EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2

http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p220-251

A formação dos invariantes do campo conceitual do teorema de pitágoras em uma experiência de ensino na escola básica [1]

The invariants formation of the pythagorean theorem conceptual field in a teaching experience in basic school

La formación de los invariantes en el campo conceptual del teorema del pitágoras en una experiencia docente en la escuela básica

Pedro A. P. Borges [2]
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS)
Pós-Doutor em Educação Científica e Tecnológica (UFSC), PROFMAT/UFFS
https://orcid.org/0000-0002-0087-5806
Anderson Piva [3]
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS)
Bolsista de Iniciação Científica UFFS
https://orcid.org/0000-0002-7443-8609
Bruna Miecoanski [4]
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS)
Bolsista PIBID/UFFS
https://orcid.org/0000-0002-6328-0877
Mônica M. Sordi [5]
Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), bolsista PIBID/UFFS
https://orcid.org/0000-0003-2132-9756

Resumo

No sentido de contribuir para o entendimento dos processos de conceitualização na educação básica, pretende-se nesse trabalho identificar quais elementos do campo conceitual do Teorema de Pitágoras estiveram presentes nos processos de ensino em uma experiência pedagógica, e como as características destes indicam caminhos de aprendizagem. A pesquisa tem uma abordagem qualitativa com traços de pesquisa participante. Com o referencial da Teoria dos Campos Conceituais, atividades de ensino foram elaboradas, monitoradas e investigadas

[1] Trabalho produzido com apoio da FAPESC. Protocolo de Entrada Nº: 1840/2018.
[2] pedro.borges@uffs.edu.br
[3] andersopiva@hotmail.com
[4] brunamiecoanski@gmail.com
[5] monicamarinasordi@gmail.com

valendo-se da Análise de Conteúdo. A análise mostrou os conceitos do campo conceitual e levantou considerações acerca da estrutura de rede dos conceitos, das várias ordens e relações intercomplementares entre sentido, conceito e representação no processo de conceitualização.

Palavras-chave: Construção de conceitos, Triângulo retângulo, Teoria dos campos conceituais, Educação básica.

Abstract

To contribute to the understanding of the conceptualization processes in basic education, this work intends to identify which elements of the Pythagorean Theorem conceptual field were present in a pedagogical experience, and how these characteristics indicate learning paths. The research has a qualitative approach, with features of participant research. Having the Theory of Conceptual Fields as reference, in this study we developed, applied, monitored, and investigated teaching activities through Content Analysis. The analysis showed the concepts of the conceptual field and raised considerations about the network structure of the concepts, also the various orders and intercomplementary relations between meaning, concept, and representation in the conceptualization process.

Keywords: Concept construction, Rectangle triangle, Conceptual field theory, Basic education.

Resumen

Con el fin de contribuir a la comprensión de los procesos de conceptualización en la enseñanza primaria y secundaria, este trabajo intenta identificar qué elementos del campo conceptual del Teorema de Pitágoras estuvieron presentes en los procesos de enseñanza en una experiencia pedagógica, y cómo sus características indican caminos de aprendizaje. La investigación tiene un enfoque cualitativo con características de investigación participativa. Basado en la teoría de los campos conceptuales, las actividades de enseñanza se desarrollaron, monitorearon e investigaron utilizando el análisis de contenido. El análisis mostró los conceptos del campo conceptual y planteó consideraciones sobre la estructura de red de los conceptos, de los diversos órdenes y relaciones intercomplementarias entre significado, concepto y representación en el proceso de conceptualización.

Palabras clave: Construcción del concepto, Triángulo rectángulo, Teoría conceptual del campo, Educación básica.

A formação dos invariantes do campo conceitual do Teorema de Pitágoras em uma experiência de ensino na escola básica

Na prática escolar e nos livros didáticos, em regra, o ensino do Teorema de Pitágoras tende a limitar-se à apresentação da equação, associada a um desenho do triângulo retângulo (inclusive com o ângulo reto sobre um dos catetos na posição horizontal), seguida de exercícios de determinação de um dos lados, dados os outros dois. Essa abordagem algorítmica, pouco tem de investigação ou exploração das propriedades do triângulo retângulo. É comum nesse tipo de ensino – baseado na memorização de fórmulas e na reprodução de exemplos – a ocorrência de erros elementares e um baixo índice de aproveitamento na resolução de problemas. Metodologias ativas têm sido desenvolvidas com o objetivo de criar situações de ensino, nas quais o aluno possa agir e buscar o sentido e os significados dos conceitos matemáticos. Para contribuir nesse sentido, o presente artigo visa investigar, quais elementos do campo conceitual do Teorema de Pitágoras estiveram presentes nas etapas de processos de ensino desenvolvidas em uma experiência pedagógica vivenciada na Escola Básica e como as características destes indicam caminhos de aprendizagem.

Uma revisão bibliográfica das pesquisas publicadas em periódicos e eventos nacionais, descrita na segunda seção, mostrou que o ensino de triângulo retângulo tem sido investigado sob vários enfoques, tais como: o desenvolvimento de propostas de ensino, com sequências didáticas na forma de questões geradoras envolvendo materiais concretos ou objetos virtuais; a argumentação matemática como estratégia para atribuir sentidos mais precisos aos conceitos e, com isso, reproduzir na Escola Básica ações semelhantes às do matemático profissional; a análise da condução didática dos professores; e a contextualização do conhecimento matemático de triângulos retângulos.

Na terceira seção, são descritas as principais ideias sobre a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud, basicamente o caráter dinâmico e temporal da conceitualização, a atividade do sujeito, os elementos do campo conceitual, o tripleto Sentido-Significado-Representação e os esquemas.

Na quarta seção, é descrita a metodologia da pesquisa, que se caracteriza como qualitativa considerando os tipos de dados coletados e a forma de analisá-los, além de apresentar traços de pesquisa participante. Os dados foram coletados por observação dos comportamentos, escritas e falas dos alunos em classe, principalmente, dos registros das interações com três alunos voluntários em diário de bordo e fotografias. Um quadro de categorias, elaborado com base na TCC, foi organizado para interpretar as manifestações dos alunos sobre cada situação de ensino, detalhadas na quinta seção, utilizando as orientações da Análise de Conteúdo.

Os principais resultados obtidos foram a identificação dos conceitos e teoremas-em-ação do campo conceitual de triângulos retângulos e questões apontadas como indicativas de caminhos de aprendizagem em práticas pedagógicas, tais como: o aparecimento dos conceitos e teoremas-em-ação em rede; as várias ordens e relações intercomplementares entre sentido, conceito e representação no processo de conceitualização; a dificuldade de fazer inferências sem o sentido do conceito; e a necessidade de vários ciclos de situações para que os conceitos se transformem, de fato, em conceitos-em-ação.

Experiências e pesquisas sobre ensino de triângulo retângulo

Os processos de ensino e aprendizagem do conceito e propriedades do triângulo retângulo têm sido pesquisados, predominantemente, com atividades que potencializam o esclarecimento do significado dos elementos e das operações lógicas inerentes ao assunto, mediante materiais concretos manipuláveis, programas computacionais, abordagem simbólica das argumentações e provas, além da condução didática da sala de aula e da contextualização.

A produção de propostas de ensino é significativa e realizada tanto com materiais concretos, quanto utilizando o computador. Lamas e Correia (2006) sugerem várias atividades experimentais para mostrar o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo, utilizando modelos concretos construídos com material emborrachado (EVA), as quais foram aplicadas em uma classe do Ensino Fundamental, com o objetivo facilitar a visualização e o entendimento das propriedades geométricas. Na mesma direção, Dias e Dalcin (2015), Vargas (2013) e Brito e Costa (2009) desenvolveram atividades para explorar a dinâmica dos recursos da tecnologia digital com o *software* GeoGebra.

Constatando que os livros didáticos apenas apresentam o Teorema de Pitágoras, mas não exploram aspectos matemáticos – tais como a condição necessária e suficiente para que três segmentos de reta formem um triângulo – Almouloud e Bastian (2003) propõem uma sequência didática composta de situações-problema, visando proporcionar aos alunos condições para melhorar a compreensão do significado matemático do teorema e do seu uso como ferramenta na resolução de problemas de Geometria. A abordagem de Gerdes (1988) também reforça a argumentação matemática, ao apresentar várias formas de demonstrar o teorema e discutir a importância disso na formação escolar.

As metodologias ativas predominam nas experiências didáticas, justamente porque com elas, se espera a viabilização de ações individuais, interpessoais, dialógicas e de construção do conhecimento ou até a possibilidade de criação de propriedades, como foi a expectativa do trabalho de Bovo et al. (2012): "No nosso caso, tentamos fazer algo diferente, possibilitando que os alunos vislumbrassem a matemática como um universo 'descobrível' ". No entanto, a prática dos professores, talvez pela formação ou pelas limitações do ambiente escolar, nem sempre favorece as ações de criação e interação. Ao analisar as decisões de professores, durante a aplicação de sequências didáticas, Olfos, Guzmán e Estrela (2014) verificaram que "A gestão dos professores conduz a um modelo de transmissão de conhecimentos que dificulta o desenvolvimento das matemáticas e o protagonismo do estudante".[6]

Barros e Bellemain (2018) discutem a relação institucional (aquela oferecida pela formação matemática escolar) e a relação pessoal (aquela aprendida na resolução de problemas oriundos da prática profissional) referente à utilização do Teorema de Pitágoras em topografia, particularmente, para justificar técnicas de construção de ângulos retos em terrenos planos, com trena e balizas.

Os esforços para desenvolver os sentidos dos elementos dos conceitos estão presentes em vários trabalhos. Em Jahn e Bongiovanni (2008) o Teorema de Pitágoras foi apresentado enfatizando a importância de se alternar, no ensino, os aspectos ferramenta e objeto, ou seja, uma sequência de atividades com uma fase de institucionalização, seguida de outra com exercícios variados de familiarização, os quais necessitam das noções recentemente institucionalizadas e sua aplicação em novas situações. De maneira diferente, mas com intuito semelhante, Pereira, Munhoz e Quartieri (2016) elaboraram atividades sobre conceitos trigonométricos no triângulo retângulo na linha de investigação matemática enquanto metodologia de ensino. O trabalho de Assis (2016) recorre à semelhança de triângulos e material concreto para significar os conceitos de seno, cosseno e tangente. Santos e Santos (2016) valeram-se da TCC para analisar os conhecimentos prévios e verificaram que a maioria dos alunos não dispunha dos invariantes operatórios necessários para iniciar o estudo de triângulos retângulos.

O presente trabalho se enquadra na linha de investigação da formação dos conceitos matemáticos e apoia-se, tal como Santos e Santos (2016), no referencial teórico da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), descrita resumidamente na próxima seção.

[6] "La gestión de los profesores conduce a un modelo de transmisión de conocimientos que dificultan el desarrollo de las matemáticas y el protagonismo del estudiante" (Olfos, Guzmán & Estrela (2014))

A construção de conceitos de acordo com a TCC

A pesquisa sobre a construção de conceitos é creditada ao movimento dos construtivistas em contraste com as teorias comportamentalistas de Pavlov e Skiner[7]. Para essas, o ser humano age fundamentalmente a partir de estímulos do meio, o que é crucial para explicar a dinâmica de treinamentos, da disciplina e do condicionamento das pessoas para atingir determinadas metas, seja de estudo, comportamento ou produção. Nas teorias comportamentalistas, uma diferença do homem em relação aos outros animais é que o homem responde mais rapidamente aos estímulos, mesmo que alguns cachorros e golfinhos tenham tido respostas muito competitivas com as humanas. Na educação, os estímulos negativos são os castigos e os positivos são os prêmios, para as respostas não desejadas e as desejadas, respectivamente. Até a primeira metade do século passado, punições, castigos e palmatória eram permitidos e ainda hoje professores e competições premiam seus alunos com estrelinhas, notas, troféus e medalhas. O conhecimento é aprendido como resultado de repetições, processo basicamente dependente da memória. Os construtivistas, porém, perceberam que o homem apresenta comportamentos que independem dos estímulos externos, que são resultado da vontade pessoal, do gosto, do prazer, da vontade, tais como a realização de uma obra artística, técnica ou ideias próprias para a solução de problemas. Essa concepção do comportamento e da aprendizagem teve repercussões na escola, deslocando a tendência dos treinamentos – nos quais o aluno é passivo e apenas responde a estímulos – para a atividade e o envolvimento do aprendiz com o objeto a apreender, ou seja, a construção do conhecimento pelas ações do sujeito com o meio.

Nesse sentido, os estudos da cognição humana desenvolvidos por Piaget focalizaram nas possibilidades de operações lógicas em cada fase do desenvolvimento humano, além da concepção da aprendizagem como um processo de adaptação e do conceito de esquema. O

---

[7] Ivan Petrovich *Pavlov (1849-1936) construiu sua teoria a partir de experiências com cães.* Burrhus Frederic *Skinner (1904-1990) elaborou a Teoria do Reforço.*

cognitivismo de Vigotski associou o desenvolvimento cognitivo e a linguagem, com as interações do ambiente físico, social e cultural do indivíduo, com significativa influência sobre o modo de pensar a didática de sala de aula, mesmo que essa não tenha sido o objeto de suas pesquisas. Por fim, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud – desenvolvida com forte influência de Piaget e Vigotski – segue a vertente construtivista, dando atenção aos processos de aprendizagem de conceitos matemáticos e aos fenômenos de sala de aula, motivo pelo qual foi adotada como referência no presente trabalho.

Alguns termos e locuções são fundamentais na formulação da TCC, tais como: conceitualização, campo conceitual, situação, invariantes, representação simbólica, atividade, mediação e esquemas.

O campo conceitual é para Vergnaud "[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição" (Moreira, 2002, p. 8). Assim, um conceito matemático não está isolado de outros – já que conceitos mais simples podem ser necessários para sua construção – e também, para sua assimilação, está associado a situações reais ou imaginárias que façam sentido para o sujeito.

Na TCC um conceito em geral – como os conceitos de mesa, automóvel, escola – e particularmente os matemáticos – como os conceitos de triângulo, polígono, reta, número – é constituído como um tripleto de três conjuntos: o conjunto de problemas, situações reais ou imaginárias cujos objetos, fatos e ações tenham **sentido** para o sujeito (S); o conjunto dos invariantes (I) ou ideias que identificam os objetos, propriedades ou relações que viabilizam o reconhecer, referir-se, operar, analisar ou dominar essas situações (os **significados**); e o conjunto das representações (R) desses invariantes através de uma linguagem (os **significantes**), seja ela natural (oral, gestual, corporal) ou simbólica (escrita, pictórica, gráfica ou matemática), o que viabiliza o pensamento individual e o compartilhamento com os outros.

(Moreira, 2002, p. 10 e Plaisance & Vergnaud, 2003, p.76).

A aprendizagem é um processo de adaptação dos conceitos a novas situações – portanto um processo pelo qual ocorre o aumento de conhecimentos – que conforme Plaisance e Vergnaud (2003, p. 64-65)

> [...] depende de quatro grandes ideias: a atividade do sujeito que aprende, a oferta de situações favoráveis ao aprendizado, a mediação por parte das pessoas que o rodeiam, a utilização de formas linguísticas e de formas simbólicas para comunicar e representar.

A consideração da **atividade** do sujeito que aprende é uma das principais diferenças entre as concepções comportamentalista e cognitivista da aprendizagem. A atividade supõe ações de iniciativa do sujeito, tais como perceber o real, separar e agrupar coisas de acordo com algum critério, ordenar, modificar o real, fazer hipóteses sobre essas modificações, testar, julgar por si mesmo e resolver problemas. "Desde a mais tenra idade o bebê dá prova de uma intensa atividade perceptiva e gestual em relação aos objetos de seu meio ambiente; e é essa atividade que lhe permite extrair relações estáveis entre as ações e seus resultados, e entre os objetos" (Plaisance & Vergnaud; 2003, p. 66). A atividade é movida por interesse, curiosidade, objetivos e ocorre mediante esquemas que o sujeito elabora e executa, compostos por elementos abstratos (regras, definições, conceitos, desejos, sentimentos) e reais (informações do meio obtidas pelos sentidos, ações físicas de tocar, mover, falar), para transitar pelos conjuntos dos sentidos, dos invariantes e das representações (S-I-R), adaptando, substituindo e lapidando os conceitos. "Na verdade, são os esquemas que se adaptam, isto é, as formas de organização da atividade; estes se modificam ao enfrentar-se novas situações" (Vergnaud et al., 2017, p. 18). A análise dos esquemas desenvolvidos em uma atividade mostra o caminho percorrido pelo sujeito para elaborar um estágio do conceito a aprender. Nas palavras de Plaisance e Vergnaud,

> O esquema é uma totalidade dinâmica funcional, uma organização invariante da conduta, quanto a uma certa classe de situações. Essa organização comporta objetivos

> e esperas, regras de ação, tomada de informação e de controle, e é estruturada por invariantes operatórios, isto é, conhecimentos adequados para selecionar a informação e processá-la (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato). (Plaisance & Vergnaud, 2003, p. 66)

Diferentes tipos de esquemas são usados em cada situação: **perceptivo-gestuais**, para contar objetos apontando com os dedos ou agrupando unidades; **pictóricos**, para desenhar um croqui, fazer um gráfico ou um diagrama; **verbais**, para fazer um discurso; **sociais**, para seduzir outra pessoa ou gerenciar conflitos; e **algorítmicos**, para a execução de uma série de passos para resolver um problema.

Os invariantes operatórios, por sua vez, são os conhecimentos, os conceitos contidos nos esquemas, designados como conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Os primeiros podem ser um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante. Os segundos são proposições tidas como verdadeiras sobre o real, sendo que ambos podem se manifestar pelo discurso ou pelas ações. "Expressamos nossos conhecimentos tanto pelo que dizemos (forma predicativa) como através do que fazemos em situação (forma operatória)" (Vergnaud et al., 2017, p. 19).

O aspecto provisório do conceito, em estado constante de complementação pela vivência e interação com os outros é outra característica da formação dos conceitos, destacada por Vergnaud.

> [...] A Conceitualização é, em primeiro lugar, um processo. Podemos falar da Conceitualização como resultado desse processo, mas antes de mais nada é um processo. Começa-se bem cedo o processo de Conceitualização, bem criança ainda e nunca jamais se termina. A gente acaba descobrindo aspectos que não tinha previsto. Só nos resta trabalhar outra vez, refletir de novo, repetir, também ser ajudado, auxiliado pelo outro. Trabalhar com o outro é importante. (Vergnaud, 2018, p.15)

A TCC, por detalhar a formação dos conceitos, principalmente pela ideia de campo conceitual, composto pelos conjuntos S-I-R e os esquemas, foi base para o planejamento das situações de ensino e elaboração do quadro de análise das manifestações dos alunos, descritas na seção seguinte.

Descrição do objeto e do plano de pesquisa

Uma experiência pedagógica foi realizada com uma turma de 24 alunos de 9º ano, de uma escola pública, do Município de Chapecó, SC. Foram ministradas 14 horas-aula de 45 minutos, distribuídas em 4 semanas. As aulas tiveram a participação da equipe de pesquisa, composta pela professora (chamada neste texto de **regente**), do **pesquisador** (primeiro autor desse trabalho) e de duas alunas do PIBID/Matemática/UFFS/2019, ambas coautoras desse trabalho, chamadas **professoras**.

Os dados foram coletados por observação dos comportamentos, escritas e falas dos alunos em classe, devidamente registrados em diário de bordo e fotografias. Uma breve reunião da equipe, após cada encontro, viabilizou a troca de opiniões sobre as manifestações dos alunos, as anotações no diário de bordo e a definição sobre novas atividades, como forma de triangulação da leitura do fenômeno observado. O *corpus* de análise é constituído, principalmente, pelos registros das interações com três alunos voluntários referidos anonimamente como A1, A2 e A3, conforme orientação do Comitê de Ética em Pesquisa[8]. Porém, são relatadas também falas e ações de toda a turma, nos momentos de síntese das atividades, visto que tais manifestações influenciam também a conceitualização dos três alunos voluntários.

A investigação é de abordagem qualitativa considerando os tipos de dados coletados – manifestações de alunos sobre conceitos envolvidos do campo conceitual de triângulo retângulo – e a forma de analisá-los: análise de conteúdo. A ação da equipe junto ao grupo de alunos, com o objetivo de transformar seus conceitos matemáticos (no sentido de adaptação de Piaget e Vergnaud) e ainda sua forma de entender a matemática, não como algoritmos a executar, mas como a arte de criar, justificar e aplicar proposições, mostram alguns traços de

[8] Processo CAAE: 15208819.1.0000.5564, parecer 3.427.803 CEP/UFFS, aprovado em 01 de julho de 2019.

pesquisa participante, já que na educação esse tipo de pesquisa envolve investigações e segundo Campos:

> [...] pressupõe algum grau de participação da escola – transmissão de conhecimentos, atitudes e hábitos – e a partir daí se propõe a pesquisar outras formas mais adequadas e desejáveis de alcançar essa finalidade através de uma ação junto aos professores ou demais adultos que lidam com as crianças, ação que acompanha todo o processo da pesquisa, e faz parte integrante dele. (Campos, 1984).

Uma leitura flutuante do material (Franco, 2012, p. 54) viabilizou a elaboração de um quadro de categorias (Tabela 1), aperfeiçoado ao longo do exame do material coletado. Cada registro foi interpretado, analisado e classificado cumprindo as seguintes etapas:

I – Identificação dos invariantes do campo conceitual Triângulo Retângulo.

II – Localização no mapa conceitual.

III – Identificação dos esquemas aplicados pelos alunos no trânsito entre os sentidos dos conceitos nas situações (S), os significados (I) e suas representações simbólicas (R).

IV – Identificação e caracterização de elementos de aprendizagem dos conceitos trabalhados (invariantes), considerando o nível esperado para a etapa de ensino escolar.

Tabela 1.

Categorias de análise

Código/Categoria	**Subcategorias**	
I Sentidos (S)	A	Reais
	B	Material didático
	C	Abstratos
II Invariantes (I)	A	Conceitos-em-ação
	B	Teoremas-em-ação
III Representação simbólica (R)	A	Gestual
	B	Pictórica
	C	Gráfica
	D	Linguagem natural
	E	Linguagem Matemática
IV Esquemas	A	Perceptivo-gestuais
	B	Pictóricos
	C	Verbais
	D	Sociais
	E	Algorítmicos

As categorias I, II e III referem-se ao tripleto Sentido-Significado-Representação que compõem a ideia de conceito de Vergnaud. Os sentidos dos conceitos, as ideias que o aluno já construiu naturalmente pela sua vivência na família, na sociedade, na rua ou na escola compõem a primeira categoria. A categoria (I-A) refere-se aos sentidos associados ao mundo real, tal como as coisas (automóveis, cadeiras, casas, ruas, água,...), situações econômicas (comércio, construção, indústria, agricultura,...), situações sociais (relacionamentos, encontros, diálogos, reuniões, eventos,...), enfim, situações que ocorrem independentemente do mundo escolar, mas que podem fazer sentido para algum conceito escolar. Situações de modelagem e problemas que mencionam elementos da realidade são exemplos de situações que dão sentidos aos invariantes e que auxiliam na formação de alguns conceitos novos e transformação dos já inicializados.

A categoria (I-B) refere-se às coisas e situações concretas criadas objetivamente com a finalidade de ensinar o conteúdo escolar, tais como os clássicos materiais didáticos de laboratórios de Educação Matemática. Esses objetos não precisam ter sentidos externos a eles mesmos. Um Geoplano não tem sentido fora da escola. É apenas um material didático cujo sentido é restrito ao que se observa. Por exemplo, entende-se por um quadrado de lado duas unidades, a região limitada por um atilho colocado, de modo que, partindo de um prego, a cada duas unidades, seja feito um giro de noventa graus. Os pregos, a madeira e o atilho são objetos reais, aos quais pode-se atribuir um sentido matemático, como vértices, região e lados, respectivamente.

Algumas situações de ensino podem ser propostas apenas com o enunciado de um problema, uma ordem, sem sentido real ou representado com material didático. Na ordem: Mostre que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º, existe apenas uma imagem – não um objeto – à qual o aluno pode atribuir algum sentido aos invariantes envolvidos. Por isso, essa categoria (I-C) refere-se ao sentido abstrato dos conceitos.

A categoria (II) refere-se aos conceitos e teoremas matemáticos, os invariantes. Para Vergnaud esses conceitos estão em formação e se tornam mais completos na medida em que o aluno deles se valem para resolver novas situações. O conceito de vértice de um polígono, por exemplo, pode passar de um bico, um canto, até chegar à formulação de ponto de interseção entre duas retas concorrentes. Porém, mesmo de forma precária, bico pode ser um conceito-em-ação (II-A), usado para elaborar o conceito de triângulo e para criar uma proposição. Já nos polígonos, o número de vértices é igual ao número de lados, um teorema-em-ação (II-B).

A categoria (III) refere-se às representações simbólicas das ideias matemáticas. É comum, nos diálogos, os alunos explicarem seus pontos de vista fazendo gestos (III-A), recorrendo a desenhos no quadro ou no papel (III-B) ou, em estágios de argumentação mais complexos, construindo gráficos (III-C). A linguagem natural (III-D) acompanha, em regra, os processos de argumentação e a linguagem matemática, com seus símbolos e regras, pode ser um estágio a chegar, na representação dos conceitos.

Um esquema é estruturado por invariantes operatórios e predicativos, organizados para resolver uma situação. Na ordem sobre os teoremas dos ângulos internos de triângulos, mencionada acima, uma possível cadeia de esquemas é desenhar um triângulo no papel, recortá-lo, recortar os três ângulos e agrupá-los sobre uma régua (IV-A). Outro esquema poderia ser a transposição de dois ângulos, para junto do terceiro, sem recortar o papel (IV-B). Ao fazer tais argumentações várias explicações e convencimentos ocorreriam no grupo de alunos. Esses diálogos são acompanhados de decisões, de persuasão, de retórica e adesões daqueles que concordam com a ideia defendida (IV-D). Todas essas possibilidades, ainda poderiam ser acompanhadas de uma explicação em linguagem natural (IV-C). Outro esquema poderia ser a medida e soma dos ângulos internos de vários triângulos não semelhantes.

Nessa opção os passos medir-somar-comparar constituem um algoritmo (IV-E). As semelhanças na nomeação das subcategorias das categorias (III) e (IV) se justificam, visto que os esquemas são percebidos com tipos de linguagens. Além disso, um invariante representado matematicamente (III-E) pode ser explicado usando a linguagem natural (IV-C) para convencer um colega (IV-D).

A formação dos invariantes do campo conceitual do Teorema de Pitágoras

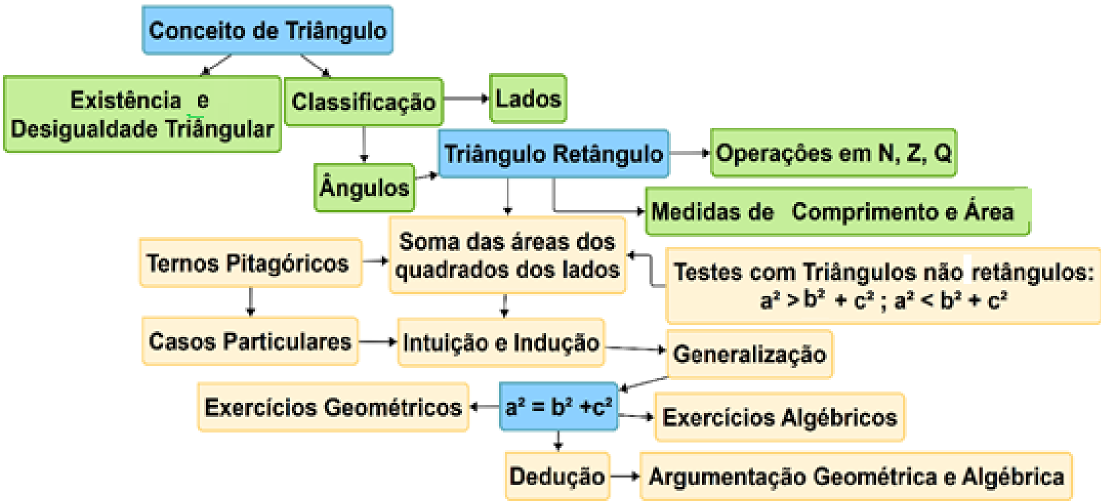
No mapa conceitual apresentado na Figura 1, pode-se visualizar os conceitos, teoremas e esquemas do campo conceitual do Teorema de Pitágoras. O emprego de setas direcionais e de um certo ordenamento, vale ressaltar, não significa que o aluno construa seus conceitos com tal sequência. O mapa apenas dispõe os elementos do campo conceitual e com isso, constitui-se em um recurso de planejamento, monitoramento de práticas didáticas e análise dos percursos da conceitualização.

Os conceitos de triângulo, triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras são os principais invariantes do campo conceitual. A desigualdade triangular, a classificação de triângulos, as operações numéricas e as medidas (além de outros como o vértice, lado, ângulo interno e polígono) envolvem conceitos e teoremas, cujo atribuição de sentido mostrou-se necessária para a compreensão dos conceitos principais. A mesma hierarquia vale para o outro bloco de conceitos e teoremas conectados por setas à expressão algébrica do Teorema de

Pitágoras. Processos de intuição, indução, dedução e generalização estão conectados à criação e argumentação de teoremas e são executados mediante o uso de esquemas.

Figura 1.

Mapa conceitual do Teorema de Pitágoras



As situações de ensino foram programadas com orientações escritas (folha de atividades), sugerindo ações de manipulação de materiais, observação, comparação, análise de dados, diálogos entre os colegas e registro de conclusões em pequenos grupos (3 alunos), seguidas de sínteses coletivas, gerenciadas pelas professoras e acompanhadas pela regente e pelo pesquisador. A escolha de uma metodologia ativa de ensino deveu-se à expectativa de que os elementos de construção dos conceitos fossem perceptíveis nas ações dos alunos.

Nas Tabelas 2, 3, 4, 5 e 6 são apresentadas tanto as manifestações em plenário (Turma), como as expressões específicas dos alunos observados A1, A2 e A3 e o respectivo enquadramento, com os códigos das categorias da Tabela 1 (terceira coluna), para cada situação de ensino, especificada no cabeçalho da tabela. As falas dos alunos estão escritas entre aspas e os termos matemáticos, em itálico.

Para a análise dos registros (apresentada na forma de texto após cada tabela), teve-se como princípio, que cada aluno faria suas próprias conceitualizações, agregando aos seus, outros conceitos e informações que considerasse relevantes, seja porque fizessem sentido ou porque a fonte parecesse confiável. Tal princípio decorre da concepção de Piaget – adotada por Vergnaud (2018, p.15) – sobre o processo de adaptação.

Tabela 2.

Categorização sobre o conceito de triângulo e condições de existência: Situação 1

Situação 1 – O que é um triângulo? O que o forma?”	
Registros	
Turma	**Categorias**
- Um aluno afirmou: “Triângulo é uma forma com três lados iguais”.	II-A; III-D
- Outro aluno fez o desenho de um triângulo aparentemente equilátero e teve adesão de boa parte da turma, que considerava triângulos somente as figuras com lados de mesmo comprimento.	II-A; III-B
- Outra aluna definiu: “Triângulo é uma forma com três lados iguais, mas podem ser diferentes”.	II-A; III-D
- A palavra *segmento* é conhecida e aparece juntamente com *lado*.	II-A; III-E
- As professoras esclareceram que para um *polígono* ser um triângulo, basta que tenha apenas três ângulos.	II-A; III-E;
- A palavra *polígono* não foi bem definida, apenas usada pelas professoras. Essa palavra inserida artificialmente, pode ter deixado o conceito sem significado para os alunos. Os alunos têm usado as palavras *figura e forma*.	IV-D II-A em formação.
- Os conceitos de *ângulo interno* e *vértice*, não estavam claros para muitos alunos. Foram retomados na síntese e nos diálogos de grupo.	II-A II-B
- Não houve exploração da propriedade dos polígonos: número de lados = número de ângulos = número de vértices.	implícito
A1	
Percebeu facilmente que se os lados fossem diferentes a *figura* continuava sendo um triângulo.	II-A
A2	
Idem A1	II-A
A3	
Em diálogo com o pesquisador sobre o que significa a palavra triângulo, verificou que o conceito de *ângulo interno* não estava claro. Foram usados dois palitos para dar a noção de ângulo e introduzidos os termos *vértice* e *abertura entre as retas*. Uma aluna buscou um transferidor espontaneamente. Mediram alguns ângulos. Chegou-se ao acordo de que um triângulo tem três lados e três ângulos e que esses podem ser diferentes entre si.	I-B II-A I > II > III-D

Se somadas as manifestações de todos os alunos, ainda assim poder-se-ia dizer que houve um processo de aperfeiçoamento do conceito de triângulo, com esquemas diversos e agregação de vários conceitos-em-ação, que convergiram para um conceito matemático razoavelmente preciso de triângulo. Porém, esse último conceito não representa os processos individuais, pois alguns alunos não captam todas as manifestações dos colegas ou da própria síntese elaborada pelas professoras, seja porque estão envolvidos com outras tarefas, por desatenção ou desinteresse, ou por dificuldades de compreensão. Isso significa, que os procedimentos didáticos precisam levar em conta, essa diversidade de formas de conceitualização, propondo mais oportunidades ricas de interações.

As alunas A1 e A2, provavelmente, já tinham um conceito-em-ação de triângulo associado à "figura" de três lados, inclusive com a generalização para lados não côngruos.

A aluna A3, porém, permaneceu com a ideia de triângulo equilátero[9]. A análise da palavra triângulo - no pequeno grupo – levou à revisão dos conceitos de ângulo, vértice e ângulo interno. Esquemas perceptivo-gestuais (IV-A) com materiais concretos (I-B) foram empregados para representar o conceito de ângulo, ou seja, o invariante (I), cuja representação (R) era conhecida pela palavra ângulo, tomou a forma concreta (S) de abertura entre retas e ainda foi medido. Com isso, a noção inicial de ângulo, adquiriu maior precisão e viabilizou a formação de outro conceito: o de ângulo interno do triângulo. Assim, além de ampliar o campo conceitual existente antes do diálogo, A3 pode ter generalizado seu conceito de triângulo para "qualquer figura com até três lados, ou três ângulos", ideia reforçada pelas professoras no momento de síntese da aula. De modo geral, ficou evidente que os alunos superaram o conceito inicial de triângulos de lados congruentes, quando reconheceram como triângulos aqueles desenhados nas roupas, aceitando os argumentos dos colegas e das professoras (IV-D).

Tabela 3.

Categorização sobre o conceito de triângulo e condições de existência: Situação 2

Situação 2 – Qual a condição para que 3 palitos formem um triângulo?	
Registros	
Turma	**Categorias**
- Os alunos mediram os palitos e observaram que "nem todos os 3 palitos formam triângulos, porque as medidas não fecham".	I-B, IV-A
- Os alunos usaram expressões e gestos movimentando os palitos, indicando a impossibilidade, mas não criaram uma condição para a existência de triângulo.	I-B, IV-A I-B
- Tentativas de mostrar a soma dos lados menores com o compasso, sobre o lado maior tiveram fraco efeito esclarecedor.	Apoio de III > I e I > III

[9] Em Santos e Santos (2016), p.7, também foram identificados esses conceitos equivocados de triângulo: "Triângulo retângulo é que todos os lados têm a mesma medida"; "Por ter lados iguais, o nº 1, 2 e 3".

- Com os novos exercícios a condição a + b > c, onde c > a e c > b foi formulada para toda a Turma. - Identificaram triângulos em desenhos nas suas roupas e nos esquadros.	Generalização II-A
A1	
- Usou a palavra "base" para o lado maior e entendeu a relação entre os lados para que exista triângulo. "A base tem que ser menor que a soma dos outros lados". - Respondeu corretamente o exercício: "15, 25 e 30; 15 + 25 = 40 > 30."	I > III-D> II IV-C
A2	
- Procedimentos semelhantes à aluna A1. - Respondeu corretamente o exercício: "10, 6 + 5=11; A soma dos lados é maior do que 10, é por isso que forma um triângulo"	I > III-D > II IV-C
A3	
- Observou que alguns grupos de 3 palitos não formam triângulos e outros formam, mas não conseguiu elaborar uma regra de existência do triângulo. Os exercícios melhoraram a compreensão da desigualdade triangular, mesmo que de forma intuitiva.	Limitação a I e a casos particulares.

A propriedade da desigualdade triangular, porém, não é necessária para o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras, mas se fez presente no conceito de triângulo, com a pergunta: quaisquer três segmentos de reta formam triângulos? A investigação partiu de casos particulares (palitos) e foi conduzida para uma condição geral de existência de triângulos.

As alunas A1 e A2 aplicaram um conceito-em-ação próprio de "base" como o lado maior do triângulo e girando os outros dois fixados nas extremidades do maior, formularam a relação entre os lados para a existência do triângulo. Assim, elaboraram um teorema-em-ação em linguagem natural, cuja argumentação da sua verdade é empírica (movimento dos palitos). O invariante *lado* e o esquema de adição como a junção dos lados, por sua vez, fazem parte de uma situação (S) de materiais didáticos e foram suficientes para a formulação do teorema da desigualdade.

Para A3, o esquema de girar os lados menores fixos nas extremidades do maior, teve sentido real, porém, a junção dos lados não foi associada à adição, apenas com o modelo dos palitos. Foram necessários exercícios que evidenciassem a desigualdade triangular, tais como: para construir triângulos, se dois lados medem 6 cm e 3 cm, o terceiro lado pode medir 1 cm? e 2 cm? e 5cm? Nessa nova situação, a ligação com o real (S) foi substituída pela imaginação dos triângulos (I-C) para favorecer a operação de adição e induzir o teorema da desigualdade triangular. Não se pode afirmar que A2 tenha se apropriado do sentido e significado do teorema, mas, pelas respostas corretas dos exercícios, isso pode ter ocorrido.

A generalização do teorema, com a devida representação simbólica, foi incentivada na atividade dos pequenos grupos e, mais tarde, para a Turma toda. A representação dos lados por letras a, b e c, partiu de exemplos particulares, trabalhando de forma intuitiva o conceito de variável e culminou com o uso dos sinais de maior e menor, até a escrita simbólica: Para que os segmentos de reta a, b e c sejam lados de um triângulo, $a > b + c$, sendo $a > b$ e $a > c$. A frase toda provavelmente não teve uma assimilação significativa, mas observou-se que a discussão, a escrita em linguagem natural, o refinamento da linguagem e o uso de símbolos matemáticos auxiliaram a compreensão do teorema, reforçando a ideia de que a representação (R) e a formação do conceito (I) ocorrem com mútuo apoio, de certa forma, como refere-se (Vergnaud, 2018, p. 20):

> A expressão linguística e a disposição simbólica de representação (existe grande variedade delas) agregam peso e estabilidade às formas conceituais assim elaboradas no transcurso do desenvolvimento e ajudam a conceitualização implícita na ação.

Por outro lado, a generalização com representação simbólica não é uma tarefa elementar na Escola Básica, até porque parece não haver uma necessidade dela para os alunos. Ou seja, não há um sentido (S) latente para generalizar proposições em seu mundo, além da vontade do professor, que a incentiva, na esperança de que esse nível de conceitualização vire um hábito, próprio da estrutura do conhecimento científico.

Tabela 4.

Categorização das manifestações sobre triângulo retângulo.

Situação 3 – Classificação dos triângulos

Dados vários tipos de triângulos para cada grupo, foi proposta a tarefa de classificá-los quanto aos lados e ângulos.

	Registros	Categorias
Turma	- A dificuldade maior foi criar critérios para classificação e usar o conceito de ângulo interno. - Para melhorar o conceito de ângulo interno, foram medidos os ângulos e verificado o teorema da soma desses ângulos para os triângulos. - As professoras tentaram conduzir a classificação a partir de alguns critérios: Todos os lados/ângulos diferentes; dois lados/ângulos iguais; todos os ângulos menores que 90º; um ângulo maior que noventa; um ângulo reto. Obteve-se a classificação, inclusive com a nomeação dos grupos de triângulos, mas pareceu não fazer muito sentido para os alunos. Mesmo assim, o objetivo de mostrar que existem diferentes triângulos e que o triângulo retângulo é um tipo especial, foi atingido. - O conceito de triângulo retângulo como "Um triângulo em que tem um dos ângulos é 90º", decorreu da classificação e foi sistematizado pelas professoras em grupo, usando um símbolo para o ângulo reto. - As professoras nomearam os lados do triângulo retângulo: catetos (lados menores) e hipotenusa (lado maior). - Os alunos verificaram que a hipotenusa está oposta ao ângulo reto, para qualquer triângulo retângulo.	Ausência de I I-B, II-A III-D, III-E II-A I-B II-A III-E III-E II-B, IV-A,
A1	- O teorema da soma dos ângulos internos era conhecido. Ao medir e somar os ângulos, porém, o resultado nem sempre deu exatamente 180º. Ela suspeitou de erros na medida. Não duvidou da propriedade. Ao ser questionada sobre a validade do teorema para todos os triângulos, ela ficou em dúvida. Questionada sobre os resultados das medidas de vários triângulos, ela tomou como surpresa a regularidade das somas darem próximas de 180º: "Deu! É! Então vale pra todos!"	II-B, I-B, III-C, II-B
A2	Ausente	
A3	- Aperfeiçoou o conceito de ângulos internos com as medições e aceitou a ideia de que a soma desses é constante para todos os triângulos.	II-B, I-B, III-C, II-B

A operação de classificação, no entanto, não fez sentido (I), porque o conceito-em-ação de ângulo interno e o sentido de classificar com critérios, não estavam bem consolidados. Por isso, antes de classificar quanto aos ângulos, o próprio sentido do conceito de ângulo e o de ângulo interno de polígono tiveram que ser trabalhados. A opção didática foi medir os ângulos com transferidor. O conceito ficou mais consolidado e, com os dados de alguns triângulos, o interesse foi deslocado para a verificação da regularidade da soma dos três ângulos internos.

Tal investigação não estava na situação proposta, mas se estabeleceu em função dos dados disponíveis e da discussão no grupo com a equipe, tanto nas ações de A1 quanto de A3. Novamente, ocorreram ações de observação de dados (I), indução de uma propriedade (II-B) e generalização – mesmo sem registro simbólico. Essa sequência de ações pode se constituir em um esquema geral (observação-indução-generalização-representação) de construção de teoremas ou conceitos-em-ação.

A classificação dos triângulos – objetivo principal da situação 3 – foi finalizada pelas professoras de modo diretivo, com a participação da Turma. Esse direcionamento, é decorrente das limitações do tempo escolar, no qual as sínteses dos conhecimentos a ensinar precisam ocorrer. Por isso, a classificação não ficou bem consolidada, porém o conceito de triângulo retângulo ficou, já que o conceito de ângulo reto foi entendido, com base nos conceitos-em-ação de ângulo interno e de medida de ângulo.

Tabela 5.

Categorização das manifestações sobre o Teorema de Pitágoras

Situação 4 – Teorema de Pitágoras 1. Desenhe quadrados, cujos lados sejam os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. 2. Existe alguma relação entre as áreas dos quadrados? 3. Essa relação é verdadeira para qualquer triângulo retângulo? 4. Exemplos e exercícios: dados dois lados, calcular o terceiro.		
	Registros	**Categorias**
Turma	- As dificuldades ocorreram com o fraco domínio do sentido conceitual de área revisado pelas professoras e equipe. - Passagem da contagem das unidades de área uma a uma, para o produto do número de unidades de uma linha, pelo número de linhas. - A indução da folha de atividades: "Pegue os três quadrados gerados pelos lados do triângulo retângulo e utilizando recortes, sobreponha os quadrados menores sobre o maior. O que podemos concluir sobre a área do maior e a soma da área dos dois menores?" - Revisão das propriedades das equações e dos radicais.	I-B; II-A; III-D I-B; II-B; III-A IV-A I-B; II-B; III-D II-A; II-B; III-E
A1	- Resolveu a atividade de calcular as áreas dos quadrados, inicialmente contando unidade por unidade, passando em seguida para o uso da multiplicação. - Sobrepôs um dos quadrados (8x8) inteiro sobre o maior (10x10). Recortou quadrado 6 x 6 e o sobrepôs ao maior. Concluiu: "a soma dos dois menores fecha a área do maior" - "Que a soma das áreas dos catetos é igual a área da hipotenusa" ou de forma simbólica "$c^2 = a^2 + b^2$".	I-B; II-B; III-D IV-A > IV-E I-B I-B; III-D II-B; III-D; III-E
A2	A aluna reconhece a relação para o caso particular "somando a área do 9 com 16" subentende que a soma dá 25 e que corresponde a área do retângulo gerado pela hipotenusa. Generaliza em linguagem natural "Recortando os dois menores quadrados conseguimos a área total do quadrado maior, a área dos menores somados dá a área do maior" $c^2 = a^2 + b^2$".	I-B; III-D II-B; III-D; III-E
A3	Semelhante a A2	

Fonte: Os autores.

O sentido (I-B) do conceito de área e de unidade de medida (II-A) foi retomado com o material didático e representado como um produto – posteriormente como um quadrado – das medidas dos lados do quadrado (III-D, III-E), antes de iniciar a Situação 4. A contagem das unidades de área, uma a uma e a multiplicação do número de unidades de uma linha, pelo número de linhas, são esquemas algorítmicos (IV-E) para calcular a área de quadrados. Nesse caso, pode-se observar a substituição de um esquema precário, por outro mais eficiente. Particularmente, esse esquema algorítmico foi criado sobre o conceito de multiplicação – por isso tem um significado (S) – e não foi apenas decorado, como costumam ser os algoritmos operatórios ensinados na Escola Básica. Novamente, nessa situação, repete-se a rotina de observar, induzir, formular proposições, representar, generalizar e aplicar, que constitui um ciclo do processo de conceitualização.

Por ser uma atividade com passos bem definidos, os alunos não apresentaram muita dificuldade em concluir sobre a relação entre as áreas dos quadrados. Com o auxílio do material didático (quadrados gerados pelos catetos e hipotenusa) a relação ficou evidente. Porém, em um primeiro momento, a conclusão sobre as áreas ficou desconectada dos lados do triângulo, impasse que foi resolvido com a representação da área, como o quadrado do lado. Novamente, a discussão (IV-C; IV-D; III-D), a escrita em linguagem natural (III-D) e o uso de símbolos matemáticos (III-E) auxiliaram a compreensão do teorema (II), reforçando a ideia de que a representação e a formatação do invariante, ocorrem mutuamente. Nesse estágio de compreensão, o teorema é apenas uma proposição que potencialmente é verdadeira – verificada empiricamente para vários casos – que veio a ser um teorema-em-ação, na medida que foi usada em exercícios para calcular um lado, dados dois lados de triângulos retângulos. Nesses exercícios, teoremas-em-ação de outros campos conceituais (propriedades das equações e radicais) foram retomados.

Alguns alunos não identificaram corretamente a hipotenusa e os catetos e por isso, substituíram-nos equivocadamente na fórmula de Pitágoras, porque os símbolos da fórmula (R) não tinham o sentido (S) correto para eles. As letras a, b e c significam apenas lados, independentemente de serem catetos ou hipotenusa. O trabalho das professoras foi de significar esses símbolos, mostrando que um deles refere-se à hipotenusa e os demais aos catetos.

Tabela 6.

Categorização sobre a demonstração do Teorema de Pitágoras

Situação 5 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

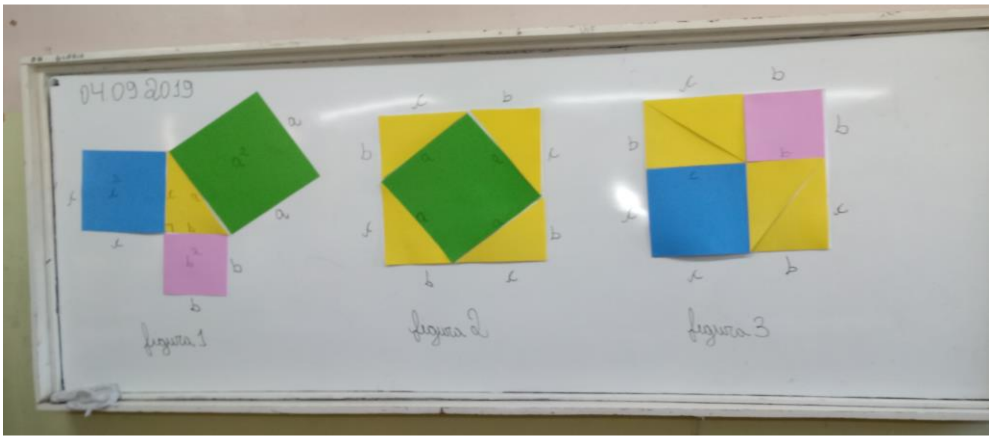
As figuras 1, 2 e 3 foram colocadas no quadro (Figura 3).
1. Descreva as figuras.
2. Compare as figuras 2 e 3.
3. Que figuras geométricas estão presentes em ambas as figuras 2 e 3?
4. Usando a propriedade fundamental das equações, retire as figuras semelhantes, uma a uma, das figuras 2 e 3. Descreva o que sobrou.

	Registros	**Categorias**
Turma	- Uma introdução sobre o que significa argumentar e demonstrar propriedades matemáticas antecedeu a demonstração.	I-C
	- A situação foi trabalhada, inicialmente em pequenos grupos e mais tarde, as professoras sistematizaram as respostas de todas as questões.	I-B, II-A, II-B, III-E
	- O teorema também foi demonstrado em plenário, expressando algebricamente a igualdade das áreas das figuras 2 e 3 e eliminando os termos semelhantes.	I-B, II-A, II-B, III-E
A1	- Reconheceu todas as figuras geométricas das figuras 1,2 e 3.	II-A
	- Associou os triângulos e o quadrado da figura 1 aos semelhantes das figuras 2 e 3.	II-A
	- Percebeu que as figuras 2 e 3 têm lados côngruos e a mesma área.	IV-A
	- Reconheceu as figuras que sobraram após a retirada dos triângulos amarelos, mas não percebeu que a igualdade significava a relação entre a hipotenusa e os catetos.	IV-A, III-B II-B
	"2ª um quadrado de lado a^2" "3ª um quadrado de lado b^2 e outro c^2"	I-B
A2	- Reconheceu todas as figuras geométricas das figuras 1, 2 e 3.	II-A
	- Sobre a questão 2: "tem a mesma forma, o mesmo perímetro e a mesma área. Porque os lados têm as mesmas medidas".	
	- Sobre a questão 3: "Quadrados e triângulos retângulos".	
	- Não concluiu a atividade. (Problemas na leitura da questão).	
A3	Ausente	

Na análise da Situação 5, as observações sobre as figuras 1, 2 e 3 referem-se às figuras presentes na Figura 2, sobre o material didático utilizado na demonstração do Teorema de Pitágoras. A proposta de discutir a verdade do Teorema de Pitágoras teve uma abordagem de argumentação empírica (S), apoiada com a representação simbólica (R). Novamente, a folha de atividades foi diretiva, conduzindo os alunos, passo-a-passo, à conclusão desejada. Tais procedimentos são compreensíveis, tendo em vista os tempos escolares e as condições de experiência em demonstrações no ensino fundamental.

Figura 2.

Material didático sobre a demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: os autores.

A questão 1 requereu não apenas a identificação das figuras geométricas (uso dos conceitos-em-ação de triângulo, retângulo, catetos e hipotenusa), mas a verificação de que os quadrados e triângulos da figura 1 são os mesmos (côngruos) das figuras 2 e 3 (esquemas perceptivos, IV-A). Ou seja, as figuras 2 e 3 foram construídas usando os quadrados e triângulos da figura 1.

A comparação entre as figuras 2 e 3 (questão 2) não é tão simples, pois requer a identificação dos lados, que pode ser geométrica ou simbólica. Visualizando os lados das figuras 2 e 3, talvez não se perceba de imediato a congruência do lado *b*, visto que na figura 1 é um cateto e na 2, o lado do quadrado. Um exame da figura 2, resolve essa possível dúvida. O material didático facilitou essa percepção ao mostrar também o símbolo. Assim, os alunos (inclusive A1 e A2) concluíram facilmente que os lados de ambos os quadrados é $c+b$, e, portanto, eles possuem a mesma área (IV-B, II-B). Novamente, a representação contribui para associar o sentido aos invariantes.

As questões 3 e 4 requerem conceitos-em-ação de álgebra. É necessário entender a igualdade entre as figuras 2 e 3 como uma equação. Ao retirar um triângulo de cada uma delas, a igualdade se mantém. Essa ação só tem sentido se for justificada pelo teorema-em-ação da propriedade fundamental das equações (II-B), que não necessariamente precisa estar escrito, mas compreendido, na forma verbal “tirando o mesmo triângulo em cada figura, as áreas das figuras resultantes permanecem iguais”.

A resposta de A1 para a questão 4 mostra que, apesar de estar correta, a aluna não percebeu que o teorema ficou demonstrado. Ela apenas reconheceu as figuras restantes, mas não associou a expressão das respectivas áreas com o Teorema de Pitágoras.

Considerações finais

Os elementos do campo conceitual de triângulos retângulos são os conceitos-em-ação triângulo, polígono, ângulo, lado, vértice, ângulo reto, triângulo retângulo, área – elencados no mapa conceitual – e os teoremas-em-ação, as condições de existência de triângulo, área de quadrado, o Teorema de Pitágoras e as propriedades de equações. O domínio de todo esse conhecimento é necessário para uma formação consistente – na concepção de Vergnaud, com sentido e representação – do conceito e para a utilização desse na resolução de problemas.

Algumas questões podem ser apontadas como características desses elementos, como indicativo de caminhos de aprendizagem em práticas pedagógicas:

1. **Os conceitos e teoremas-em-ação aparecem em rede**: para ensinar triângulo retângulo, foi necessário esclarecer o sentido de vários outros conceitos, tais como ângulo, lado, polígono, vértice e ângulo reto. Essa rede não tem a ordenação linear dos programas seriados escolares. Cada nó da rede pode e deve ser acessado quando se fizer necessário, ou seja, quando o aprendiz mostrar que precisa saber mais sobre qualquer conceito ou propriedade.
2. **A relação entre sentido, conceito e representação tem várias ordens e complementam-se no processo de conceitualização:** as experiências mostraram que cada componente do tripleto S-I-R é necessário no processo de conceitualização. O conceito de triângulo (I) ficou mais consistente e genérico ao discutir-se os sentidos das palavras triângulo, ângulo interno, lados e vértices (S), devidamente representados com materiais didáticos e letras (R). Nesse caso, a ordem foi I > S > R. Da mesma forma, a representação simbólica, com letras para os

lados do triângulo e sinais de desigualdade, contribuiu para a compreensão da condição de existência. Nesse caso, a ordem foi S > I > R > I, já que R melhorou a propriedade I. A linguagem faz a mediação entre o sentido e o conceito, de forma dinâmica, transformando-se com o tempo e as necessidades das tarefas, de gestos e palavras soltas, até símbolos matemáticos.

3. **A dificuldade de se fazer inferências sem o sentido do conceito:** o processo de ensino de uma propriedade ou algoritmo, geralmente, se restringe ao nível simbólico das representações, que é o ponto de chegada da aprendizagem. Esse fato explica alguns equívocos ao usar o Teorema de Pitágoras. As letras *a*, *b* e *c* (lados) dispostas como $a^2 = b^2 + c^2$ indicam que *a* é a hipotenusa e *b* e *c* são catetos. No entanto, essa indicação não é percebida por alguns alunos, por não atribuir esse sentido aquela representação. Da mesma forma, é estranho conversar sobre triângulo retângulo, com alguém que não conhece como se mede ângulo, nem os sentidos de ângulo interno e ângulo reto. Nesses e em outros exemplos, o sentido (S) dos conceitos, é insuficiente para avançar no ensino e na aprendizagem do conceito principal. Retomar tais sentidos e representações mostrou-se fundamental nas experiências pedagógicas da pesquisa, para que os alunos tivessem um desempenho razoável nas investigações das situações. Prosseguir o ensino sem o domínio do sentido, leva a uma aprendizagem apenas de memorização – de nomes, fatos, teoremas, algoritmos – insuficiente para o desenvolvimento cognitivo e distante do que seria o objetivo do ensino da matemática[10], segundo Beatriz D'Ambrósio:

> [...] o objetivo do ensino da Matemática é que os alunos tenham legítimas experiências matemáticas, ou seja, experiências semelhantes às dos matemáticos" Essas experiências devem se caracterizar pela identificação de problemas, solução desses problemas e

[10] A tese de reproduzir as ações de criação e demonstrações no ensino elementar, semelhante ao que fazem os matemáticos profissionais é também proposta e investigada em Ponte, Brocado e Oliveira, (2016), Boavida (2005); Almouloud e Nunes (2013), dentre outros.

negociação entre o grupo de alunos sobre a legitimidade das soluções propostas. (D'Ambrósio, 1993).

Não por acaso, a sequência de ações de observação de dados, indução de propriedades, registro simbólico e generalização, repetiu-se nas cinco situações relatadas, evidenciando a atribuição de sentido aos conceitos, como condição mínima para que o processo de conceitualização fosse efetivado. Tal consideração, não significa a redução do conceito ao sentido – o conceito é invariante e pode ter vários sentidos e representações – mas refere-se às dificuldades de conceitualização em processos excessivamente simbólicos.

4. **Sobre os tempos e espaços da escola e a conceitualização:** o tempo escolar para atribuir o sentido aos conceitos é limitado e rotinas, tais como, copiar do quadro, recortar papeis, fazer longos cálculos manualmente, concorrem com a discussão criativa e as sistematizações. Nas experiências realizadas, as perguntas e passos orientadores foram entregues em folhas de atividades impressas e conduziram os alunos aos teoremas a ensinar, trabalhando com toda a rede de conceitos e teoremas-em-ação disponíveis. Tal objetividade é necessária para que sejam executados vários ciclos S-I-R, que promovem a apropriação dos sentidos e da linguagem, para que os conceitos se transformem, de fato, em conceitos-em-ação, fundamentais para a resolução de problemas.

Ficou evidente nas experiências da pesquisa, a necessidade de investigar a atribuição de sentido aos invariantes no processo de conceitualização e as suas implicações no desenvolvimento da competência matemática e da autonomia, em ambientes escolares, com metodologias ativas, tais como a investigação matemática, resolução de problemas e modelagem matemática, o que se pretende fazer em trabalhos futuros.

Agradecimentos

Nossos agradecimentos à Profa. Regi Bazzo Coradi, à FAPESC, à UFFS, à Secretaria Municipal de Educação de Chapecó.

Referências

Almouloud, S. A. & Nunes, J.M.V. (2013). O modelo de Toulmin e a análise da prática da argumentação em matemática**.** *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.15, n.2, p. 487-512.

Almouloud, S. A. & Bastian, I. V. (2003). O Teorema de Pitágoras: Uma Abordagem Enfatizando o Caráter Necessário e Suficiente. *Educação Matemática em Revista* – SBEM. Brasília (DF), n. 14, ano 10. p. 45-53.

Assis, A. N. (2016). Relações Trigonométricas no Triângulo-Retângulo: A construção do Conceito de seno, cosseno e tangente, como uma relação no ângulo agudo, por meio de material manipulativo. ENEM, 13, 2016, São Paulo, Brasil. *Anais*... São Paulo: BR, 2016, p. 1- 12.

Barros, A. L. S. & Bellemain, P.M.B. (2018). Relações pessoais e relações institucionais com o teorema de Pitágoras. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo (SP), v.20, n.3, p. 145-163.

Boavida, A.M.R. (2005). A argumentação em Matemática: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. *Dissertação de mestrado*. Faculdade de Ciências da universidade de Lisboa, Departamento de Educação.

Bovo, A. A.; Barbosa, L. A. L.; Doná, E. G. & Moreira, L. A. (2012). Descomplicando o Teorema de Pitágoras. *Educação Matemática em Revista* **–** SBEM. Brasília (DF), n. 36 p.22-30.

Brito, A.C.S. & Costa, M.LC. (2009 março). Explorando o Teorema de Pitágoras com Geogebra. *Educação Matemática em Revista***.** Brasília, DF, no. 26, p.26 - 32.

Campos, M.M.C. (1984 maio). Pesquisa participante: possibilidades para o estudo da escola. *Cadernos de Pesquisas:* FCC. São Paulo, v. 49, p. 63-66.

D'Ambrósio, B. (1993). Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Proposições*, v. 4, no. 1[10]. p. 35 – 41.

Dias, N.M. & Dalcin, A. (2015). *Uma proposta didática para o estudo do triângulo retângulo e do Teorema de Pitágoras*. 20 f. Trabalho de Conclusão de Curso. Três Passos, RS.

Franco, M.L.P.P.B. (2012). *Análise de conteúdo*. Brasília: Liber Livro.

Gerdes, P. (1988). De quantas maneiras é que se pode demonstrar o Teorema de Pitágoras? *BOLEMA-Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro, (SP). v. 3, n. 5, p. 1-9.

Jahn, A. P. & Bongiovanni, V. (2008). O Teorema de Pitágoras segundo a dialética ferramenta-objeto. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, (SC), v. 3, n.1, p.78-83, UFSC.

Lamas, R.C.P. & Correia, J.M. (2006). O Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado**.** *Núcleos de Ensino da Unesp*, São José do Rio Preto (SP). pp.815-825.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências* – V7(1), pp. 7-29.

Olfos, R.; Guzmán, I. & Estrela, S. (2014 abril). Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. *BOLEMA-Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro, (SP). v. 28, n. 48, p. 341-359.

Pereira, A.B.; Munhoz, A.V. & Quartieri, M.T. (2016). Atividades investigativas: possibilidade de ensino de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo na Licenciatura em Matemática. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis (SC), v.11, n. 1, p. 131-147.

Plaisance, E.; Vergnaud, G. (2003). *As ciências da educação.* São Paulo: Edições Loyola.

Ponte, J.P.; Brocado, J.; Oliveira, H. (2016). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Santos, P.R. & Santos, C.A.B. (2016). Estudo sobre a trigonometria no triângulo retângulo na perspectiva da Teoria dos Campos conceituais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM, 13, 2016, São Paulo, Brasil. *Anais*... São Paulo: BR, 2016, p. 1-12.

Vargas, E. T. (2013). Geometria Dinâmica para estudo das relações métricas no triângulo retângulo. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis (SC), v. 08, Ed. Especial (dez.), p. 266-277

Vergnaud, G.; Moreira, M.A.; Grossi, E.P. (org). (2017). *O que é aprender?* O iceberg da conceitualização. Teoria dos campos conceituais. Porto Alegre: GEEMPA.

Vergnaud, G. (2018). Conceitualização e Simbolização. In: III Colóquio Internacional sobre a Teoria dos Campos Conceituais. *Anais* ... Brasília, DF: Universidade Católica de Brasília. pp. 1-139.

Recebido em: 02/02/2020
Aprovado em: 15/05/2020