.

> Dados dos puntos A y B que están del mismo lado de una línea l. Encuentra un punto D en l tal que la suma de las distancias de A a D y de D a B sea mínima.

ACTIVIDAD 5:

Utiliza el siguiente diagrama para hacer la demostración.



Como aplicación del problema anterior vamos a revisar otro problema que apareció en el libro de Viviani (1622-1703) *Sobre los valores máximos y mínimos* (1659), que fue el primer libro que se puede considerar que se escribió exclusivamente en relación con el tema que nos ocupa. El problema es el siguiente:

En el plano de un triángulo, encuentra un punto tal que la suma de las distancias a los vértices del triángulo sea mínima.

Cavalieri (1598-1647) y Torricelli (1608-1647) se interesaron también en este problema, de forma que al punto en cuestión se le denomina **punto de Torricelli** y Fermat (1601-1665) también lo estudió. El interés de tantos científicos eminentes en un problema de apariencia elemental es una confirmación de que motivos estéticos, a menudo, estimulan la creatividad de hecho la solución de casi todos estos problemas sobre máximos y mínimos conducen a figuras, cuerpos y magnitudes consideradas perfectas (circunferencia, esfera, cuadrado,..). Fue Steiner (1796-1863) en el siglo XIX el que divulgó este problema, junto con otros similares, y por ello se le conoce como el **problema de Steiner**.

ACTIVIDAD 6:

Vamos a intentar resolver este problema para un triángulo con un ángulo mayor de 60º

- Dibuja un triángulo ABC, de forma que el ángulo en C sea mayor de 60º.
- Rota el triángulo alrededor de C 60º en el sentido de las agujas del reloj. Se obtiene otro triángulo A'B'C'
- Escoge un punto cualquiera del interior del triángulo ABC y llámalo D. Calcula su transformado D' por la rotación
- La longitud AD+BD+CD es igual a la longitud de A'D'+BD+DD' ¿por qué?
- ¿Cuándo esa longitud será mínima?

3.3.- El Álgebra permite allanar el camino.

No sólo encontramos problemas relacionados con cuestiones de tipo geométrico. Por ejemplo, Niccolo Tartaglia (1500-1557) propuso el siguiente relacionado con el álgebra:

Dividir el número 8 en dos partes, tales que el resultado de multiplicar el producto de las partes por la diferencia entre ellas, sea máximo.

La solución del problema anterior está relacionada con la resolución de la ecuación cúbica $x^3+px+q=0$ (para p positivo y q negativo) que fue uno de los grandes problemas matemáticos resueltos por los matemáticos italianos del Renacimiento. El primero en resolver esa ecuación fue Scipione del Ferro (1465-1526) y Tartaglia, al igual que del Ferro, obtuvo la fórmula siguiente, conocida como **fórmula de Cardano** (1501-1576), para calcular las raíces de dicha ecuación:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ACTIVIDAD 7:

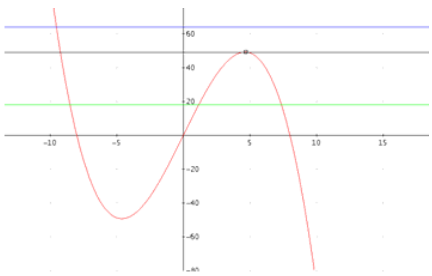
Tartaglia resolvió el problema anterior de la siguiente forma:

- Calcula la mitad de 8___________________________________
- Haz el cuadrado de esa mitad______________________________
- Súmale un tercio de sí mismo_________________________________
- Ese es el cuadrado de la diferencia de las dos partes. Calcula la raíz cuadrada de este resultado_______________________________________
- Ahora ya puedes calcular cada uno de los números. ____________________

ACTIVIDAD 8:

Esta resulta ser una solución típicamente algebraica. Repasemos esta demostración para ver por qué es válida.

- Supongamos que a y b son las soluciones del problema anterior. Estas cantidades tienen que cumplir por lo tanto que a+b=8 y que a-b=x. Expresa a y b en función de x____
- Escribe la fórmula que hay que optimizar en función de x_____________
- Tenemos que encontrar dónde se alcanza el máximo M en la función anterior, así que igualamos la expresión a M. ¿Qué tipo de ecuación hemos obtenido?____
- Observa la gráfica de la función; la expresión obtenida tienen dos raíces iguales positivas α y una distinta negativa β ¿Por qué?_________________



- Escribe la expresión algebraica típica de esta situación_______________
- Igualemos ahora término a término las dos ecuaciones que hemos obtenido.
- Calcula las raíces α y β____________________
- Multiplica y divide α^2 por 4___________________
- Separa el numerador en dos sumandos uno multiplicado por 3 y en el otro el resto. Separa las dos fracciones ¿Cuál es la expresión final que hemos obtenido de α^2? ¿Qué tiene que ver con la de Tartaglia?
- Calcula finalmente a y b_______________________________

Los problemas sobre el cálculo de valores extremos fueron considerados también por Pierre de Fermat (1601-1665). Alrededor de 1628-29 encontró un método para calcular valores extremos sencillos; posteriormente, alrededor de 1662, Fermat enlazó sus consideraciones sobre valores extremos con cuestiones físicas y así, por ejemplo, con el cálculo del recorrido más corto de la luz en la refracción, del que hemos hablado anteriormente. Aunque originalmente desarrolló su procedimiento sólo para funciones racionales, más adelante lo expresaría en toda su generalidad. El método, bien es cierto, carecía de una fundamentación rigurosa y se justificaba exclusivamente por su éxito; por ello, Fermat solía proclamar en sus obras con orgullo "no puede existir un método más general y bello" (Boyer, 1986). En su escrito *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Método para investigar máximos y el mínimos) de 1629 que envió a Roberval (1602-1675) y Mersenne (1588-1648), da el primer método general conocido para determinar máximos y mínimos, siendo la regla la siguiente:

1. Sea A un término relacionado con el problema
2. La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A.
3. Se sustituye A por A+E, y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E.
4. Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen "adiguales", lo que significa algo así como tan aproximadamente iguales como sea posible.
5. Los términos comunes se eliminan.
6. Se dividen todos los términos por una misma potencia de E, de manera que el menor de los términos resultantes no contenga a E.

7. Se ignoran los términos que aún contienen a E
8. Los restos se hacen iguales.

La solución de la última ecuación nos dará el valor de A, que hace que la expresión tome un valor máximo o mínimo relativo.

ACTIVIDAD 9:

Para ilustrar este método intentemos resolver el siguiente problema:

Dividir el segmento AC por el punto E, de forma que el rectángulo AEC se haga máximo.

- Designemos por b a la longitud del segmento AC y a la longitud desde A hasta E. ¿Cómo podremos expresar el área del rectángulo formado con los dos segmentos en los que queda dividido el segmento AC?___________
- Si sustituimos a por a+e ¿cómo nos quedará la expresión anterior?________
- Resta las dos expresiones suprimiendo los términos comunes____________
- Divide la expresión resultante por e____________________________
- Suprime la e que queda ¿qué resulta? ¿cuál es la solución del problema? ¿A qué te recuerda este método de solución?

En el enfoque de Fermat no se consideraba la cantidad como una función y no se decía nada de que e fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implicaba nada relativo al concepto de límite, sino que el cálculo era puramente algebraico. De hecho la idea parece ser que se le ocurrió estudiando la teoría de ecuaciones de Vieta (1540-1603) que, aplicándola al ejemplo anterior tendríamos, como hemos visto, que el punto buscado es el punto medio, y que origina un área igual a $B^2/4$. El procedimiento que siguió, pudo ser el siguiente: para cualquier otro valor $Z<B^2/4$ la ecuación

$X(B-X)=Z$

tendrá dos raíces distintas: sean A y E. Siguiendo a Vieta, tendremos:

$A(B-A)=E(B-E)$

o bien

$BA-BE=A^2-E^2$

y dividiendo por A-E, se tiene B=A+E. Cuanto más próximo esté Z a $B^2/4$, menor será la diferencia entre A y E y por último, cuando $Z=B^2/4$, A será igual a E y B=2A, que es la solución única que nos da un valor máximo del producto. En otras palabras, para hallar el máximo es necesario igualar las dos raíces. Como puede ser complicado dividir por A-E, Fermat tuvo la idea de tomar las dos raíces como A y A+E y dividir entonces por E, para igualar finalmente las dos raíces haciendo E=0.

Este método para determinar máximos y mínimos, le sirvió a Fermat para desarrollar un procedimiento que le permitiera construir tangentes a curvas, calcular centros de gravedad y descubrir la ley de la refracción de la luz y fue la base para que posteriormente se resolvieran los problemas de máximos y mínimos utilizando el cálculo de derivadas.

3.4.- Podemos aplicar estos conceptos a situaciones muy variadas

Los problemas de extremos relacionados con los fenómenos naturales, fueron formulados por primera vez en un intento por comprender la ley de la refracción de la luz. Ya los antiguos filósofos trataron de descubrir la ley de la refracción, en particular, Ptolomeo (aprox 83-161 a.C.) trató de obtenerla experimentalmente, pero falló. Fue encontrada, por primera vez, por el científico Snell (1580-1626), contemporáneo de Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665) y Huygens (1629-1695), indicando que:

La razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es una constante independiente del ángulo de incidencia.

Fermat, intentando explicar dicha ley, avanzó un principio extremo del fenómeno óptico: en un medio no homogéneo, la luz viaja de un punto a otro a lo largo del camino que requiere el menor tiempo, siendo, finalmente, Huygens el que demostró dicha ley, avanzando, además, que la constante de la razón entre los ángulos de incidencia y de refracción es igual a la razón entre las velocidades en los dos medios.

ACTIVIDAD 10:

El problema quedaría planteado en los siguientes términos.

> Se supone que un plano está descompuesto por una recta en dos semiplano, que son dos medios homogéneos, en los que las velocidades respectivas de la luz son v_1 y v_2.

> Encontrar el camino que debe seguir un rayo luminoso para ir en el menor tiempo posible (camino óptico) desde un punto A, situado en uno de los medios, a un punto B situado en el otro medio.

- Suponiendo que la distancia OC es d y que OM es x, ¿cuál es la expresión para la distancia MC? ¿Y para AM? ¿Y para MB?____________________
- Como queremos que el tiempo empleado sea igual al espacio recorrido dividido por la velocidad en cada medio. Luego su expresión será:________
- Utilizando la propiedad de que para que el tiempo sea mínimo la derivada tiene que ser cero, si derivamos respecto de x en la expresión anterior obtenemos que:______________________________________
- Escribiendo esa igualdad en función del seno de i y de r tendremos la ley de la refracción de la luz.

Una de las aportaciones más interesantes fue la que hizo Johann Kepler (1571-1630) en su obra publicada en 1615 *Cálculo de toneles*, en la que bajo el título *Nova stereometría doliorum vinariorum* (Nueva estereometría de los toneles de vino), estudió la forma que deberían tener los barriles de vino de forma que, con la menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos), tuvieran mayor volumen (pudieran albergar la mayor cantidad de vino). El mismo Kepler explica el origen de este problema de la siguiente forma:

> Fue celebrando mi nuevo enlace en noviembre del último año, en la época en la que los toneles de vino traídos de la baja Austria se apilaban, tras una abundante cosecha, en las orillas del Danubio, en Linz, y se podían comprar a un precio aceptable, pues es obligación del nuevo esposo y preocupado padre de familia, procurar la bebida necesaria para su casa. Cuando algunos toneles se habían colocado ya en las bodegas, vino el vendedor, al cuarto día, con la vara de medir, y comenzó a calcular el contenido de todos los toneles sin tener en cuenta su forma y sin mayor reflexión o cálculo. Introdujo la varilla de medir con su punta metálica a través del agujero del corcho hasta alcanzar los dos fondos y cuando parecían ser iguales las dos longitudes, la marca en el corcho daba el número de cubos en el barril. Yo me preguntaba cómo la línea trasversal que cruza la mitad del barril podía proporcionar una medida del contenido y dudaba de la exactitud del método, pues un barril muy bajo con bases muy anchas, y por tanto, con un contenido muy reducido, podría tener la misma longitud de mira. No me pareció inoportuno, como recién casado, comenzar a investigar sobre bases geométricas la exactitud de este procedimiento tan simple y tan ampliamente extendido y sacar a la luz, tal vez las leyes existentes. (Kepler, J. 1908 Neue Stereometrie der Fäser, besonders der in der Form qum meisten geeigneten österreihischen. Ergänzung zur stereometrie des Archimedes. Leipzig) Citado en Wussing, 1998

ACTIVIDAD 11:

Para estudiar este problema Kepler empleó un método que podemos considerar antecedente del que empleamos en la actualidad; buscó el punto donde la variación de volumen producida por una variación de las dimensiones fuera prácticamente nula (Wussing, 1998), es decir, buscaba los puntos que anulaban la primera derivada.

> De todos los cilindros con la misma diagonal el de mayor capacidad es aquel en el que la razón entre radio de la base y la altura es $\sqrt{2}$. El problema correspondiente en el plano es el de inscribir en un círculo dado un rectángulo de área máxima.

- Imaginemos el cilindro inscrito en una esfera. Si R es el radio de la esfera, x es la mitad de la altura del cilindro ¿A qué es igual el radio de la base del cilindro?_______________________
- El volumen del cilindro será igual a ____________
- Como queremos calcular el cilindro de volumen máximo tendremos que derivar esa función e igualarla a 0. De esta forma calculamos la relación entre R y x______________________
- ¿Cuál es la relación entre el radio de la base del cilindro y x? ¿Coincide con lo que encontró Kepler?______________________________

3. 5.- En el siglo XXI se utilizan las nuevas tecnologías

Demos un salto en el tiempo y aterricemos en el siglo XXI en el que tanto las calculadoras gráficas como los ordenadores son o deberían ser herramientas esenciales en la enseñanza del Análisis Matemático por sus capacidades gráficas para representar las curvas que se asocian a las funciones y poder visualizar directamente sobre ellas muchos conceptos, así como las características y propiedades que poseen.

Aunque CABRI es un programa informático especialmente pensado para cuestiones de tipo geométrico, podemos utilizarlo para "construir" funciones y visualizar cuáles son las propiedades geométricas de los puntos que pertenecen a la curva que estamos considerando. Para construirlas, se utilizan exclusivamente elementos geométricos como rectas, segmentos, circunferencias, cuadrados,... así como propiedades que pueden ser de perpendicularidad, paralelismo o intersección. Las curvas construidas de esta forma, se constituyen en lugares geométricos que verifican alguna condición, de forma que, una de las características más sobresalientes del programa como es su dinamismo.

ACTIVIDAD 12:

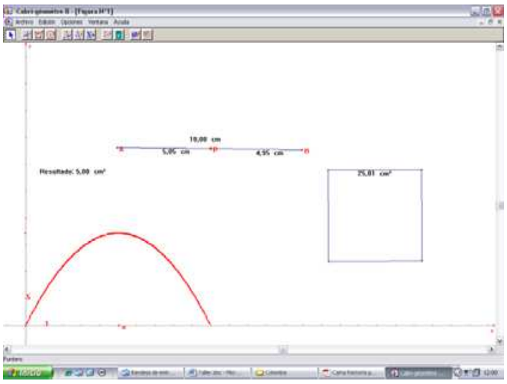
Por ejemplo si el problema es:

Deseamos saber cuál es el mayor rectángulo que tiene 20 metros de perímetro.

podríamos hacer una construcción del siguiente tipo (modificada de Pérez y otros, 2002).

- Construir un segmento AB. Fijar el punto A (*Fijar/liberar*)
- Medir el segmento y mover el segmento B hasta que tenga una longitud de 10 cm. Fijar el punto B
- Sitúa un punto P sobre el segmento.
- Utilizando la *Modificación de apariencia* pincha en el punto más grueso y a continuación sitúate en P. Aparece un pincel, pincha con él en el punto para que resalte más y observar lo que pasa con más facilidad.
- El segmento original ha quedado dividido en dos nuevos segmentos que serán la base y la altura del rectángulo que queremos construir. Mide ambos segmentos desde cada extremo hasta el punto P.
- Ahora vamos a construir el rectángulo. Sobre una semirrecta paralela al segmento AB llevamos con el *Compás* la medida AP sobre el extremo de la semirrecta A'. Nos aparecerá una circunferencia que corta a la semirrecta en un punto P', marcamos ese punto de intersección. Ya tenemos construida la base del rectángulo.
- Dibujar una recta perpendicular a la semirrecta que pase por A' y otra que pase por P'.
- Con el compás llevar la medida del segmento PB sobre A'. Se forma una circunferencia que corta a la perpendicular a la semirrecta en un punto B', marcar ese punto de intersección. Esa va a ser la altura del rectángulo.

- ❖ Dibujar una recta perpendicular a la que pasa por A' y B' desde el punto B'. Ya tenemos los cuatro vértices del rectángulo. Utilizando la opción Polígono une los cuatro puntos.
- ❖ Oculta las construcciones intermedias, circunferencias, rectas, …
- ❖ Observa y comprueba qué ocurre al mover el punto P.
- ❖ Mide el área del polígono.
- ❖ Activa Mostrar ejes y lleva el origen de coordenadas al extremo inferior izquierdo de la pantalla. Modifica la escala en el eje OY de hasta que aparezca un 5. De esta forma vamos a representar el problema a escala para que nos entre la gráfica de la función en la pantalla.
- ❖ En el eje de abscisas se representará la base y en el eje de ordenadas el área.
- ❖ Lleva la medida de la base con el *Compás* sobre el origen de coordenadas. Marca el punto de intersección en dicho eje.
- ❖ Utilizando la opción Calcular divide por 5 la medida del área del rectángulo. Lleva la medida resultante sobre el eje OY con Transferencia de medidas y marca el punto correspondiente sobre dicho eje.
- ❖ Sobre los puntos que se han marcado en los ejes traza dos rectas perpendiculares a los mismos y sitúa un punto en la intersección de ambas rectas.
- ❖ Oculta todos los elementos accesorios.
- ❖ Activa *Traza* para dicho punto y *Animación* para el punto P, aparece un muelle, suéltalo.
- ❖ Obtienes un gráfico. Analízala enumerando todas sus características y cuáles te ayudan a resolver el problema de forma razonada. La construcción será similar a la que aparece en la siguiente figura.



Referencias biográficas

- Arcavi, A. Issoda, M. (2007) Learning to listen: from historical sources to classroom practices. Educational Studies in Mathematics, 66, 111-129.
- Azcárate, C. y otros (1996): Cálculo diferencial e integral. Madrid: Síntesis.
- Camacho, M. y González, A. (2001) Una aproximación a los problemas de optimización en los libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. Aula, 10, pp. 137-152
- Euclides (1991) Elementos Libros V-IX. Madrid: Editorial Gredos.
- González Astudillo, M.T. (2002) Los sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca
- Kindt. M. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. Uno, 4, pp. 41-52.
- Pérez, R. y otros (2000) El problema isoperimétrico en la Arquitectura, Literatura, Música,..., en la Naturaleza. Suma, 33, pp. 103-106.
- Pérez, R. y otros (2002) Taller de problemas: Isoperimétricos: resolución del problema de los isoperimétricos mediante la función cuadrática. Suma, 40, pp. 113-117
- Tikhomirov, V. (1986) Stories about maxima and minima. Rhode Island: American Mathematical Society.
- Virgilio (ed. 1967) La Eneida. Buenos Aires: Espasa Calpe
- Wussing, H. (1998) Lecciones de Historia de las Matemáticas. Madrid: Siglo XXI.

Volver al índice
Cursos