Sociedade Brasileira de Educação Matemática

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

COMPREENSÕES DE ESTUDANTES SOBRE O CONCEITO DE LIMITE[1]: UM ESTUDO DE CASO

STUDENTS' COMPREHENSION ABOUT THE LIMIT CONCEPT: A CASE STUDY

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias[2]
João Cláudio Brandemberg[3]

Resumo

Apresenta-se, neste artigo, uma análise sobre imagens conceituais relacionadas ao conceito de limite de uma função. O estudo foi baseado em entrevistas realizadas com um grupo de estudantes de um curso de licenciatura em matemática que acabara de concluir a disciplina Cálculo I, de modo que suas imagens conceituais evocadas permitiram identificar alguns dos conflitos cognitivos relativos a esse conceito. Os resultados mostram que, dentre as evocações apresentadas pelos sujeitos investigados, fizeram-se presentes compreensões voltadas para interpretações dinâmicas do conceito, nas quais o limite é considerado um valor do qual se aproxima sem, no entanto, "alcançá-lo", ou ainda, como um valor que pode ser alcançado por meio de sucessivas aproximações. Foi evidenciado, também, que a compreensão de que o valor do limite em determinado ponto sempre coincide com o valor da função nesse ponto também foi mobilizada por alguns dos sujeitos da pesquisa.

Palavras-chave: Imagem Conceitual. Conceito de Limite. Interpretação dinâmica.

Abstract

We present in this paper an analysis about concept images of the concept of limit of a function. We were based on interviews taken with a group of mathematics students that had just finished a Calculus I Course. The subjects' evoked concept images allowed us identify some of the cognitive conflicts related to this concept. Their evocations presented dynamic interpretations of the concept that characterizes the limit as a value in which we get close to, but it cannot be reached or it can be reached through successive approximations. We observed that the comprehension that the limit value at a point always coincides with the function's value at that point was also mobilized by some of the research subjects.

Keywords: Concept Image. Limit Concept. Dynamic Interpretation.

---

[1] Os termos *limite* e *limite de uma função* serão utilizados indistintamente no decorrer do texto.

[2] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas; Universidade Federal do Pará/UFPA, Belém, Pará, Brasil; alice.messias@gmail.com

[3] Doutor em Educação; Universidade Federal do Pará/UFPA, Belém, Pará, Brasil; brand@ufpa.br

Considerações iniciais

As dificuldades relacionadas à compreensão do conceito de limite de uma função têm sido investigadas e discutidas por vários pesquisadores ao longo das últimas décadas (TALL; VINNER, 1981; PRZENIOSLO, 2004; JUTER, 2006; SWINYARD, 2011; AMATANGELO, 2013; MESSIAS, 2013; DENBEL, 2014, e outros). Muitos estudos têm apontado a existência de equívocos conceituais relativos à sua definição formal e ao que ela significa. Esse cenário – e, também, nossas experiências anteriores como professores de Cálculo – tem nos motivado a investigar aspectos concernentes ao entendimento do conceito de limite de uma função, dada sua importância para o estudo da continuidade, derivada, integral, dentre outros conceitos no âmbito do Cálculo.

Mas, afinal, quando um indivíduo compreende verdadeiramente um conceito? Consideramos que o entendimento acerca de um conhecimento matemático depende da maneira como o sujeito reflete sobre ele, como ele enxerga as abstrações matemáticas envolvidas na definição e, principalmente, da maneira que sua memória é estimulada a formar diferentes associações não verbais que, por sua vez, baseiam-se em representações visuais, figuras mentais, impressões, propriedades, procedimentos e experiências anteriores de aprendizagem relacionadas ao conceito. A essas associações não verbais é dado o nome de *imagens conceituais* (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991).

Assumimos, nesse sentido, que entender um conceito significa formar uma imagem conceitual coerente sobre ele (VINNER, 1991). Isso porque, propriedades e/ou interpretações contraditórias podem levar um sujeito à composição de uma imagem conceitual sobre determinado conhecimento matemático que não esteja em acordo com sua respectiva teoria formal. A prática excessiva do cálculo de limites de funções polinomiais, por exemplo, pode levar um estudante a incorporar à sua imagem conceitual a ideia de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Quando conhecemos os elementos que compõem a imagem conceitual de um indivíduo sobre um conceito, temos a oportunidade de conjecturar sobre os conflitos inerentes ao seu processo de apreensão, fato que pode nos auxiliar na busca por estratégias que possam viabilizar a compreensão dos estudantes sobre determinado conhecimento matemático. Por isso, temos o intuito de apresentar, nesse artigo, uma análise acerca das imagens conceituais evocadas por estudantes no que se refere ao conceito de limite de uma função. A fim de oportunizar o entendimento do leitor acerca da temática escolhida para esse estudo, no tópico a seguir, apresentamos uma breve descrição sobre compreensões relativas ao conceito de limite que têm sido discutidas pela literatura da área ao longo dos anos.

Compreensões de estudantes sobre limite nas pesquisas e suas implicações no estudo realizado

A maioria dos estudos tem revelado que, apesar do fato de alguns estudantes fazerem uso de mecanismos algébricos para encontrar o valor do limite em diferentes situações, poucos conseguem explicar o que esse conceito significa (OLIMPIO, 2007; MESSIAS, 2013; MUTLU; AINDIN, 2013, dentre outros).

Amatangelo (2013), por exemplo, investigou Concepções Potencialmente Problemáticas de estudantes relacionadas aos conceitos de limite e continuidade. A autora verificou que, para os sujeitos de sua pesquisa, (i) a existência do limite em um ponto qualquer garantia a continuidade da função naquele ponto e (ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ era sempre igual a $f(x_0)$. Imagens conceituais semelhantes às apontadas por Amatangelo (2013) foram destacadas em outras pesquisas, tais como a de Nascimento (2003), Przenioslo (2004) e Karatas et al. (2011).

Przenioslo (2004) e Karatas et al. (2011) também observaram, em seus estudos, evocações que condicionavam a existência de $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ao fato de $x_0 \in D_{f(x)}$, principalmente quando a função era expressa graficamente. Nascimento (2003) e Messias (2013) evidenciaram que os estudantes relacionavam indeterminações/emergência de denominadores nulos a não existência do limite.

Observamos, ainda, mediante experiências anteriores na docência, que os estudantes comumente evocam em suas imagens conceituais que o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença implica necessariamente em um salto em determinado ponto. Para muitos sujeitos, isso significa que o limite não existe nesse ponto, pois a função seria descontínua, ou seja, descontinuidade implica na não existência do limite, conforme destacado por Tall e Vinner (1981) e Juter (2006).

Brandemberg e Messias (2016) identificaram mobilizações semelhantes a essa quando solicitaram a um grupo de alunos que avaliassem a existência de $\lim_{x \to 1} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, x < 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right) x + \frac{3}{2}, 1 \leq x \leq 3 \\ x + 3, x > 3 \end{cases}$. Um dos alunos respondeu que o limite não existia quando $x \to 1$, já que, para ele, havia um salto nesse ponto. No entanto, quando o gráfico de $f(x)$ foi apresentado, o mesmo aluno afirmou que L existia quando $x \to 1$, uma vez que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = L$.

A ideia de limite *(in)alcançável* tem se manifestado como um dos elementos mais marcantes da imagem conceitual de muitos estudantes, conforme apontado em diferentes pesquisas, dentre as quais, destacamos Tall e Vinner (1981), Williams (1991), Nascimento (2003), Juter (2006) e Sarvestani (2011). Nesses termos, o conceito é mobilizado de maneira dinâmica, em que (i) existe uma aproximação em relação a determinado ponto sem, no entanto, alcançá-lo, levando à interpretação de que $f(x_0) \neq L$ ou (ii) o ponto é alcançado, porém não pode ser ultrapassado (*limite como uma barreira*).

Muito tem sido discutido acerca da relação entre as concepções dinâmica e estática do limite. A primeira é pautada em uma noção intuitiva em que se atribui movimento à função por meios de expressões, tais como, *x se aproxima de* ou *x tende a* determinado valor. Oh (2014) ressaltou, inclusive, que essa visão exclusivamente dinâmica do conceito de limite pode levar muitos estudantes a condicionar a existência do limite em um ponto à continuidade nesse ponto. A segunda é associada à definição formal com ε e δ. A dificuldade em estabelecer conexões entre essas concepções já fora apontada em algumas pesquisas, como, por exemplo, em Zuchi (2005), Olimpio (2005), Rodriguez (2009) e Oh (2014).

Os quantificadores envolvidos na definição, segundo alguns autores, têm causado expressivas dificuldades de compreensão da definição com ε e δ, uma vez que os estudantes raramente reconhecem o que tais quantificadores de fato representam (TALL; VINNER, 1981; ZUCHI, 2005; JUTER, 2006; MESSIAS, 2013). Além disso, nossa prática docente tem nos mostrado que a relação entre ε e δ se configura como um fator de conflito em potencial, conforme destacam Tall e Vinner (1981).

Nossa experiência na docência em Cálculo, assim como o que tem sido discutido na literatura da área no que concerne à compreensão de estudantes sobre o conceito de limite, levou-nos à formulação de alguns questionamentos que, por sua vez, nortearam o estudo realizado (ver Quadro 1).

Quadro 1 – Implicações na formulação de questões para o estudo

<table>
<tr><th>Compreensões sobre limite na literatura da área</th><th>Quem discutiu?</th><th>Questionamentos formulados a partir dessas compreensões</th></tr>
<tr><td>(i) existência do limite implica na continuidade da função;
(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ é sempre igual a $f(x_0)$.</td><td>Amatangelo (2013)
Nascimento (2003)
Przenioslo (2004)
Karatas et al. (2011)</td><td rowspan="6">1. Que elementos compõem a imagem conceitual dos estudantes investigados no que concerne ao conceito de limite de uma função?

2. Os estudantes atribuem concepções dinâmicas à definição de limite? De que maneira?

3. Que compreensões os estudantes têm sobre a interpretação geométrica da definição de limite?</td></tr>
<tr><td>(iii) existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ condicionada ao fato de $x_0 \in D_{f(x)}$.</td><td>Przenioslo (2004)
Karatas et al. (2011)</td></tr>
<tr><td>(iv) indeterminações implicam na não existência do limite.</td><td>Nascimento (2003)
Messias (2013)</td></tr>
<tr><td>(v) funções definidas em partes → descontinuidade → não existência do limite.</td><td>Tall e Vinner (1981)
Juter (2006)
Brandemberg e Messias (2016)</td></tr>
<tr><td>(vi) limite é ‘inalcançável’ → $f(x_0) \neq L$;
(vii) limite alcançável, porém intransponível.</td><td>Tall e Vinner (1981)
Williams (1991)
Nascimento (2003)
Juter (2006)
Sarvestani (2011)</td></tr>
<tr><td>(viii) interpretação dinâmica → atribui-se ‘movimento’ a função → tende a; se aproxima de; chega perto de.</td><td>Tall; Vinner (1981)
Messias (2013)</td></tr>
</table>

Fonte: Revisão bibliográfica dos autores.

Uma vez estabelecidas as questões que pudessem nortear esse estudo, refletimos sobre *como* poderíamos estruturar os momentos de investigação junto aos sujeitos, de maneira a identificar se eles evocariam em suas imagens conceituais elementos que nos permitissem responder aos questionamentos elencados no Quadro 1 e, consequentemente, conjecturar sobre suas compreensões acerca do conceito de limite. Dedicamos o tópico subsequente à descrição dessa investigação.

Breve descrição do estudo realizado

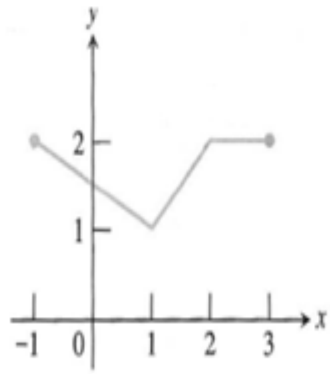
Com o objetivo de obter informações sobre as imagens conceituais associadas ao conceito de limite, realizamos entrevistas junto a um grupo de três estudantes do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública no estado do Pará (Brasil). Esses sujeitos já haviam concluído a disciplina Cálculo 1[4].

Essa investigação teve como foco dois Tópicos de Discussão (TD). O primeiro TD foi elaborado com o intuito de investigar as concepções dos estudantes relacionadas à ideia de alcançar (ou não) o valor do limite em determinado ponto. Dessa maneira, nosso objetivo foi verificar se seriam evocadas interpretações do tipo *limite da função quando* $x \to x_0$ *é sempre igual a* $f(x_0)$ [$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; limite alcançável] ou que *nos aproximamos de um ponto tanto quanto queiramos sem, no entanto, alcançá-lo* [$f(x_0) \neq L$; limite inalcançável], ou mesmo, a noção de limite intransponível. Para tanto, estruturamos um roteiro, conforme destacado no Quadro 2.

Figura 1 – Tópico de discussão 1

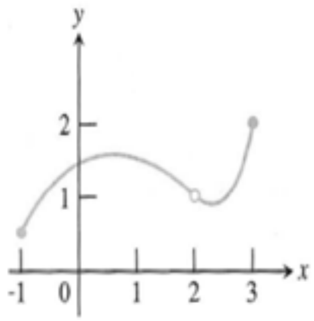
1. Perguntar o que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa;

- O valor do limite pode ser alcançado?
- Observe a função representada abaixo e definida em [-1,3] (mostrar a função representada na figura 1)



- O valor do limite pode ser alcançado quando $x \to 2$?
- "O limite é sempre alcançado em qualquer ponto". Você concorda com essa afirmação?
    - Se o sujeito discordar, solicite um exemplo.
    - Se o sujeito concordar, mostre a função representada na figura 2:

[4] Os sujeitos participantes da pesquisa não foram alunos dos autores deste trabalho. Por isso, foram realizados alguns esclarecimentos no que concerne à linguagem utilizada pelos autores no decorrer das entrevistas. Ressaltamos, também, que os três sujeitos entrevistados haviam sido aprovados na disciplina de Cálculo I.



- Observe a função. O valor do limite é alcançado quando $x \to 2$?
    - Se o sujeito der uma resposta afirmativa, solicite que ele/ela justifique sua resposta.
    - Se o sujeito der uma resposta negativa, perguntar: *A função deve estar definida em um ponto 'p' para que o limite seja alcançado? O que acontece se f não é definida em p?*
    -

2. Você poderia escrever uma definição para $\lim_{x \to a} f(x)$ e, mais uma vez, explicar o que significa?

Fonte: Protocolos de pesquisa.

A partir do primeiro roteiro, tínhamos o intuito de verificar a forma em palavras utilizada pelos sujeitos para especificar $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Nossa expectativa, nesse sentido, foi averiguar que elementos de suas imagens conceituais seriam evocados na escrita de uma definição conceitual pessoal de limite de uma função e, principalmente, se os sujeitos mobilizariam termos vinculados a uma compreensão de que o limite é (in)alcançável e/ou intransponível, conforme apontado em outras pesquisas (TALL; VINNER, 1981; WILLIAMS, 1991; NASCIMENTO, 2003; JUTER, 2006; SARVESTANI, 2011; MESSIAS, 2013).

Os gráficos representados pelas Figuras 2 e 3 foram incluídos no roteiro com o objetivo de verificar se os sujeitos evocariam – de maneira semelhante ao que fora apontado por Przenioslo (2004) e Karatas et al. (2011) – que o valor do limite pode ser alcançado em determinado ponto se a função estiver definida nesse ponto, ou ainda, se relacionariam *limite (in)alcançável e (des)continuidade* com a presença do "buraco" no gráfico representado pela figura 2 do TD1.

Ressaltamos, também, que caso os sujeitos investigados apontassem os pontos das extremidades do gráfico, isto é, $x = -1$ ou $x = 3$, como exemplos em que o limite é (ou não) alcançado, seria interessante verificar se a ideia de continuidade na extremidade de um ponto foi evocada e se, para eles, um limite (in)alcançável em determinado ponto está intimamente relacionado com a (des)continuidade nesse ponto ou ao fato dele estar definido no domínio da função.

Com o segundo TD, tínhamos o objetivo de verificar se as imagens conceituais evocadas pelos estudantes eram pautadas em interpretações estáticas e/ou dinâmicas da definição de limite com ε e δ (TALL; VINNER, 1981; JUTER, 2006; MESSIAS, 2013). Para isso, elaboramos o roteiro apresentado no quadro 3.

Quadro 2 – Tópico de Discussão 2

1. Você poderia escrever uma definição para limite de uma função e, em seguida, explicá-la?
2. Você concorda com a afirmação*: A função alcança o valor do limite por meio de aproximações*. Explique sua resposta.
3. Observe a definição:

   [Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0] (PARTE 1). [Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, se para todo ε >0, existir um δ >0] (PARTE 2) tal que [para todos os valores de x, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$] (PARTE 3).

   a) Explique, com suas palavras, o que cada parte da definição acima significa.
   b) A definição evoca a ideia de aproximação? Explique.
   c) A definição evoca a ideia de que é possível alcançar o valor do limite? Explique.
   d) O que é o limite? O que ele representa?

4. Mostre a figura a seguir:

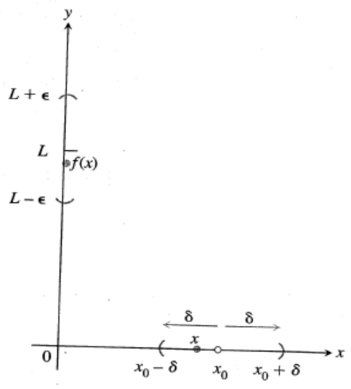


Fig. 1

   a) De que maneira você pode relacionar a definição anterior com a figura 1?

Fonte: Protocolos de pesquisa.

A definição incluída no roteiro do TD2 foi de fundamental importância, uma vez que a partir dela foi possível questionar os sujeitos sobre a presença ou ausência de dinamismo na definição. Além disso, incluímos a figura nesse Tema de Discussão com o intuito de verificar como (ou se) seria estabelecida qualquer relação entre a definição de limite e sua interpretação geométrica.

Embora tenhamos elaborado roteiros para cada um dos TDs, não descartamos a possibilidade de abordar outras questões, dependendo da particularidade de cada sujeito, de maneira a obter informações adicionais para nossa análise. As entrevistas foram gravadas e duraram, aproximadamente, 15 minutos. Ao longo das análises das imagens conceituais evocadas, os sujeitos investigados serão identificados como S01, S02, S03. A letra *P* será utilizada para identificar os pesquisadores.

Compreensão dos sujeitos da pesquisa sobre o conceito de limite

Em se tratando do primeiro Tópico de Discussão, observamos evocações pautadas na ideia de aproximação. Nesse sentido, termos que atribuem movimento à função foram utilizados pelos sujeitos investigados. Como exemplo, destacamos no quadro 4 o trecho da entrevista realizada com o sujeito S01 que, por sua vez, mobilizou uma ideia de aproximação quando foi solicitado que ele explicasse o que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significava para ele.

Quadro 3 – Evocações do sujeito S01 sobre limite

P:Primeiramente, gostaria de saber o que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *significa pra você.* *S01: É um valor <u>que tende a L</u> em um ponto 'a', <u>não que alcance L</u>, mas <u>se aproxima de L</u>.* *P: Essa proximidade depende de que exatamente?* *S02: Até onde eu sei, você <u>se aproxima tanto pela direita quanto pela esquerda</u> de tal modo que eles <u>quase se encontram</u>, mas <u>não chegam naquele ponto</u>.* *[...]* *P: Então... eu vou te mostrar um exemplo de outra função (figura 2 do TD1). Nesse caso, o que pode ser dito sobre o limite em* $x \to 2$*?* *S01: Em x=2... ele existe. Tanto que existe uma <u>aproximação pela direita e pela esquerda</u> só que ela (a função) não é contínua, porque em x=2 ela é um intervalo aberto.* *P: E isso influencia o fato do valor do limite ser ou não alcançado?* *S01: Não. Também não [...] A função <u>alcança o limite, mas ela não é contínua</u>.*

Fonte: Parte da transcrição da entrevista concedida pelo sujeito S01.

As respostas do sujeito S01 no Quadro 3 evocam expressões dinâmicas, típicas de uma imagem conceitual, caracterizada pela ideia de que o limite é um valor do qual nos aproximamos sem, no entanto, alcançá-lo ou ultrapassá-lo. Em outras palavras, a ideia de que $f(x_0) \neq L$ fez parte da imagem conceitual desse sujeito. Esse tipo de interpretação também foi observado em pesquisas anteriores, como nas de Tall e Vinner (1981), Willians (1991), Nascimento (2003), Juter (2006), Sarvestani (2011), Messias (2013). Ao mesmo tempo, observamos que sua imagem conceitual entra em conflito quando ele afirma que "a função alcança o limite, mas ela não é contínua". Ou seja, o fato do limite ser ou não "alcançado" se configurou para ele como um fator de conflito cognitivo[5].

É importante ressaltar que S01 não condicionou a existência do limite ao domínio da função. Nesse sentido, sua imagem conceitual difere dos apontamentos de Przenioslo (2004) e Karatas et al. (2011). Para o sujeito, continuidade implica na *ausência de buracos* no gráfico da função. Ele não se atentou para o fato de que a função era contínua em todo o seu domínio e que $x = 2$, na verdade, não representava um ponto de descontinuidade, pois ele não está definido em f[6].

O sujeito S02 – assim como S01 – mobilizou a ideia de que $f(x_0) \neq L$ (TALL; VINNER, 1981; WILLIAMS, 1991; NASCIMENTO, 2003; JUTER, 2006; SARVESTANI, 2011; MESSIAS, 2013). Essa evocação pode ser observada no trecho de sua entrevista apresentado no Quadro 4 (a seguir).

[5] Terminologia utilizada por Tall (1988);
[6] Para melhor entendimento acerca da compreensão de estudantes sobre (des)continuidade, sugerimos a leitura de Karatas *et al* (2011), Messias e Brandemberg (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).

Quadro 4 – Evocações do sujeito S02 sobre limite

P: Então, a primeira coisa que eu queria te perguntar é o que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa pra você.
S02: É... (pausa) olhando assim para um gráfico, seria o valor que a função teria no ponto, se o gráfico dela passasse nesse ponto. Basicamente isso.
P: Ok. Tu podes então dar um exemplo de uma função que não alcança o valor do limite em determinado ponto?
S02: Essa função aqui, formada por $f(x) = \begin{cases} x, se\ x \leq 1 \\ 3 - x, se\ x > 1 \end{cases}$ *(desenha o gráfico). No ponto 1, essa função não vai ser contínua. Se eu for calcular o limite quando* x *tender a* 1*, no ponto onde ela não é contínua. Se eu for calcular o limite no caso como ela tem duas sentenças, então o que a gente vai fazer, calcular os limites laterais. Os limites pela esquerda e pela direita, né? Então, se eu for calcular o limite pela esquerda, o que eu vou encontrar? Vou encontrar 1. Se eu for encontrar o limite pela direita, vou encontrar 2. Os limites laterais são diferentes, então o limite não vai existir, então como eu vou alcançar? Então o limite não existe.*
P: Então se o limite existir, então L pode ser alcançado?
S02:Sim. Peraí. Deixa eu pensar um pouquinho. Vamos analisar. Se o limite da função existe e a função alcança o valor do limite é porque a função tem que ser contínua para poder alcançar o limite no ponto dado. É, acredito que sim, se ela for contínua, então ela alcança o valor do limite.

[...]

P: (...) Como você definiria limite? Fique a vontade para escrever uma definição.
S02: O limite é um valor que a função tem ou teria no ponto P, dependendo da continuidade. Se ela for contínua em P, então o limite dessa função vai ser o próprio f(P). Se ela não for, seria o valor que a função teria, digamos assim, em P.
(nesse momento o aluno entrega sua definição conceitual pessoal escrita)
P: Certo. Você coloca em sua definição 'seja f uma função e P um ponto no domínio de f'. Então P tem que pertencer ao Domínio da função?
S02: Sim.
P: Certo. Aí, continuando, você colocou em sua definição que f(x) é a função e esse f(P) é o limite?
S02: Sim...Se a função for contínua.
P: Então, para melhor ajustar aqui, quando você coloca $|f(x) - f(P)| < \varepsilon$ *me dá a entender que* $f(P)$ *é o limite, entendeu? De que outra maneira você poderia escrever sua definição?*
S02: Tirando o módulo? (pausa). É o limite aqui. Vai ser $f(P)$ *se for contínua.*

Fonte: Parte da transcrição da entrevista concedida pelo sujeito S02.

Mediante a transcrição destacada no Quadro 4, percebemos que o sujeito S02 mobilizou, inicialmente, a ideia de $f(x_0) \neq L$ (TALL; VINNER, 1981; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; MESSIAS, 2013; MESSIAS; BRANDEMBERG, 2014). Em outro momento, o sujeito evocou a relação entre limite e continuidade para explicar que, dependendo da situação, o limite pode ser alcançado. Nesse sentido, de maneira semelhante ao que fora apontado por Juter (2006), a ideia de que *o valor do limite pode ser* *alcançado algumas vezes* fez parte da imagem conceitual de S02. Desse modo, evidenciamos um conflito entre essa evocação e sua primeira definição conceitual pessoal (na qual mobilizou que $f(x_0) \neq L$).

Observamos, ainda, que, ao escrever uma definição conceitual pessoal para limite, o sujeito S02 apresentou conflitos relacionados à existência do limite em um ponto P estar vinculada ao fato de P estar definido no domínio da função, conforme também destacado por Przenioslo (2004) e Karatas et al. (2011). Ressaltamos que – diferente do que fora apontado por Amatangelo (2013), Nascimento (2003), Przenioslo (2004), Karatas et al. (2011) – S02 não evoca que a existência do limite em um ponto resulta, necessariamente, na continuidade nesse ponto. Ou ainda, que descontinuidade implica na não existência do limite, conforme verificamos em outros estudos (dentre eles, TALL; VINNER, 1981; JUTER, 2006; BRANDEMBERG; MESSIAS, 2016).

No que concerne ao segundo tema de discussão, apresentaremos, neste artigo, trechos da entrevista realizada com o sujeito S03 (ver Quadro 5). Em suas evocações, verificamos interpretações que também sugerem uma concepção dinâmica do conceito de limite, conforme apontado em Tall e Vinner (1981) e Messias (2013).

Quadro 5 – Evocações do sujeito S03 sobre limite

P: Bem, eu gostaria que você escrevesse uma definição para limite de uma função e, em seguida, explicasse essa definição.
S03: Bem, pra mim, é um valor que a função se aproxima.
P: Eu vou fazer uma afirmação, e eu queria que você me dissesse se concorda ou não com ela. "A função alcança o valor do limite por meio de uma aproximação".
S03: O limite é de certa maneira uma aproximação.
P: Então, eu vou te mostrar uma definição, dividida em 3 partes. A primeira: "Seja $f(x)$ *definida em um intervalo aberto em torno de* x_0*, exceto talvez em* x_0*". O que ela significa pra ti? (de certo, deve haver erro de digitação na afirmação do pesquisador! Verificar...)*
S03: Ela pode chegar no ponto x_0 *ou não, né? No caso dela chegar, ela vai ser contínua, senão, vai ser descontínua.*
P: Certo. E a segunda parte: "Dizemos que $f(x)$ *tem limite L quando* $f(x)$ *tende a* x_0 *e escrevemos* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$*, se para todo* x_0 *>0, existir um* $f(x)$ *>0". O que tens a dizer da segunda parte?*
S03: Até onde me lembro das definições, épsilon e delta são os intervalos.
P: Mas o que essa relação entre ε *e* δ *significa pra ti?*
S03: (...) épsilon é a aproximação no gráfico de x *e* x_0 *e o delta, no caso, é a aproximação no eixo das ordenadas.*

[...]

P: Bem, dê uma olhada na definição como um todo. Ela evoca a ideia de aproximação?
S03: Sim, porque existe um intervalo entre x *e* x_0*.*
P: Pela definição, tu achas que ela evoca a ideia de que o limite pode ser alcançado?
S03: Não tem essa ideia de que chega no ponto, porque é um intervalo aberto. A exclusão do ponto não tem essa ideia de que você pode chegar nele, e sim de que você pode se aproximar dele.
P: Então, a partir da definição, o que é limite? O que ele representa?
S03: É uma aproximação. É uma aproximação em um intervalo em x *e* $f(x)$*.*
P: De que maneira tu podes relacionar essa figura com a definição?
S03: Esse x *definido nesse intervalo aqui... pode perceber que é menor que delta, mas também não é zero. Acho que é isso... não sei... só sei que os valores não saem do intervalo.*

Fonte: Parte da transcrição da entrevista concedida pelo sujeito S03.

O sujeito S03 mobilizou, em sua imagem conceitual, elementos pautados na ideia de que o limite é tanto um processo de constante aproximação quanto um valor alcançado pela função. Além disso, evidenciamos que ele teve dificuldades em explicar a relação entre ε e δ e não percebeu a inversão da relação entre os eixos presentes na definição de limite[7] (ZUCHI, 2005; JUTER, 2006). Observamos, nesse sentido, que para S03, "épsilon

[7] Utilizamos a expressão 'inversão da relação entre os eixos' ao nos referirmos ao fato de que, do ponto de vista da definição de limite de uma função, tal a relação é estabelecida a partir do eixo das ordenadas (e não das abcissas), de modo que $f(x)$permanece no intervalo $(L+\varepsilon, L-\varepsilon)$ para todo $x \neq x_0$ pertencente ao intervalo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

é a aproximação no gráfico de x e x_0 e o delta, no caso, é a aproximação no eixo das ordenadas" (transcrição da resposta de S03 – quadro 6).

No que concerne à figura mostrada durante a entrevista, observamos que o sujeito não correlacionou, de fato, a definição formal de limite e sua representação gráfica (ZUCHI, 2005), mas entende que existe uma relação que é estabelecida nos intervalos compreendidos pela definição, à qual o valor do limite pertencerá.

Algumas considerações

Apresentamos, neste trabalho, uma análise das imagens conceituais evocadas por três estudantes acerca do conceito de limite de uma função. Os resultados obtidos em nossa investigação nos levaram a algumas evocações sobre o referido conceito:

(i) O limite é um valor a ser alcançado pela função através de constantes aproximações;

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; limite é alcançável;

(iii) Aproximamo-nos do limite sem, no entanto, alcançá-lo ou ultrapassá-lo; $f(x_0) \neq L$

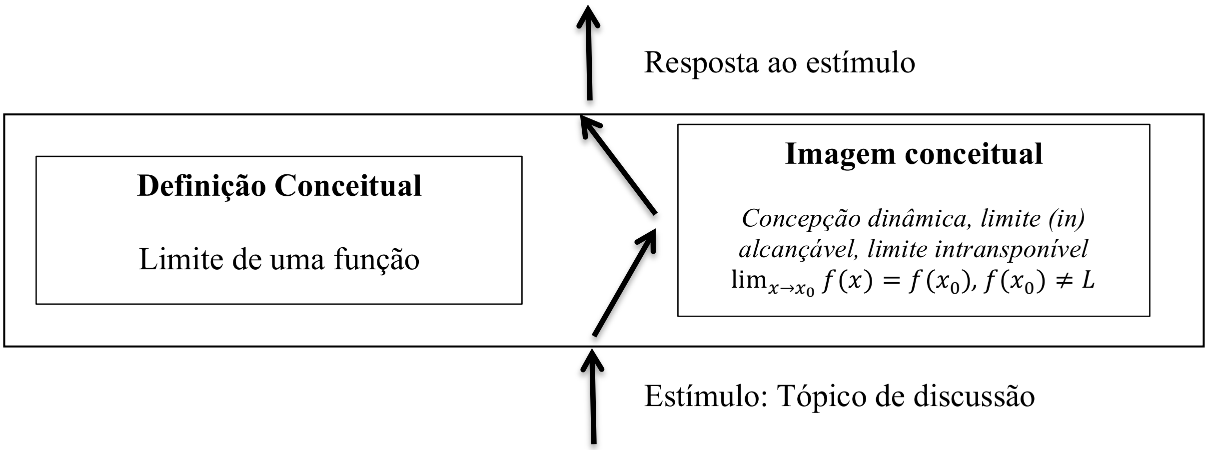
(iv) Se a é definido no domínio da função, então $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ existe;

As imagens conceituais relacionadas a (i), (ii) e (iii) são semelhantes àquelas obtidas por Tall e Vinner (1981), Nascimento (2003), Przenioslo (2004), Karatas et al. (2011), Amatangelo (2013) e Messias (2013). As respostas dos estudantes nos permitiram observar que eles, de fato, relacionam o limite com interpretações dinâmicas que, por vezes, se constituem como fatores de conflito em potencial, especialmente no que concerne à discussão sobre alcançar (ou não) o valor do limite. A definição conceitual pessoal de um dos sujeitos condicionou a existência do limite ao domínio da função (iv), tal qual fora observado por Przenioslo (2004) e Karatas et al. (2011).

Ressaltamos, nesse sentido, que as respostas dos sujeitos foram pautadas exclusivamente em elementos que compuseram suas imagens conceituais. Entendemos – na mesma perspectiva de Vinner (1991) – que seja difícil treinar o sistema cognitivo com o intuito de "forçá-lo" a consultar definições e, principalmente, refletir sobre a matemática que as constituem enquanto formamos uma imagem conceitual e/ou somos submetidos a tarefas que contemplem determinado conceito.

Observamos, também, que alguns dos elementos que compuseram a imagem conceitual dos sujeitos se mostraram incoerentes com a teoria formal, especialmente devido às interpretações contraditórias relacionadas ao conceito de limite que foram evocadas ao longo das entrevistas. As respostas intuitivas dos sujeitos S01, S02 e S03 podem ser esquematizadas conforme a |Figura 2.

Figura 2 – Resposta Intuitiva dos sujeitos investigados



Fonte: Elaboração nossa.

A Figura 2 representa a maneira como os indivíduos mobilizaram os elementos que os auxiliaram a responder aos estímulos que, nesse caso, foram os questionamentos sobre limite relacionados aos tópicos de discussão. Eles não consultaram a *cela*[8] da definição conceitual no sentido de confrontá-la com suas evocações sobre o conceito para que, por fim, eles pudessem responder o que lhes fora solicitado.

As respostas intuitivas dos indivíduos basearam-se em evocações que compuseram suas imagens conceituais e que, por sua vez, podem ter sido concebidas mediante experiências anteriores de aprendizagem que os tenham levado à formação de uma imagem conceitual incompleta e/ou incoerente sobre o conceito de limite de uma função. Ressaltamos, ainda, que o propósito deste estudo foi alcançado, já que verificamos a compreensão de estudantes sobre o conceito de limite de uma função, mediante a análise de suas evocações ao longo da investigação, fato que nos permitiu elencar alguns dos elementos que compuseram suas imagens conceituais, verificar se (e como) atribuem

[8] Brandemberg (2010) utiliza tal expressão ao caracterizar a composição do sistema cognitivo que, por sua vez, possui duas celas (ou escaninhos), uma da definição conceitual e outra da imagem conceitual.

concepções dinâmicas sobre limite, além de averiguar o entendimento desses sujeitos acerca da interpretação geométrica de sua definição formal.

Por fim, entendemos que os resultados apresentados neste trabalho são de expressiva relevância, uma vez que verificamos alguns dos conflitos cognitivos relativos ao entendimento (ou falta dele) do conceito de limite de uma função. Esperamos, nesse sentido, contribuir para o desenvolvimento de outras pesquisas que apontem para estratégias pedagógicas de maneira a viabilizar o aprendizado de estudantes no âmbito do Cálculo[9], especialmente, em termos conceituais.

Referências

MUTLU, C; AINDIN, S. Students' understanding of the concept of limit of a function in vocational high school mathematics. **The online journal of science and technology**, v.3, n. 1, p. 145 – 152, July, 2013.

AMATANGELO, Miriam Lynne. **Student understanding of limit and continuity at a point:** a look at four potentially problematic conceptions. 2013. 112f. Dissertação (Mestrado em Artes), Bringham Young University (Utah/USA), 2013.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física (ED), 2010.

BRANDEMBERG, J. C. ; MESSIAS, M. A. V. F. Imagem Conceitual e Definição Conceitual: uma reflexão sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos. In: ALVES, Francisco Regis Vieira; PEREIRA, Ana Carolina Costa (Org.). **Ciências e Matemática:** investigações no ensino. 1ed.Curitiba: CRV, 2016, p. 15-28.

DENBEL, D.G. Students misconceptions of the limit concept in a first Calculus course. **Journal of Education and Practice**, v.5, n. 34, 2014.

JAYAKODY,G; ZAZKIS, R. Continuous problem of function continuity. **For the Learning of Mathematics**, New Brunswick (Canadá), v. 35, p. 8 – 14, março, 2015.

JORDAAN, T. **Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students**. 2005. 87f. Dissertação (Mestrado Educação Matemática). University of South Africa, 2005.

JUTER, K. **Limits of functions -** University students' concept development. 2006. 175f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). – Departamento de Matemática, Lulea University of Technology, Lulea, 2006.

[9] Atualmente, estamos desenvolvendo uma pesquisa com o intuito de promover a formação de imagens conceituais coerentes sobre os conceitos de limite e continuidade, tendo como suporte teorias cognitivas no âmbito do Pensamento Matemático Avançado.

KARATAS et al. A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concepts. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 245 a 264, abril, 2011.

MESSIAS, M. A. V. F. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função**. 2013. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MESSIAS, M.A.V.F; BRANDEMBERG, J.C. Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais. **BOLEMA,** Rio Claro (SP), v. 29, p. 1224-1241, dez. 2015.

MESSIAS, M. A. V. F; BRANDEMBERG, J.C. Um estudo exploratório sobre as evocações de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.9, n.1, p.191-209, ago. 2014.

NASCIMENTO, J.C **. O conceito de limite em Cálculo:** obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática. 2003. 337f. Tese (Doutorado em Psicologia) – Departamento de Psicologia, UFPE, 2003.

OH, H.Y. A study on limit teaching in the college analysis major. **Korean Journal of Math,** v. 22, n. 1, p. 169-180, 2014.

OLIMPIO, Antonio Junior. **Compreensão de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática:** uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2005. 263f. Tese (Doutorado em educação matemática). Unesp, Rio Claro, 2005.

OLIMPIO, A.J. Primeiro ano num curso de matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de cálculo. **BOLEMA.** Rio Claro (SP), Ano 20, n.28, p.. 39-67, agosto, 2007.

PRZENIOSLO, M. Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies in the university. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v. 55, p. 103-132, 2004.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, New York, n. 12, p. 151-169, may. 1981.

SARVESTANI, A.K. **Contemplating problems taken from history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept**. 2011. 162f. Tese (Doutorado)- Universiteit Van Amsterdam, 2011.

SWINYARD, C. Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. **Journal of Mathematical Behaviour,** v. 30, issue 2, p. 93-114, June, 2011.

RODRÍGUEZ, M. Consideraciones didácticas para la enseñanza del límite funcional. In: SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 10, 2009, Chivilcoy. **Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática**. Buenos Aires: Universidad Nacional de Lujan, 2009, 92-98. CD-ROM

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, p. 65-81, 1991.

WILLIAMS, S. Models of limit held by college calculus students. Journal for Research in Mathematics Education, v.22, n. 3, p.219-236, 1991.

ZUCHI, Ivanete. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do** ambiente lápis e papel ao ambiente computacional.2005. 254f. Tese de Doutorado (Engenharia de produção)- UFSC, 2005.

Recebido em: 17 de julho de 2017.

Aprovado em: 01 de julho de 2018.