Conclusiones

Como se observa, el enfoque frecuencial de la probabilidad le imprime un carácter de laboratorio al tratamiento de la probabilidad, y se constituye en un referente para dirimir las discusiones que alrededor de la creación de modelos en probabilidad muchas veces se dan. La realización de experimentos aleatorios en el salón de clases, además de considerar la equivalencia de experimentos aleatorios, permite confrontar las intuiciones erradas que las personas poseen respecto al comportamiento de las secuencias aleatorias y del significado de la probabilidad. Por su limitación en la formación de intuiciones, las experimentaciones en clase deben acompañarse de razonamientos relacionados que permitan la justificación de los resultados y la formación de buenas intuiciones probabilísticas. El enfoque frecuencial, cuando se aborda de acuerdo a la expresión (3) y que llamamos enfoque frecuencial restringido, permite resolver problemas de inferencia probabilística sin tener que realizar físicamente el experimento (Yáñez, 2003).

Referencias bibliográficas

FALK, R. (1979). *Revision of Probabilities and the Time Axis*. In: Proceedings of the third international conference for the psychology of mathematics education, 64-66, Warwick, England.

FISCHBEIN, E., (1982). *Intuitions and proof.* In: For the Learning of Mathematics, 3(2), 9-19.

KONOLD, C. (1991). *Understanding Students' Beliefs about Probability*. In: Von Glasersfeld (ed.). *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 139-156. Kluwer.

YÁÑEZ, G. (2003). *Estudios del efecto del enfoque frecuencial de la probabilidad implementado a través de la simulación computacional en la comprensión de los procesos aleatorios, la probabilidad y la probabilidad condicional.* Tesis Doctoral, CINVESTAV-IPN, México.

Extensiones del modelo de van Hiele fuera del ámbito de la geometría elemental

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA | ANDRÉS DE LA TORRE GÓMEZ

Entre los continuadores de Piaget se cuentan los esposos Pierre y Dina van Hiele, quienes introdujeron en Holanda, a partir de 1957, el modelo de los niveles de pensamiento con el propósito de desarrollar en los alumnos de la escuela elemental el *insigtht* en la geometría [14], [15]. El modelo despertó de inmediato el interés de los psicólogos en la Unión Soviética, hasta el punto que A. M. Pyshkalo, en 1963, lo tomó como base para su programa de enseñanza de la geometría. En los Estados Unidos, Izaak Wirszup introdujo formalmente las ideas de los van Hiele mediante la conferencia titulada *Some Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry,* ante el encuentro anual del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), de Atlantic City, realizado en 1974. Algunas publicaciones, como las de Hans Freudenthal [7], Alan Hoffer [9] y A. Coxford [2], ayudaron a despejar el camino.

Aunque los van Hiele recibieron una fuerte influencia de Piaget, se separaron de éste en puntos cruciales, como los siguientes:

i) La teoría psicológica de Piaget se refiere primordialmente al desarrollo del niño, más que al aprendizaje. En el modelo de van Hiele, en cambio, es esencial el asunto de cómo estimular a los niños para que asciendan de un nivel al siguiente. La teoría de las fases de aprendizaje de van Hiele responde a esta necesidad.

ii) Piaget no captó en toda su dimensión el papel que juega el lenguaje en el paso de un nivel a otro por parte del aprendiz. En el modelo de van Hiele, en cambio, el aprendiz desarrolla un lenguaje específico para cada nivel de pensamiento.

iii) Piaget no veía la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de van Hiele sólo se alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura.

Siguiendo a Hoffer [8], quien se inspira para ello en la interpretación de los niveles de pensamiento como categorías, se pueden identificar los objetos para cada uno de los niveles en la siguiente forma:

Nivel 0: Los objetos son los elementos básicos del estudio.

Nivel 1: Los objetos son propiedades que analizan los elementos básicos.

Nivel 2: Los objetos son enunciados que relacionan las propiedades.

Nivel 3: Los objetos son ordenaciones parciales (ó sucesiones) de los enunciados.

Nivel 4: Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales.

La aplicación del modelo a una materia particular necesita el establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados, que permitan la detección de los mismos a partir de la actividad de los aprendices. Para que puedan ser considerados dentro del modelo de van Hiele, los niveles diseñados deben ser jerárquicos, recursivos, secuenciales y formulados de manera tal que permitan detectar un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual; los test –de cualquier tipo– que se diseñen para la detección de los niveles, deben recoger la relación existente entre un nivel dado y el lenguaje empleado por los aprendices situados en ese nivel; el diseño de los test debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundir a éstos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Tomamos de Hoffer [8] su versión simplificada de los niveles de pensamiento, tal como fueron aplicados por van Hiele a la geometría:

> Nivel 0: Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global. Pueden aprender el empleo de cierto vocabulario para identificar algunas figuras (por ejemplo, las palabras "triángulo", "cuadrado", "cubo"). Pero no son capaces de identificar explícitamente las propiedades de las figuras.
>
> Nivel 1: Los alumnos analizan las propiedades de las figuras (por ejemplo, con enunciados como "los rectángulos tienen diagonales iguales", "un rombo tiene todos los lados iguales"). Pero no son capaces de interrelacionar explícitamente las figuras con sus propiedades.
>
> Nivel 2: Los alumnos relacionan las figuras con sus propiedades (por ejemplo, con enunciados como "todo cuadrado es un rectángulo"). Pero no son capaces de organizar los enunciados en forma secuencial, para justificar sus observaciones.
>
> Nivel 3: Los alumnos organizan sucesiones de enunciados que les permiten deducir un enunciado a partir de otro (por ejemplo, para mostrar que el postulado de las paralelas implica que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º). Pero no reconocen la necesidad del rigor y no alcanzan a comprender las relaciones entre varios sistemas deductivos.
>
> Nivel 4: Los alumnos analizan diversos sistemas deductivos con un grado de rigor comparable al exigido por D. Hilbert en sus tratamiento de la geometría. Los alumnos comprenden las propiedades de que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

Entre las primeras investigaciones acerca del modelo de van Hiele que escaparon al ámbito de la geometría se encuentra la tesis doctoral de Judy Land [11], la cual empleaba el modelo para describir procesos cognitivos que se daban en la mente de estudiantes universitarios del college americano, y se ocupaba de las funciones exponencial y logarítmica, en un contexto de manipulación algebraica. Planteaba con precisión sus objetivos: (i) Definir operacionalmente la conducta de los estudiantes en cada nivel usando el modelo de van Hiele. (ii) Determinar si las respuestas de los alumnos a una entrevista escrita pueden ser caracterizadas de acuerdo con los niveles de pensamiento. (iii) Formular descriptores de los niveles de pensamiento. (iv)Explorar el empleo de las fases de aprendizaje para facilitar el recorrido de los estudiantes desde un nivel dado al nivel inmediatamente superior.

Pueden señalarse dos defectos principales en el trabajo de Land: (i) se centró más en el estudio de habilidades y destrezas de tipo algebraico y manipulativo, que en el pensamiento y el razonamiento de los alumnos, y (ii) se apoyó en un número muy pequeño de entrevistas individuales. Sin embargo, dicha tesis abrió el camino para una serie de investigaciones orientadas a la extensión del modelo de van Hiele al ámbito del análisis matemático en la educación universitaria, llevadas a cabo en el departamento de matemática aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, España.

Los trabajos en dicha dirección se han mantenido en el contexto geométrico y visual en el que se desarrollaron las investigaciones iniciales de los van Hiele. En primer término, se estudió cómo razona el aprendiz con respecto al problema de la existencia de la recta tangente a una curva en un punto, tomando como nivel 0 las nociones intuitivas de punto, recta y curva. El instrumento de ataque fue la idea de zoom o escalamiento simultáneo en ambas variables, pues si una curva tiene tangente en un punto debe convertirse en una recta después de varios zooms. La investigación permitió caracterizar, mediante los descriptores de los niveles 1, 2 y 3, la aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local en su contexto de recta tangente [12].

En segundo término, se abordó el problema de la visualización de la noción de continuidad de una curva plana en un punto, tomando como instrumento de estudio el estiramiento horizontal, que consiste en escalar la abscisa, sin cambiar la ordenada, pues una curva es continua en un punto, según la definición de Cauchy, si aparece plana después de varios estiramientos. Se logró caracterizar, mediante los descriptores de los niveles 1, 2 y 3, la extensión del modelo de van Hiele al concepto de continuidad local, visualizado a través de la imagen de controlabilidad de errores [1].

En las investigaciones mencionadas sobre la tangente y la continuidad se empleó, de manera esencial, la técnica de la entrevista clínica, pues es la más adecuada para explorar los procesos de pensamiento que se dan en la mente del aprendiz: Ella permite analizar el lenguaje empleado por los alumnos, el cual es la base para comprender el proceso de construcción y descubrir los niveles de pensamiento relativos al concepto estudiado en la investigación. Tanto en el caso de la tangente como de la continuidad se diseñaron guiones modelo de entrevistas semiestructuradas, que no son cerradas sino que permiten la intervención del entrevistador a tenor de las respuestas del entrevistado. Las entrevistas individuales debían también convertirse en experiencias de aprendizaje para los adultos entrevistados, por lo cual se siguió en ellas el método socrático, tal como éste se expone en los *Diálogos* de Platón: el propósito que se persigue con la entrevista socrática es que el aprendiz reflexione no sólo acerca de las preguntas que se le formulan sino, también, acerca de sus propias respuestas y que llegue a hacer conciencia de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos. El entrevistador debe poner especial cuidado en el vocabulario empleado por el aprendiz, quien, a lo largo de la entrevista, va elaborando su propio lenguaje con precisión cada vez mayor. Como resultado de la entrevista, el aprendiz hace manifiesto su nivel de pensamiento con respecto al concepto estudiado.

Con una metodología similar a la de los trabajos arriba mencionados se abordaron posteriormente los siguientes temas de investigación: (i) el análisis de la noción de suma de una serie, visualizando los términos de ésta como segmentos de un zig-zag infinito y su suma como la longitud de dicho zig – zag [10]; (ii) la recta tangente entendida como la posición límite de un haz de secantes, que es la forma tradicional de enseñanza del concepto de tangente, y el estudio comparativo de esta metodología con la alternativa, vía zoom [6]; (iii) la convergencia de una sucesión numérica, en un contexto estrictamente visual que propicie la formación en el aprendiz de un concepto imagen adecuado, sin exigirle destrezas específicas de tipo operacional o de manipulación de símbolos lógicos [13]. También en estas investigaciones se empleó de manera intensa el asistente matemático en los instrumentos de estudio diseñados.

Sin embargo, el modelo de van Hiele postula exclusivamente la existencia de niveles de pensamiento y no tiene que supeditarse al apoyo visual en el ordenador. De la Torre llevó a cabo una investigación, en el marco de la teoría de los niveles de pensamiento de van Hiele, sobre el continuo como modelo matemático del espacio y del tiempo y sobre los obstáculos que debe enfrentar el aprendiz en la construcción de tal modelo, en un contexto de puro razonamiento que no contó con ningún apoyo visual en el ordenador [3], [4], [5].

El objeto de la investigación llevada a cabo por de la Torre en su tesis doctoral [3] fue validar una propuesta metodológica, alternativa a la tradicional, orientada a acercar a los estudiantes de primer año de universidad a la modelización matemática del espacio recorrido por un móvil y a la del tiempo empleado en el movimiento. En ambos casos, el modelo, es decir, la estructura teórica construida en el proceso, es el sistema de los números reales que se conoce como continuo aritmético, caracterizado en el análisis matemático como un campo ordenado completo arquimediano. Este es equivalente al continuo geométrico lineal, visualizado habitualmente como una recta indefinida.

Dicha modelización abrió paso a la solución de múltiples problemas físicos, relativos a los cuerpos materiales, como, por ejemplo, las cuerdas vibrantes y los sólidos rígidos, pero llevaba consigo un cúmulo de obstáculos. Zenón de Elea, en el siglo IV a.C., señaló con claridad las principales dificultades del modelo y las enunció bajo la forma de paradojas. La teoría de conjuntos, cuyo desarrollo se vio estimulado en el último tercio del siglo XIX por los aportes de George Cantor, constituye el marco en el cual se resuelven satisfactoriamente dichas paradojas.

El asunto central bajo estudio, por parte de la Torre, fue el razonamiento seguido por el aprendiz en la construcción del concepto de continuo como modelo matemático del espacio y del tiempo. Desde las primeras etapas de la investigación surgieron, con fuerza manifiesta, dos temas preponderantes: por un lado, el concepto cantoriano de equipotencia de agregados infinitos de puntos y, por otro, la explicación de las paradojas de Zenón –la de Aquiles y la tortuga y la de la flecha- a la luz del modelo.

El principal instrumento de la investigación fue la entrevista socrática, la cual fue dividida en dos fases bien diferenciadas: la primera, mediante un lenguaje estrictamente geométrico, permitió analizar la asimilación del concepto matemático de continuo por parte del aprendiz. En esta fase, el entrevistador conduce gradualmente al aprendiz hasta el momento en que éste mismo formula la definición cartesiana de equipotencia de dos figuras geométricas. Se completó el estudio clínico de casos individuales, llevado a cabo en la primera fase, con una prueba escrita que reprodujo el guión de la entrevista, sustituyendo las acciones socráticas de ésta por aportes de información y reflexión intercalados en el test.

La segunda fase de la entrevista se ocupó de los procesos de modelización involucrados, a saber, la del espacio y del tiempo como un continuo y la del fenómeno del movimiento como una función. En esta fase, el objetivo del entrevistador es el de encontrar, mediante un lenguaje más coloquial que geométrico, el camino seguido por el aprendiz en la formulación del modelo matemático y la explicación posterior que éste permite darles a los hechos del mundo físico.

En cada una de las investigaciones llevadas a cabo en la Universidad Politécnica de Valencia, que sirvieron de fundamento a seis tesis doctorales, se obtuvieron los descriptores para los niveles 1, 2 y 3, relativos al concepto específico en consideración. Se diseñaron, además, los modelos de guión para los entrevistas clínicas, semiestructuradas y socráticas por medio de los cuales se hallaron los descriptores de los niveles y se clasificó a los estudiantes en sus respectivos niveles. Se comprobó, en fin, mediante sendos cuestionarios escritos de respuesta múltiple, que se aplicaron sobre muestras amplias de estudiantes, que los niveles 1, 2 y 3 pueden ser efectivamente detectados en las muestras; el oportuno tratamiento estadístico permitió asignarle automáticamente a cada alumno su correspondiente nivel.

Referencias bibliográficas

[1] CAMPILLO H., P., PÉREZ CARRERAS, P., La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele, *Divulgaciones Matemáticas*, v 6, No 1, 1998, 69-8.

[2] COXFORD, A., Research directions in geometry, en: R. Lesh & D. Mizkiewcz (eds.), *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts*, Columbus, Ohio, ERIC/SMEAC, 1978.

[3] DE LA TORRE, Andrés, *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele,* Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.

[4] DE LA TORRE, Andrés, Una aplicación del modelo de van Hiele al concepto de continuo, *Matemáticas Enseñanza Universitaria,* v. VIII, No 1,2, 2000, pp. 115-139.

[5] DE LA TORRE, Andrés, *La modelización del espacio y del tiempo,* Editorial Universidad de Antioquia, Medellín, 2003.

[6] ESTEBAN, Pedro V., *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia , 2000.

[7] FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

[8] HOFFER, A., Van Hiele-based research, en: R.Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, 1973.

[9] HOFFER, A., *Geometry, A Model of the Universe*, Addison – Wesley, Menlo Park, 1979.

[10] JARAMILLO, Carlos M., *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia , 2000.

[11] LAND, J., *Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning of functions*, Tesis doctoral, University of Boston, 1991.

[12] LLORENS, J.L., PÉREZ CARRERAS, P., An Extension of van Hiele´s Model to the Study of Local Approximattion, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 28, No 5, 1997, 713-726.

[13] NAVARRO, María, *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia , 2002.

[14] VAN HIELE, P., Levels of Thinking, How to Meet Them, How to Auoid Them, *Seattle NCTM Meeting*, 1980.

[15] VAN HIELE, P., *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, Orlando, Florida, 1986.