Razonamiento Matemático y Algoritmos: Una Mirada desde los Elementos de Euclides

Jaime H. Romero Cruz
jaimeedumat@udistrital.edu.co

Pedro Javier Rojas Garzón
pedroedumat@udistrital.edu.co

Martha A. Bonilla Estévez
grupomescud@yahoo.es

Grupo MESCUD, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. El carácter lógico y demostrativo del trabajo de Euclides en Elementos ha sido motivo de debate y reconocimiento. Incluso se ha llegado a establecer que las proposiciones de estos textos se pueden agrupar en problemas y teoremas. Aquí se exalta su carácter algorítmico; de manera particular, con relación al razonamiento multiplicativo. Un tratamiento más exhaustivo y analítico del aquí propuesto puede consultarse en (Bonilla & Romero, 2008; Díaz, Bello, Mora & Becerra, 2007).

En lo que sigue se mencionan algunos procedimientos multiplicativos propuestos en Elementos con las líneas y con las figuras rectilíneas planas.

Palabras clave. Euclides, Elementos, Razonamiento matemático, Algoritmos.

1. Líneas y multiplicación

Según la definición 3 en Elementos, libro I: "Una línea es una longitud sin anchura". En Elementos se encuentran dos líneas privilegiadas; a saber, líneas rectas y circunferencias. Para las líneas rectas hay algoritmos de tenor estrictamente figural para hacer mitades; trasladarlas a un punto dado como extremo; ordenar una colección finita; sumarlas; restar de una mayor una menor continuamente; hacer rectas perpendiculares y rectas paralelas a una recta dada; dividirlas de manera proporcional; hallar la tercera y la cuarta proporcional;

dividir una línea recta en extrema y media razón; producir series ordenadas de líneas rectas de tal manera que cualquier tres consecutivas estén en proporción continuada; dada una línea recta, generar con ella una base para expresar cualquier otra línea recta con esa base admitiendo un error controlado etc.

2. Figuras planas y multiplicación

Dada la definición de superficie, “Definición 5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura”, el tratamiento de la igualdad de figuras planas obliga a poner en relación multiplicativa la largura y la anchura. Ahora bien, en casi todas las figuras planas ni las larguras son iguales entre sí ni las anchuras son iguales entre sí. ¿Cómo determinar entonces la ubicación relativa de dos figuras rectilíneas dadas según la relación de orden que tematiza las superficies?

3. Una estrategia y dos caminos

Una estrategia consiste en descomponer las figuras rectilíneas en triángulos y transformar dichos triángulos en paralelogramos dado que estas figuras tienen una misma longitud y una misma anchura. Después, hay distintos caminos posibles:

1. cuadrar los paralelogramos y entonces sumar los distintos cuadrados obteniendo otro cuadrado.

2. de manera coherente, y para cada triángulo, aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

En ambos casos se finaliza el proceso comparando figuras semejantes.

Con las figuras planas rectilíneas hay algoritmos de tenor estrictamente figural para hacer mitades; ordenar una colección finita; sumarlas; restar de una mayor una menor continuamente; dividirlas de manera proporcional; hallar la tercera y la cuarta proporcional; dividir una figura rectilínea en extrema y media razón; producir series ordenadas de figuras rectilíneas de tal manera que cualquier tres consecutivas estén en proporción continuada; dada una figura rectilínea, generar con ella una base para expresar cualquier otra línea recta con esa base, admitiendo un error controlado etc. Para algunas figuras rectilíneas –las llamadas áureas-, además de los algoritmos dichos, ocurre que durante los mismos se conserva la semejanza de las figuras.

Ahora bien, el enfoque tomado en el resto de este documento consiste en usar proposiciones euclidianas como algoritmos en el sentido de que son medios finitos, ordenables por pasos finitos, para resolver problemas. Por cuestiones de espacio, se resuelven dos problemas similares a la clase de problemas descritos antes en una estrategia y dos caminos; aunque, haciendo algunas variaciones con relación a los métodos antes enunciados.

4. Problema de igualdad dadas dos condiciones

Dados un cuadrado y un segmento, levantar sobre el segmento dado un paralelogramo igual al cuadrado dado.

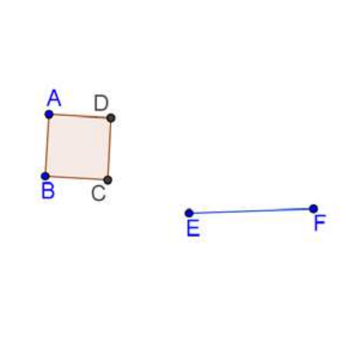	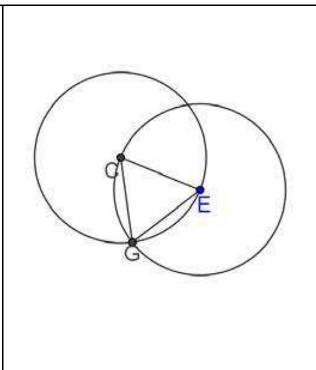	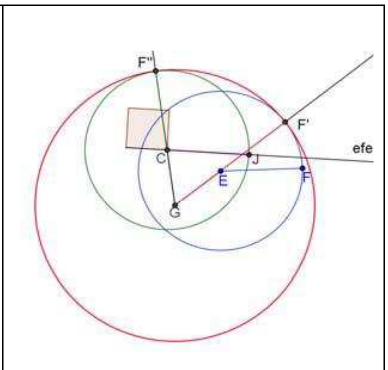
Figura 1	Figura 2	Figura 3

Sean AC y EF el cuadrado y el segmento dados respectivamente. Las figuras 2 y 3 hacen referencia a procedimientos necesarios para transportar EF sobre la prolongación en línea recta del lado BC del cuadrado AC. Por lo tanto, el postulado 2, prolongar continuamente una línea recta finita en línea recta; el postulado 3, describir un círculo con cualquier centro y distancia; la definición 15, I, un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí; la definición 16, I, y el punto se llama centro del círculo; la definición 20, I, de triángulo equilátero; la noción común 1, las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí; la proposición 1, I, construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada; la noción común 3, si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales; la proposición 11, I, trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella; la proposición 12, I, trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella; la proposición 1, VI, los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases; la proposición 4, VI, en los triángulos equiángulos los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes; la proposición 43, I, en todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí, son constituyentes del algoritmo para construir la figura 5.

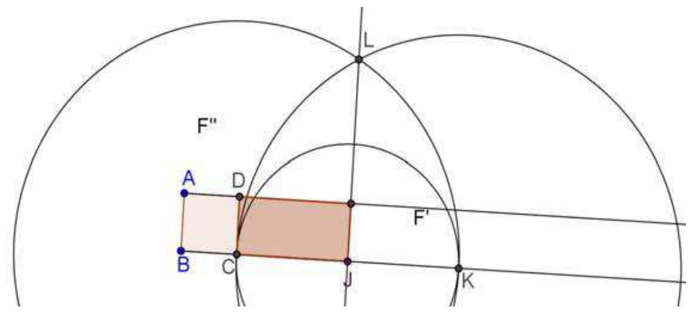	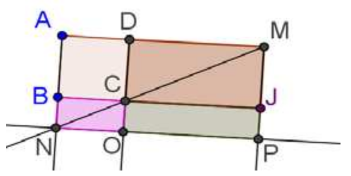
Figura 4	Figura 5

La figura 5 da la solución al problema: El rectángulo levantado sobre EF que es igual al cuadrado ABCD es OJ.

¿Por qué, en términos euclidianos, estas figuras son iguales? Por aplicación de la proposición 43, I.

Esta figura dice más; por ejemplo, que la razón entre los rectángulos DJ y BO es la razón compuesta de sus lados. Es decir, DJ:BO :: (DC:CO)(JC:BC) como lo asegura la proposición 23, VI.

Proposición. 23, VI. Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta (de las razones) de sus lados. DJ:JO :: DC:CO y JO:BO :: JC:CB entonces DJ:BO :: (DC:CO)(JC:BC)

5. Problema de ordenamiento

¿Alguna de las siguientes figuras es menor o igual que la otra?

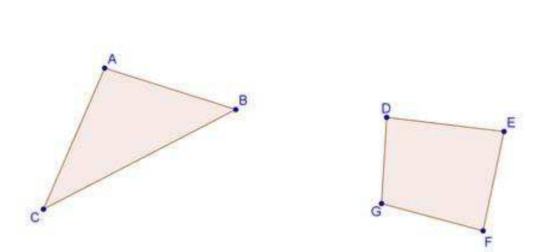

Figura 6

A continuación se va presentando la solución del problema de ordenamiento mencionando los constituyentes del algoritmo que da la solución.

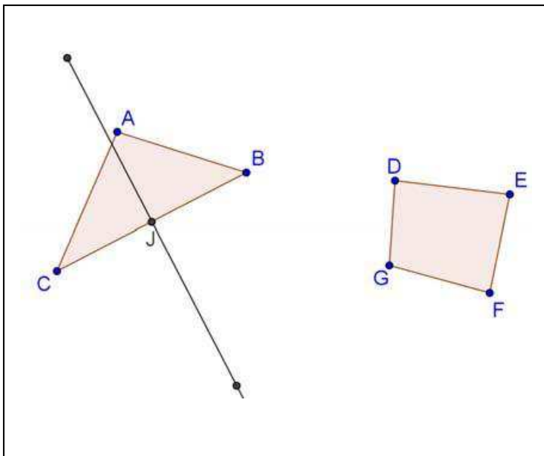

Figura 7

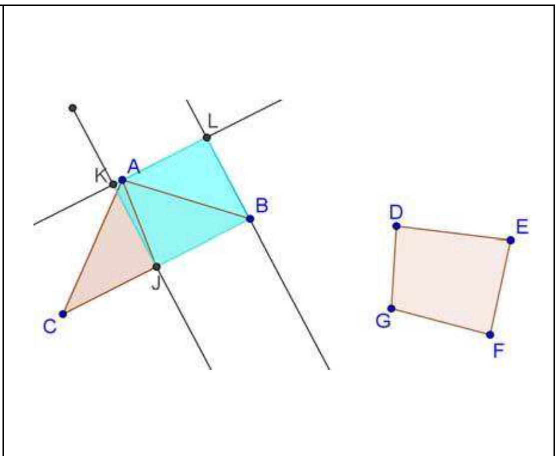

Figura 8

La figura 7 es producto de dividir en dos parte iguales el lado BC del triángulo ABC según la proposición 10, I, dividir en dos partes iguales una recta finita dada. La figura 8 es producto de dividir en dos triángulos iguales el triángulo ABC según la proposición 38, I, los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí; y posteriormente levantar sobre JB un rectángulo igual al triángulo ABC; para ello se usan la proposición 11, I, trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella; la proposición 12, I, trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada, desde un punto dado que no esté en ella.

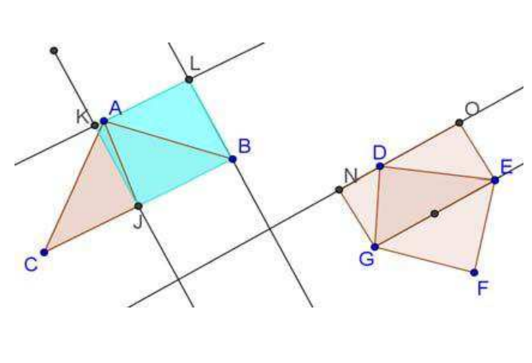

Figura 9

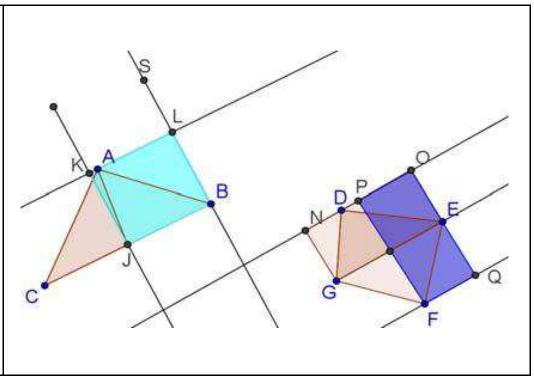

Figura 10

Las figuras 9 y 10, son producto de repetir los procedimientos dados según las proposiciones empleadas en la construcción de las figuras 7 y 8 junto con la proposición 41, I, si un triángulo tiene la misma base que un paralelogramo y están entre las mismas paralelas el paralelogramo es el doble del triángulo; la noción común 5, los dobles de una misma cosa son iguales entre sí.

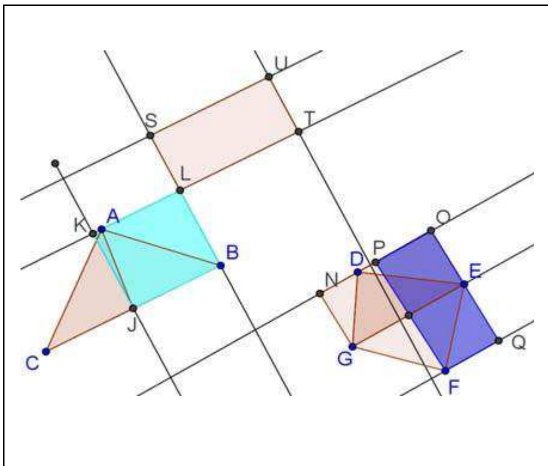

Figura 11

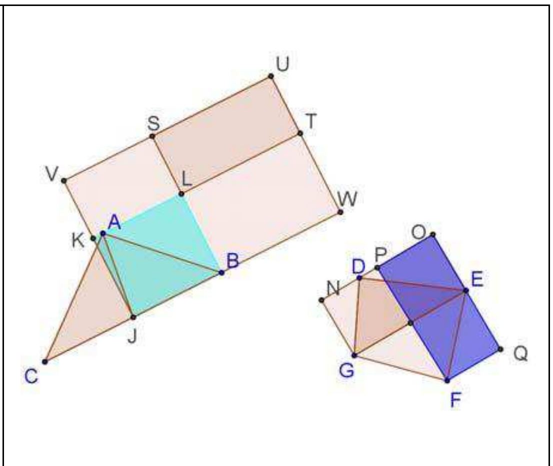

Figura 12

Las figuras 11 y 12 son producto de repetir los procedimientos dados según las proposiciones empleadas en la construcción de las figuras 2, 3, 4 y 5

Nótese, en la figura 13, que W el vértice del paralelogramo VW, no pertenece a la recta Z trazada por los puntos V y W. Por lo tanto, Z no es la diagonal del paralelogramo VW. Esto significa que los rectángulos KB y ST no son iguales; más aún, puesto que la recta Z divide el lado UW del rectángulo VW, entonces el rectángulo KB es mayor que el rectángulo ST aplicando la noción 7, el todo es mayor que la parte.

Por todo lo anterior, el cuadrilátero GDEF que es igual al rectángulo ST es menor que el triángulo ABC que es igual al rectángulo KB.

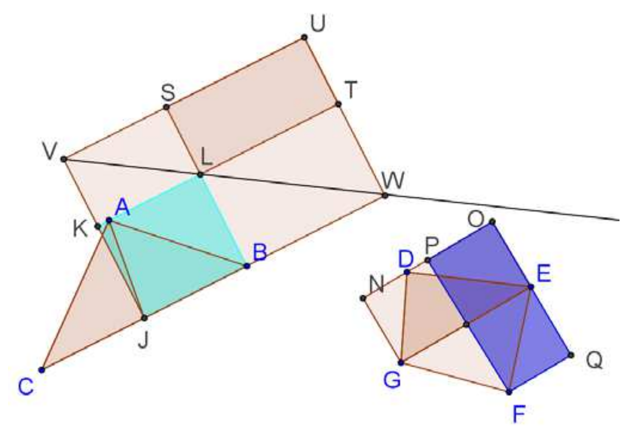

Figura 13

6. Conclusión

Como se argumentó en Bonilla y Romero (2008), en el tratamiento que Euclides hace de las magnitudes, brilla por su presencia el razonamiento multiplicativo y existen vínculos profundos con el álgebra escolar. Sin embargo, el sistema de prácticas asociado al estudio y debate de Elementos, han ocultado estos vínculos; tal vez, porque vuelven esta obra en objeto de estudio por sí misma en detrimento de lo que se puede hacer con lo expresado en ella. Pero basta con plantearse un pequeño problema en el ámbito de la geometría de Euclides para que el trabajo Euclidiano en Elementos recupere su carácter de instrumento para resolverlo, su carácter algorítmico y procedimental.

Arquímedes de Siracusa lo usó de esta última manera. Es suficiente leer alguna de sus obras; por ejemplo, El Arenario o Cuerpos flotantes. Con relación a este último trabajo se puede consultar Díaz, V. et al. (2007).

Referencias bibliográficas

- Bonilla, M. & Romero, J. (2008). *Pensamiento multiplicativo y álgebra escolar. Algunas relaciones.* En Memorias XXIII coloquio distrital de matemáticas y estadística. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Euclides (1991). *Elementos*, Tomo I, libros I-IV [M. Puertas, Trad.]. Madrid: Gredos
- Euclides (1994). *Elementos*, Tomo II, libros V-IX [M. Puertas, Trad.]. Madrid: Gredos
- Euclides (1996). *Elementos*, Tomo III, libros X-XIII [M. Puertas, Trad.]. Madrid: Gredos
- Díaz, V.; Bello, C.; Mora, O. & Becerra, M. (2007). La proporcionalidad como instrumento de matematización en Arquímedes: un análisis a sobre cuerpos flotantes. *Revista Científica, 9*, 143 – 158.

Volver al índice
Cursos