ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p144-170

Limites de funções reais de uma variável em livros didáticos: organizações matemática e didática

Limits of real functions of one variable in textbooks: mathematical and didactic organizations

Límites de las funciones reales de una variable en los libros de texto: organizaciones matemáticas y didácticas

Leonardo Augusto de Lemos Batista[1]
Universidade Federal de Pernambuco
Mestrando em Educação em Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0002-7365-5759
Edelweis Jose Tavares Barbosa[2]
Universidade Federal de Pernambuco
Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática
https://orcid.org/0000-0001-6032-9367

Resumo

Esta pesquisa analisou como autores de livros didáticos de Cálculo propõem situações visando a transformação de um estado de não-saber para um estado de saber no que se refere ao objeto matemático limites de funções reais. Neste sentido, a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard, a norteia teoricamente. Aqui, este referencial e a metodologia utilizada serão discutidos. O trabalho analisa e compara duas obras adotadas por grandes universidades brasileiras (40 anos distantes no tempo). Os resultados mostram que as organizações matemáticas diferem quanto à representatividade dos subtipos de tarefas exploradas e variedade das técnicas elaboradas. As praxeologias didáticas são semelhantes. As razões de ser são as mesmas, estudam-se limites para explicar e justificar todo o Cálculo.

Palavras-chave: Livros didáticos de cálculo; Limites de funções reais de uma variável; Teoria antropológica do didático.

[1] leoaugusto31@gmail.com
[2] edelweisb@yahoo.com.br

Abstract

This research analyzed how authors of Calculus textbooks propose situations aiming at the transformation of a state of not-knowing to a state of knowing regarding the mathematical object limits of real functions. In this sense, the Anthropological Theory of Didactics, proposed by Yves Chevallard, guides it theoretically. Here, this framework and the methodology used will be discussed. The work analyzes and compares two works (40 years apart) adopted by major Brazilian universities. The results show that the mathematical organizations differ in terms of the representativeness of the subtypes of tasks explored and the variety of techniques developed. Didactic praxeologies are similar. The reasons for being are the same, limits to explain and justify the whole calculation are studied.

Keywords: Calculus textbooks, Limits of real functions of one variable, Anthropological theory of the didactics.

Resumen

Esta investigación analizó cómo los autores de los libros de texto de Cálculo proponen situaciones que apuntan a la transformación de un estado de desconocimiento a un estado de conocimiento respecto a los límites del objeto matemático de funciones reales. En este sentido, la Teoría Antropológica de lo Didáctico, propuesta por Yves Chevallard, la orienta teóricamente. Aquí, se discutirá este marco y la metodología utilizada. El trabajo analiza y compara dos trabajos (con una diferencia de 40) adoptados por las principales universidades brasileñas. Los resultados muestran que las organizaciones matemáticas difieren en términos de la representatividad de los subtipos de tareas exploradas y la variedad de técnicas desarrolladas. Las praxeologías didácticas son similares. Las razones de ser son las mismas, se estudian límites para explicar y justificar todo el cálculo.

Palabras clave: Libros de texto de cálculo; Límites de las funciones reales de una variable; Teoría antropológica de lo didáctico.

Limites de Funções Reais de uma Variável em Livros Didáticos: Organizações Matemática e Didáticas

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é também chamado de “a matemática do movimento e da variação”, constituindo algumas das mais tradicionais disciplinas do ensino superior, e tendo preservado até os dias de hoje bastante da sua estrutura original (Souza, 2001).

Segundo Taveira Neto (2016), o Cálculo possui aplicações nos mais diversos campos do saber humano e constitui uma ferramenta matemática completa e dinâmica. Dessa forma, pode-se compreender a inevitável necessidade do estudo do CDI em vários cursos de graduação, indo desde Administração até Matemática, passando por Engenharia de Produção, Engenharia Civil, Física, Química, entre outros.

O primeiro curso de Cálculo com o qual um aluno se depara após ingressar no ensino universitário, normalmente é composto pelo estudo de conjuntos numéricos, intervalos, álgebra básica, funções elementares, limites, derivadas e integrais (atendo-se ao caso de funções reais de uma variável).

Contudo, segundo Rafael (2017), as aulas de Cálculo Diferencial e Integral costumam gerar nos alunos inquietações, expectativas pessimistas e angustiantes, e até mesmo o repúdio à disciplina. Tal autora afirma que por causa dos elevados índices de reprovação e abandono, o Cálculo, juntamente com os seus conteúdos e métodos, tem sido objeto de muitas pesquisas acadêmicas. Para ilustrar tal afirmação, Rafael (2017) traz o exemplo do *Calculus Reform* (movimento iniciado na década de 1980 nos Estados Unidos da América, que visa enfrentar as dificuldades concernentes ao ensino e aprendizagem do CDI).

Rafael (2017) também afirma que esse problema pode ter várias origens, tais como: a baixa qualidade oferecida no ensino básico, as deficiências relacionadas à formação docente, a escolha equivocada de métodos de ensino, a falta da relação conteúdo-aplicação, os problemas relativos aos livros didáticos elaborados, entre outras.

Segundo Stewart (2013), o Cálculo é uma matemática que se diferencia de várias formas da matemática elementar. Tal autor afirma que esse ramo do conhecimento matemático é menos estático e mais dinâmico, pois trata de variação e de movimento, principalmente quando discute acerca de quantidades que tendem a outras quantidades. Stewart (2013) diz que é útil iniciar o estudo do CDI através de uma visão global acerca dele, destacando (também) como o conceito de limite aparece naturalmente ao se tentar solucionar os problemas que se apresentam.

Stewart (2013) afirma (ainda) que a concepção de limite é a base dos vários ramos do Cálculo Diferencial e Integral. Para esse autor, a importância do conceito de limite é tal, que (para ele), deve-se sempre iniciar o estudo do CDI examinando cuidadosamente os limites e as suas propriedades.

Para Santos (2013), a Teoria Antropológica do Didático é munida dos instrumentos suficientes para estudar o conteúdo limites de funções de uma variável real como sendo um objeto matemático em si; sendo tal estudo efetuado a partir da identificação e caracterização das praxeologias matemáticas e didáticas que se constituem em torno dos problemas relacionados à determinação de tais limites.

Portanto, definiu-se que a investigação que foi realizada, consiste em uma pesquisa qualitativa de cunho documental, que teve por objetivo analisar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* no que se refere ao estudo do objeto matemático limites de funções reais de uma variável sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.

Sendo assim, este artigo se apresenta em duas secções. A primeira secção discute a fundamentação teórica, o modelo de referência, a seleção e a caracterização das obras analisadas. A segunda discute os principais resultados e algumas considerações.

A Importância dos Livros Didáticos em Sala de Aula

Segundo Barbosa e Lins (2011), os livros didáticos possuem um papel de muita relevância no sistema escolar, o que os torna motivo de inúmeras pesquisas acadêmicas, como é o caso deste estudo aqui apresentado.

Segundo Chevallard (1991), em sala de aula, é o docente que serve de mediador para possibilitar que o aluno faça a construção do seu conhecimento matemático; no entanto, para que haja tal mediação, o professor baseia sua prática diária no *texto do saber*, ou seja, o docente fundamenta parte do seu fazer pedagógico nas informações existentes nos livros didáticos, o que corrobora com a abordagem escolhida nesta pesquisa acerca de livros de Cálculo.

Um livro didático não é algo construído no *vazio*, pois se trata de uma elaboração que carrega as concepções adotadas pelo autor (no espaço e no tempo) em relação aos saberes ali existentes (Barbosa, 2017). Pode-se afirmar então, que autores distintos geram livros didáticos diferentes, o que levou esta pesquisa a investigar quais as estratégias e abordagens adotadas por dois diferentes autores de livros de CDI.

Chevallard (1999) afirma que a formação dos saberes/conhecimentos, assim como as organizações praxeológicas, desgastam-se, e que durante tal processo de desgaste, os elementos que as constituem podem perder seus créditos. Sendo assim, em uma determinada instituição, podem desaparecer praxeologias ou aparecer novas praxeologias, que serão produzidas e reproduzidas (caso passem a existir), o que conduziu este estudo a analisar as diferentes formatações pedagógicas utilizadas por dois autores distintos de livros didáticos de Cálculo (40 anos distantes no tempo).

Resumindo-se o que foi exposto nos parágrafos acima, decidiu-se que a estratégia mais adequada para o desenvolvimento desta pesquisa seria através da análise de duas coleções de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral (sendo uma coleção do ano 1977 e a outra de

2017), dada a fundamental importância que o livro didático possui na transposição didática em salas de aula reais.

Algumas Pesquisas que Serviram de Base para este Estudo

Das pesquisas que foram estudadas na revisão de literatura, observa-se que Santos (2013) analisou o objeto matemático limites de funções reais de uma variável no contexto da sala de aula, levando em consideração o professor, o aluno, o livro didático e a linguagem. Quanto ao que se concebe acerca de limites, a autora identificou e caracterizou várias organizações matemáticas adotadas em livros didáticos de Cálculo. Rafael (2017), por sua vez, estudou as intervenções metodológicas efetuadas por universidades públicas e privadas para reduzir os índices de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. Os levantamentos realizados por essa autora expuseram números preocupantes, que apontam para a necessidade de pesquisas na área. Barbosa (2017), por sua vez, analisou as relações de conformidade entre o professor, o livro didático e os documentos oficiais acerca da resolução de equações do primeiro grau, baseando-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD), a partir das organizações matemáticas e didáticas.

Araújo (2009) caracterizou e comparou as transposições didáticas realizadas no Brasil e na França acerca do ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, realizando a construção de um modelo de referência que foi utilizado na pesquisa, tomando como aporte teórico a TAD. Barbosa (2011) realizou uma pesquisa baseada na Teoria Antropológica do Didático que buscou investigar as mudanças ocorridas nas organizações matemáticas e didáticas pontuais constituídas em torno dos subtipos de tarefas relacionadas à resolução de equações do 1º grau em livros didáticos ao longo do tempo. Enfim, percebe-se que as exposições das pesquisas acima, e que foram tomadas como aporte teórico para este estudo, legitimam e justificam as análises e discussões dos resultados deste trabalho investigativo, em especial: as organizações matemáticas acerca de limites de funções (retiradas de Santos

(2013)); a necessidade da realização de estudos que venham lançar um pouco de luz sobre os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do Cálculo, mais particularmente do assunto limites (retirada de Rafael (2017)); o referencial teórico da TAD (retirado de Barbosa (2017)); os métodos para construção de um modelo de referência para análise de praxeologias matemáticas (retirados de Araújo (2009)); e as formas, baseadas na Teoria Antropológica do Didático, para realizar análises de livros didáticos (retiradas de Barbosa (2011)).

Dessa maneira, foram selecionadas duas obras aprovadas e adotadas por universidades brasileiras renomadas (40 anos distantes no tempo), a saber: O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017). Obras, essas, que foram submetidas à análise.

As leituras e estudos efetuados na revisão de literatura conduziram aos seguintes questionamentos: *Como vivia e como vive o objeto matemático limites de funções de uma variável nos livros didáticos selecionados? Quais eram e quais são (e como se caracterizam) as organizações matemáticas e didáticas relativas aos limites que aparecem nas obras escolhidas? Qual era e qual é a razão de ser do conteúdo limites de funções nos referidos livros texto?*

A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Segundo Barbosa (2017), a TAD foi desenvolvida por Yves Chevallard como sendo uma ampliação natural da sua própria explicação acerca da transposição didática. Nessa teoria, os objetos matemáticos não são existentes em si mesmos, mas são elementos que emergem de sistemas de práticas adotadas em instituições.

Chevallard (1999) elaborou uma teoria que estuda o homem diante do saber matemático, colocando a atividade e o estudo da matemática dentro do conjunto das ações humanas desenvolvidas em instituições; portanto, fica dada uma razão contumaz para a ocorrência do termo *antropológica* no título da TAD.

São considerados conceitos primitivos nessa abordagem teórica, as seguintes concepções: *instituição* (I) – é um dispositivo social total que impõe aos seus *sujeitos* (*indivíduos* e *pessoas*) maneiras próprias de fazer e de pensar, podendo ser ainda uma realidade constituída, tal como: família, escola, sala de aula, tempo de vida, etc.; e *pessoa* (X) – é o indivíduo que desde a mais tenra idade é submetido às ações institucionais que o tornam em uma pessoa (através das relações estabelecidas).

Pessoa (mais tecnicamente falando) pode ser algo entendido como o par formado por um indivíduo X e pelas suas relações pessoais com os objetos O, designada por $R(X,O)$ (Barbosa, 2017).

Objeto (O) – é qualquer entidade (material ou imaterial) que é reconhecida por uma ou mais pessoas.

Para Chevallard (1999), tudo é objeto, incluindo as pessoas.

São noções fundamentais na TAD, as seguintes relações: *relação institucional* $RI(O)$ – sendo o tipo de relação estabelecida entre uma instituição e um objeto considerado; e *relação pessoal* $R(X,O)$ – como sendo o tipo de relação definida entre uma pessoa e um objeto considerado.

O saber científico passa por transformações realizadas pela *noosfera* (instituição invisível formada por especialistas, professores, técnicos, etc., que estão ligados a órgãos oficiais, escolas, universidades, etc., e que tem por objetivo efetuar uma *vigilância epistemológica* sobre as transposições dos saberes), passando de *saber* para *saber ensinado*, o qual é veiculado na sala de aula. Dessa maneira, os livros didáticos são instrumentos que norteiam a elaboração do saber ensinado.

Na TAD, entende-se que um objeto do saber O deve ser reconhecido por ao menos uma instituição I. Dessa maneira, O pode ficar estabelecido em mais de uma instituição; contudo, para *viver* em I, O é submetido a certas condições (o que implica em transformação para conformidade). O processo de transposição também possibilita que um determinado objeto do saber possa passar de uma instituição para outra.

Nessa abordagem teórica, o conhecimento é caracterizado através da noção de relação. Um objeto é considerado existente, se existir uma relação com ele, ou seja, se uma pessoa ou uma instituição o reconhece como tal. São as práticas efetuadas com o objeto que definem a relação institucional $RI(O)$.

Quando uma pessoa X entra em uma instituição de aprendizagem I, na qual existe um objeto do saber O, então, estabelece-se ou modifica-se $R(X, O)$, em conformidade com as práticas usuais da instituição considerada em relação aquele objeto, ou seja, com $RI(O)$. Assim sendo, aprender na TAD é um ato entendido através das modificações que ocorrem em $R(X, O)$ mediante $RI(O)$; então, pode-se afirmar que a aprendizagem de uma pessoa está ligada à compreensão das aprendizagens institucionais, segundo a Teoria Antropológica do Didático.

Chevallard (1998) afirma que a TAD foi desenvolvida, *a priori*, como sendo uma teoria que tem por objetivo conter e gerenciar a difusão dos saberes, principalmente em relação ao conhecimento matemático.

Para a teoria aqui apresentada, os saberes da matemática são produto da ação humana institucional, e por esse motivo, a TAD possui um instrumental metodológico próprio que permite descrever e investigar os fatores relacionados às práticas institucionais.

Organizações Praxeológicas

Na Teoria Antropológica do Didático (TAD), *organização praxeológica* ou *praxeologia* pode ser compreendida como sendo a realização de determinado subtipo de tarefa t (expressa por um verbo e pertencente a um conjunto de tarefas de tipo semelhante) através de uma técnica τ. A relação tarefa-técnica $[t - \tau]$ estabelece um saber-fazer próprio para a tarefa considerada, sendo por sua vez, explicada e justificada através de uma tecnologia θ que é baseada em uma teoria Θ, e que constitui o bloco tecnológico-teórico $[\theta - \Theta]$. Segundo

Chevallard (1998), a TAD postula que as ações humanas, em especial as atividades matemáticas, colocam em execução uma organização praxeológica ou praxeologia que pode ser representada por $[t, \tau, \theta, \Theta]$.

Nessa abordagem teórica, o bloco $[t, \tau]$ é ligado à prática, sendo compreendido como um saber-fazer; enquanto o bloco $[\theta, \Theta]$ está ligado à razão, podendo ser entendido como o saber.

Para Chevallard (1998), a existência de uma tarefa t tem por condição mínima, a ocorrência de pelo menos uma técnica de estudo τ para a mesma e de uma tecnologia justificativa θ relativa à τ, mesmo que não seja explicitada uma teoria Θ que a explique e justifique no contexto analisado.

As *tarefas* (t), na abordagem teórica aqui apresentada, são objetos bem definidos. Verbos de ação identificam as tarefas, contudo, o verbo sozinho exprime apenas um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar, entre outros. Entretanto, quando se diz, resolva uma equação fracionária ou decomponha uma fração racional em elementos mais simples, passa-se a caracterizar um tipo de tarefa (Silva, 2005 citado por Almouloud, 2007).

Técnica (τ) é uma maneira de realizar certa tarefa $t \in \tau$. Uma praxeologia relacionada a uma tarefa t exige, *a priori*, uma técnica τ relacionada à t. Todavia, segundo a TAD, pode acontecer de uma técnica τ não ser suficiente para dar conta de todos os subtipos de tarefas $t \in \tau$; isso ocorre quando τ funcionar para uma parte $p(\tau)$ das tarefas t, mas não funcionar para as demais $t/p(\tau)$. Sendo assim, pode-se perceber que em uma organização praxeológica pode existir uma ou mais técnicas superiores às demais.

Tecnologia (θ) pode ser entendida como sendo o discurso racional acerca de uma técnica τ. Desse modo, o objetivo inicial de uma tecnologia θ é explicar e justificar a técnica τ relacionada a uma tarefa t; em outras palavras, a tecnologia é o que garante que a técnica realize bem o seu papel em relação a uma certa tarefa. Outro propósito relacionado a uma tecnologia

θ pode ser compreendido através da intenção de explicar, de tornar inteligível e de esclarecer determinada técnica τ, podendo ainda θ servir de base para a produção de técnicas renovadas ou mesmo de novas técnicas.

Uma *teoria* (Θ) tem como propósito justificar e esclarecer uma tecnologia θ, buscando tornar inteligível o discurso tecnológico. Portanto, a teoria é caracterizada por um nível mais avançado de justificação-explicação-produção. Chevallard (1998) destaca que geralmente, a justificação e o esclarecimento oferecidos por uma teoria Θ, apresentam-se obscurecidos pela maneira abstrata como os enunciados são colocados repetidamente.

Na TAD, as organizações praxeológicas se dividem em quatro categorias, a saber: *praxeologia pontual* $[t,\tau,\theta,\Theta]$, *praxeologia local* $[t_i,\tau_i,\theta,\Theta]$, *praxeologia regional* $[t_{ij},\tau_{ij},\theta_j,\Theta]$ e *praxeologia global* $[t_{ijk},\tau_{ijk},\theta_{jk},\Theta_k]$.

A mudança de uma praxeologia pontual $[t,\tau,\theta,\Theta]$ para uma local $[t_i,\tau_i,\theta,\Theta]$ põe em evidência a tecnologia θ; e da mesma forma, a mudança de uma praxeologia local para uma regional $[t_{ij},\tau_{ij},\theta_j,\Theta]$ coloca em primeiro plano a teoria Θ.

As praxeologias relativas aos saberes matemáticos são de dois tipos, a saber: *matemáticas* e *didáticas*. As Organizações Matemáticas (OM) ou *praxeologias matemáticas* são relativas à realidade matemática que se pode desenvolver em sala de aula; já as Organizações Didáticas (OD) ou *praxeologias didáticas* fazem menção à forma de como se efetua tal desenvolvimento (Chevallard, 1999 citado por Almouloud, 2007); desse modo, surge uma relação que se estabelece entre as OM e as OD, que é chamada por Chevallard (2001) de *fenômeno de codeterminação*.

Uma praxeologia matemática é constituída no contexto das noções e dos conceitos relativos ao próprio corpo do saber matemático.

Segundo Chevallard (1998), a atividade inicial de um pesquisador ou professor é delimitar e caracterizar as organizações matemáticas a serem estudadas, e tal trabalho introdutório é realizado se baseando em livros didáticos, programas oficiais e demais documentos. A abordagem da Teoria Antropológica do Didático (TAD) possibilita a definição e a análise acurada dos conteúdos matemáticos, identificando as tarefas e analisando o nível de construção relativo aos demais elementos praxeológicos, ou seja, as técnicas, as tecnologias e as teorias.

Qualquer que seja o caminho considerado para a trajetória dos trabalhos de estudo de uma certa organização matemática, alguns elementos situacionais sempre aparecem, mesmo que estes se apresentem em formatos diversificados. Esses elementos situacionais são conhecidos na TAD como *momentos de estudo* ou *momentos didáticos*; e não importa o caminho escolhido, inevitavelmente, os trabalhos sempre são levados a um momento de institucionalização, ou a um momento de avaliação etc.

O *primeiro momento* é o do contato inicial com a organização matemática que está sendo colocada em destaque no cenário didático. Tal encontro inicial (ou mesmo reencontro) pode se realizar de formas variadas; e uma dessas maneiras é a partir de ao menos um subtipo de tarefa t, que faça parte da estrutura da OM posta em questão.

O *segundo momento* é o do trabalho de exploração do subtipo de tarefa t e da elaboração de uma técnica τ relacionada às tarefas consideradas.

O *terceiro momento* é o do estabelecimento do contexto tecnológico-teórico $[\theta - \Theta]$ que é relativo à técnica τ. Deve-se entender que tal momento não é isolado dos dois anteriores, pois, quando uma certa técnica τ é escolhida e elaborada, a explicação e a justificação de τ é constituída através do bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$.

O *quarto momento* é o do trabalho da técnica τ, que tem como objetivo aperfeiçoá-la, agregando mais confiabilidade à mesma; e isto demanda o aprimoramento da tecnologia θ associada, o que objetiva desenvolver o domínio sobre τ.

O *quinto momento* é o da *institucionalização* (ou da fixação), momento em que se explicita a realidade da OM constituída, definindo as partes que continuarão após o processo de estudo e as partes que serão deixadas de lado.

O *sexto momento* é o de *avaliação* das relações pessoais $R(X,O)$ e das relações institucionais $RI(O)$ tomando como enfoque o objeto de estudo matemático O.

O momento de avaliação na TAD constitui uma etapa de bastante importância, pois normalmente, é o momento em que o professor assume como sendo objeto de estudo as soluções elaboradas pelos seus alunos.

Na construção das soluções, o aluno observa determinadas formas de fazer (na sala de aula ou no livro), para então, desenvolver seu modo pessoal do saber-fazer.

Analisando as Coleções de Livros Didáticos

A metodologia adotada para a caracterização, análise e comparação das organizações matemáticas e didáticas existentes acerca do ensino de limites de funções em dois livros didáticos aprovados e adotados por universidades brasileiras renomadas, constituiu-se em duas etapas de trabalho. A primeira foi a construção de um modelo de referência acerca das praxeologias matemáticas pontuais constituídas em torno da determinação de limites de funções, ao menos em termos de subtipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, a partir de estudos teóricos e didáticos. A segunda etapa foi realizada através da caracterização das obras analisadas, do motivo das escolhas, da descrição das estruturas e das formas de organização dos conteúdos.

Modelo de Referência

Na proposta formulada dentro da pesquisa, delineou-se os subtipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, através da investigação inicial do objeto matemático limites de funções no livro didático *Cálculo* de Stewart (2013), partindo-se das praxeologias matemáticas anteriormente identificadas por Santos (2013), e com o apoio de outras publicações acadêmicas, de vários livros didáticos de Cálculo e de Análise que gozam de grande prestígio nos círculos matemáticos brasileiros, e de documentos oficiais de universidades. No total, foram consultados 4 trabalhos publicados, 14 livros de Cálculo e de Análise, e 10 ementas de cursos de graduação de universidades brasileiras de destaque.

No que se refere à determinação de limites de funções reais de uma variável, foram identificados e caracterizados os seguintes subtipos de tarefas a seguir: (t_1) estimar numericamente (se possível) o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo $f(x)$ uma função real qualquer; (t_2) encontrar (se possível) o limite de uma função real $f(x)$ através do estudo do comportamento gráfico da mesma; (t_3) determinar (se possível) os limites laterais de uma função real $f(x)$ qualquer, através da investigação intuitiva da expressão matemática da mesma; (t_4) calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo $f(x)$ uma função real cujo cálculo do valor numérico para $x = a$ não apresenta indeterminações nem impossibilidades; (t_5) calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo $f(x)$ uma função real cujo cálculo do valor numérico para $x = a$ apresenta indeterminações; (t_6) determinar (se possível) limites que envolvam o infinito.

Para realizar tais subtipos de tarefas foram identificadas e categorizadas as seguintes técnicas: *calcular valores numéricos* (τ_{CVN}) – esta técnica consiste em calcular alguns valores numéricos para a função $f(x)$ nas proximidades do ponto de tendência do limite considerado (através de valores inferiores e/ou superiores a $x = a$), desse modo, a partir das tendências numéricas observadas nos resultados, pode-se estimar (muitas vezes) o valor para o qual o limite está tendendo; *analisar o comportamento gráfico* (τ_{ACG}) – a técnica aqui apresentada, consiste em observar o comportamento do gráfico da função $f(x)$ nas proximidades do ponto de tendência do limite considerado (pelo lado esquerdo e/ou pelo lado direito de $x = a$), então, a partir das tendências observadas no gráfico, pode-se encontrar (muitas vezes) o valor para o qual o limite está tendendo; *analisar intuitivamente o comportamento* (τ_{AIC}) – esta técnica consiste em conjecturar (rigorosamente) padrões ou valores para o limite de $f(x)$ a partir da observação das expressões matemáticas envolvidas na composição da mesma; *determinar o valor numérico* (τ_{DVN}) – esta técnica consiste em substituir o x da função $f(x)$ pelo valor de a de $\lim_{x \to a} f(x)$, efetuando-se os cálculos normalmente; τ_{ACG_DVN} – *analisar o comportamento gráfico/determinar o valor numérico*; $\tau_{FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$ – *fatorar as expressões algébricas/eliminar as indeterminações existentes/determinar o valor numérico*; $\tau_{MEC\_DRE\_EIE\_}\tau_{DVN}$ – *multiplicar por expressões conjugadas/desenvolver e/ou reduzir as expressões/eliminar as indeterminações existentes/determinar o valor numérico*; $\tau_{DRE\_FEA\_EIE\_}\tau_{DVN}$ – *desenvolver e/ou reduzir as expressões/fatorar as expressões algébricas/eliminar as indeterminações existentes/determinar o valor numérico*; $\tau_{FTV\_}\tau_{AIC}$ – *fazer a troca de variáveis/analisar intuitivamente o comportamento*; $\tau_{MEC\_DRE\_}\tau_{AIC}$ – *multiplicar por expressões conjugadas/desenvolver e/ou reduzir as expressões/analisar intuitivamente o comportamento*; $\tau_{FEA\_}\tau_{AIC}$ – *fatorar as expressões algébricas/analisar intuitivamente o comportamento*; $\tau_{DND\_}\tau_{AIC}$ – *dividir o numerador e o denominador/analisar intuitivamente o comportamento*. Enfim, dependendo das configurações matemáticas que se apresentem nos exercícios propostos acerca de limites, pode-se lançar mão sobre uma ou mais de tais técnicas, dando-se origem às técnicas mistas.

Para explicar e justificar as técnicas elencadas acima, foram identificadas e caracterizadas as seguintes tecnologias: *ideia intuitiva de limite* (θ_{IIL}) de função de uma variável real; *ideia gráfica intuitiva* (θ_{IGI}) de limite de uma função; *ideia intuitiva (de limites) infinitos* (θ_{III}) e no infinito (positivo e negativo); *propriedades operatórias dos limites* (θ_{POL}) – considerando as funções reais $f(x)$ e $g(x)$, tais que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, valem as propriedades seguintes (PL1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$, (PL2) $\lim_{x \to x_0} k\,.\,f(x) = k\,.\,L_1$ $(k \in \mathbb{R})$, (PL3) $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$, (PL4) $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x).\,g(x) = L_1\,.\,L_2$, (PL5)

$\lim_{x\longrightarrow x_0}[f(x)]^n = L^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$, (PL6) $\lim_{x\rightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}\ (se\ L_2 \neq 0)$, e (PL7) $\lim_{x\rightarrow a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, se\ n \in \mathbb{N}^*\ e\ L \geq 0\ ou\ se\ n$ é $ímpar\ e\ L \leq 0$ (Antar Neto et al., 2010); *propriedade da substituição direta* (θ_{PSD}) – se $f(x)$ for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio da função $f(x)$, então $\lim_{x\rightarrow a} f(x) = f(a)$ (Stewart, 2013); *teorema da troca para limites* (θ_{TTL}) de funções: considere $V^*(x_0, \delta)$ como sendo uma vizinhança reduzida de x_0, admitindo que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções, tais que, todo $x \in V^*(x_0, \delta)$, se tenha $f(x) = g(x)$, sendo assim, se $\lim_{x\rightarrow x_0} g(x) = L$, então também, $\lim_{x\rightarrow x_0} f(x) = L$. (Antar Neto et al., 2010); *propriedades das funções contínuas* (θ_{PFC}) em relação ao cálculo de limites – (P1) se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas no ponto a, então, são contínuas em a as funções $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x).g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ para $g(a) \neq 0$; (P2) se $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ e $g(x)$ é contínua no ponto $f(a)$, então a composta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ é contínua no ponto $x = a$; e (P3) em funções contínuas, os símbolos que indicam a função e o limite podem ser permutados (Bianchini & Paccola, 1997).

Para explicar e justificar as tecnologias acima, foram identificadas e caracterizadas as seguintes teorias: *definição formal de limite* (Θ_{DFL}) – seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto contendo a (exceto possivelmente no próprio a) e seja L um número real, a afirmação $\lim_{x\rightarrow a} f(x) = L$ significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Swokowski, 1983); *definição grosso modo* (Θ_{DGM}) de limite de função de uma variável real – significa que os valores de $f(x)$ tendem a L, quando x tende a a, em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas com $x \neq a$ (Stewart, 2013); *definições de limites infinitos* (Θ_{DLI}) e no infinito (positivo e negativo) – (D1) seja I um intervalo real aberto que contém o número a, considerando (ainda) $f(x)$ uma função definida em $I-\{a\}$, diz-se que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, se, para qualquer número real $M>0$, existir $\delta>0$, tal que, se $0<|x-a|<\delta$, então $f(x)>M$, ou seja, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, (D2) seja I um intervalo aberto que contém a, considerando (ainda) $f(x)$ uma função definida em $I-\{a\}$, diz-se que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ decresce ilimitadamente, se, para qualquer número real $M<0$, existir $\delta>0$, tal que, se $0<|x-a|<\delta$, então $f(x)<M$, ou seja, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, (D3) seja $f(x)$ uma função real definida em um intervalo aberto $]a,+\infty[$, diz-se que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L, se, para qualquer número $\varepsilon>0$, existir $N>0$, tal que, se $x<N$, então $|f(x)-L|<\varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, e (D4) seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto $]-\infty,a[$, diz-se que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ aproxima-se de L, se, para qualquer número $\varepsilon>0$, existir $N<0$, tal que, se $x<N$, então $|f(x)-L|<\varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ (Iezzi et al., 2002); *definições sobre funções contínuas* (Θ_{DFC}) – seja $f(x)$ uma função definida num intervalo real aberto I e a um elemento de I, diz-se que $f(x)$ é contínua em a, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (Iezzi et al., 2002).

Com o objetivo de estudar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* em relação ao objeto matemático limites de funções reais de uma variável, escolheu-se duas obras aprovadas e indicadas por prestigiadas universidades brasileiras, a saber: O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017), para serem submetidas à análise, que teve como ponto de partida o modelo de referência apresentado acima.

Principais Resultados

Aqui são analisados os principais resultados do estudo acerca das organizações matemáticas e didáticas identificadas nas obras *O Cálculo com Geometria Analítica* de

Leithold (1977) e *Cálculo* de Stewart (2017), especificamente acerca dos capítulos que tratam de limites de funções reais de uma variável. Desse modo, foram utilizadas as categorias do modelo de referência apresentado acima (relativas à determinação de tais limites), em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias (Tabela 1). Ressalta-se que as teorias anteriormente elencadas não foram claramente identificadas nos momentos nos quais as praxeologias são transpostas pelos autores através dos exemplos resolvidos e comentados.

Tabela 1.

Comparativo entre os dois livros analisados (Batista, 2019, p. 148)

SUBTIPOS DE TAREFAS	**LIVRO DE LEITHOLD (1977)**		**LIVRO DE STEWART (2017)**	
	TÉCNICA	**TECNOLOGIA**	**TÉCNICA**	**TECNOLOGIA**
t_1	-	-	τ_{CVN}	θ_{IIL}
t_2	τ_{ACG}	θ_{IGI}	τ_{ACG}	θ_{IGI}
			τ_{ACG_DVN}	θ_{IGI_POL}
t_3	τ_{AIC}	θ_{III}	τ_{AIC}	θ_{III}
t_4	τ_{DVN}	θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}	τ_{DVN}	θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}
t_5	$\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	θ_{TTL}; θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}	$\tau_{FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	θ_{TTL}; θ_{POL_PSD}; θ_{PFC}
			$\tau_{MEC\_DRE\_EIE}\_\tau_{DVN}$	
			$\tau_{DRE\_FEA\_EIE}\_\tau_{DVN}$	
			τ_{AIC}	
			$\tau_{FTV}\_\tau_{AIC}$	

A coleção *O Cálculo com Geometria Analítica* em relação à transposição das organizações matemáticas pontuais em torno dos subtipos de tarefas referentes à determinação de limites de funções ocorreu em três momentos.

Primeiro momento: Introdução de uma situação para elaborar e sistematizar uma técnica (com a devida explicação do procedimento desenvolvido) que possa estudar um dado limite (subtipo de tarefa). É ainda nesse primeiro momento que são enunciadas as propriedades e afirmações que compõem os elementos que explicam e justificam a técnica elaborada (Figura 1).

Figura 1.

Extrato com o modelo de cálculo de limites (Leithold, 1977, p.71)

EXEMPLO 1: Encontre $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$ e, conforme o caso, indique os teoremas de limite que estão sendo usados.	*SOLUÇÃO*: $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5) = \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7x - \lim_{x \to 3} 5$ (T.L.5) $= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 7 \cdot \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5$ (T.L.6) $= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5$ (L.T.3 e L.T.2) $= 9 + 21 - 5$ $= 25$

Segundo momento: É o momento destinado à *avaliação* dos elementos técnico-tecnológicos que surgem na situação proposta. Tal momento ocorre em comentários, logo após cada exercício resolvido (aparecendo apenas em alguns casos dentre os identificados). Portanto, no referido momento, o aluno é conduzido à validação e reflexão acerca das respostas construídas e apresentadas pelo autor (Figura 2).

Figura 2.

Reflexões sobre o cálculo de limites (Leithold, 1977, p. 71)

É importante, neste ponto, percebermos que o limite no Exemplo 1 foi calculado através da aplicação direta dos teoremas sobre limites. Para a função f definida por $f(x) = x^2 + 7x - 5$, vemos que $f(3) = 3^2 + 7 \cdot 3 - 5 = 25$ é o mesmo que $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$. Não é sempre verdadeiro termos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (veja o Exemplo 4). No Exemplo 1, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, pois a função f é contínua em $x = 3$. Discutiremos o significado de funções contínuas na Sec. 2.11.

Terceiro momento: É o momento dedicado ao trabalho da técnica, ocorrendo nas diversas secções intituladas por *Exercícios* e *Exercícios de Revisão (Capítulo 2)*.

A coleção *Cálculo* em relação à transposição das organizações matemáticas pontuais em torno dos subtipos de tarefas referentes à determinação de limites de funções (também) ocorreu em três momentos.

Primeiro momento: Introdução de um problema para elaborar e sistematizar uma técnica (com a respectiva explicação do procedimento colocado em prática) que consiga resolver um dado limite (subtipo de tarefa). É ainda nesse momento que são enunciadas as propriedades e afirmações que formam os elementos que explicam e justificam a técnica elaborada (Figura 3).

Figura 3.

Extrato com o modelo de cálculo de limites (Stewart, 2017, p. 83)

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pelas Propriedades 2 e 1)} \\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pela Propriedade 3)} \\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)} \\ &= 39. \end{aligned}$$

Segundo momento: É o momento que tem por objetivo a avaliação dos elementos técnico-tecnológicos que surgem na situação considerada. Esse momento ocorre em comentários, logo após cada exercício resolvido (aparecendo apenas em alguns casos dentre os identificados). Dessa maneira, no referido momento, o aluno é levado à validação e reflexão sobre as respostas desenvolvidas pelo autor (Figura 4).

Figura 4.

Reflexões sobre o cálculo de limites (Stewart, 2017, p. 83-84)

OBSERVAÇÃO: Se tornamos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então $f(5) = 39$. Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo x por 5. Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b). As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente, e o uso similar das Propriedades dos Limites demonstra que a substituição direta sempre funciona para essas funções (veja os Exercícios 55 e 56). Enunciamos esse fato a seguir.

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

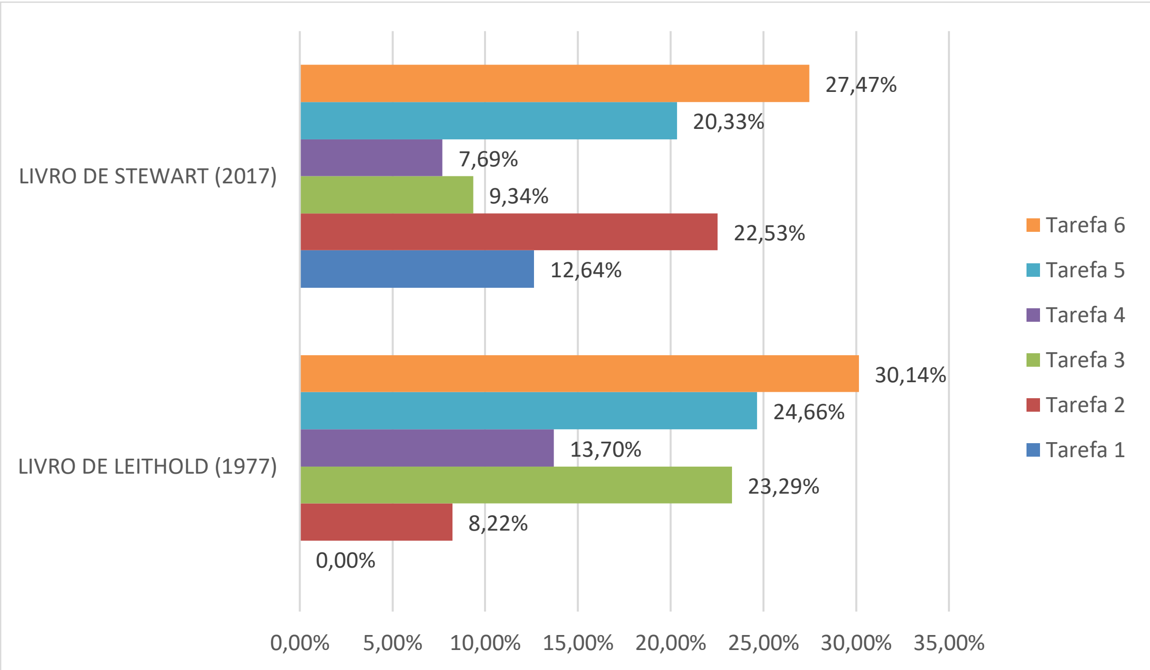
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

As funções que possuem essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em a*, serão estudadas na Seção 2.5. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como mostram os exemplos a seguir.

Terceiro momento: É o momento do trabalho da técnica, sendo concretizado nas diversas secções intituladas por *Exercícios*, *Teste – Verdadeiro ou Falso* e *Problemas Quentes*. O gráfico a seguir (Figura 5) mostra o comparativo em relação aos subtipos de tarefas existentes nas duas obras analisadas:

Figura 5.

Comparativo em relação ao quantitativo de tarefas (Batista, 2019, p. 149)



Pode-se destacar, baseando-se no gráfico acima, que o livro *O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold* dá maior ênfase às tarefas t_6 (determinar limites que envolvam $\pm\infty$), ou seja, limites do tipo $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x}{x^5}$, com 30,14% das atividades propostas. Vale destacar aqui, que o autor da referida obra, dá maior preferência à técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$ (dividir o numerador e o denominador/analisar intuitivamente o comportamento) para a realização das tarefas t_6. No livro *Cálculo de Stewart*, também há uma concentração maior das tarefas t_6, com 27,47% dos problemas propostos em relação ao total. O autor desse livro, também dá maior ênfase ao uso da técnica mista $\tau_{DND}\_\tau_{AIC}$ para a realização de tais tarefas.

Desse modo, pode-se perceber que (em ambos os livros), não há diferenças significativas no que concerne às preferências (majoritárias) em relação às tarefas e às técnicas.

De maneira um pouco mais geral, partindo-se do gráfico acima, e observando-se as tarefas t_4 (calcular o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que não ocorrem indeterminações nem impossibilidades em $x = a$), t_5 (calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, sendo que ocorrem indeterminações para $x = a$) e t_6, vê-se que não há diferenças significativas em relação às proporções de tais tarefas nas duas obras estudadas.

A tarefa t_3 (determinar limites laterais de $f(x)$ com o auxílio de uma investigação intuitiva da expressão matemática envolvida) é tratada de maneira diferente nos dois livros. A partir do gráfico acima, observa-se que, no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os problemas relacionados à tarefa t_3 aparecem com 23,29% do total dos problemas identificados (sendo a 3ª maior proporção no referido livro). No livro *Cálculo*, tais problemas aparecem apenas com 9,34% (sendo a 5ª maior proporção do total desse livro). Logo, no que concerne à representatividade da tarefa t_3, existe uma diferença significativa em relação aos dois livros estudados.

A tarefa t_2 (encontrar o limite de $f(x)$ com o auxílio do gráfico) é (também) tratada de maneira diferente pelos dois autores. A partir do gráfico acima, observa-se que, no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, os problemas relacionados à tarefa t_2 aparecem com 8,22% do total dos problemas identificados (sendo a 5ª maior proporção no referido livro). No livro *Cálculo*, tais problemas aparecem com 22,53% (sendo a 2ª maior proporção do total desse livro). Logo, no que concerne à tarefa t_2, existe uma diferença significativa em relação aos dois livros estudados.

Em relação as praxeologias matemáticas constituídas em torno das tarefas t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6, não há muitas distinções, o que há é uma diferente distribuição das proporções relativas ao quantitativo de exercícios existentes em ambos os livros.

A partir do gráfico acima, pode-se ainda concluir que, a organização matemática constituída em torno da tarefa t_1 (estimar numericamente o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$) não aparece no livro *O Cálculo com Geometria Analítica*. Já no livro *Cálculo*, essa tarefa aparece com 12,64% do total de exercícios existentes (sendo a 4ª maior proporção em relação ao total).

Em relação às tecnologias, o livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, concentra-se mais intensamente nas propriedades operatórias e da substituição direta para limites (θ_{POL_PSD}), assim como também, nas propriedades das funções contínuas (θ_{PFC}), com 27,18% em relação ao total. Já o livro *Cálculo*, trabalha mais com a ideia intuitiva de limites infinitos e no infinito, com 24,81% das situações propostas em seus exercícios.

Considerações Finais

Com o objetivo de estudar como autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral propõem situações visando a transformação de um estado de *não-saber* para um estado de *saber* em relação ao objeto matemático limites de funções reais de uma variável, escolheu-se duas obras aprovadas e indicadas por prestigiadas universidades brasileiras (40 anos distantes no tempo), a saber: O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold (1977) e Cálculo de James Stewart (2017), para serem submetidas à análise e à comparação.

Em relação à exploração dos subtipos de tarefas e da elaboração das técnicas, tanto no livro *Cálculo* como no livro *Cálculo com Geometria Analítica*, o trabalho é desenvolvido de forma a explicar (na maioria das vezes) as diferenças existentes entre os subtipos de tarefas, isto é, buscando mostrar os limites e as possibilidades das técnicas elaboradas e sistematizadas.

As organizações matemáticas diferem quanto à representatividade dos subtipos de tarefas exploradas e variedade das técnicas elaboradas, o que indica uma pequena mudança acerca da abordagem do ensino de limites entre os dois livros analisados; na publicação de 1977, há uma certa preferência em relação às tarefas que demandam mais trabalho algébrico;

já na publicação de 2017, há uma certa preferência por tarefas que demandam mais raciocínio matemático intuitivo em detrimento das tarefas que demandam mais trabalho manual.

As praxeologias didáticas entre as duas obras analisadas são semelhantes. As formas didáticas adotadas pelos dois autores, apesar de algumas poucas mudanças na linguagem (que se tornou ligeiramente mais simples com o passar do tempo), permanecem majoritariamente inalteradas, a saber: exploração das tarefas, elaboração das técnicas, e avaliação dos elementos técnico-tecnológicos (de uma maneira geral).

As razões de ser são as mesmas entre os dois livros submetidos à análise em relação ao conteúdo limites de funções, apesar de a publicação de 1977 dar certa preferência ao cálculo manual (algébrico), e de a publicação de 2017 dar certa preferência ao raciocínio matemático intuitivo; estudam-se limites para explicar e justificar todo o Cálculo Diferencial e Integral.

Conclui-se, então, que os modos de *viver* dos limites de funções nas duas obras investigadas, e que distam 40 anos no tempo uma da outra, são praticamente os mesmos.

Referências

Almeida, G. P. (2007). *Transposição Didática: Por Onde Começar?* São Paulo: Cortez.

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática.* Paraná: Editora da Universidade Federal do Paraná.

Antar Neto, A.; Sampaio, J. L. P.; Lapa, N. & Cavallantte, S. L. (2010). *Noções de Matemática – Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral.* Fortaleza: Vestseller, v. 8.

Araújo, A. J. (2009). *O Ensino de Álgebra no Brasil e na França: Um Estudo Sobre o Ensino de Equações do 1º Grau à Luz da Teoria Antropológica do Didático.* (Tese de doutorado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco).

Barbosa, E. J. T. (2011). *Equação do 1º Grau em Livros Didáticos Sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático.* (Dissertação de mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual da Paraíba).

Barbosa, E. J. T. (2017). *Praxeologia do Professor: Análise Comparativa com Documentos Oficiais e do Livro Didático no Ensino de Equações Polinomiais do 1º Grau.* (Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco).

Barbosa, E. J. T. & Lins, A. F. (2011). Equação do Primeiro Grau: Um Estudo das Organizações Matemáticas e Didáticas. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Recife, PE. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1637/537.

Batista, L. A. L. (2019). *Limites de Funções de Uma Variável Real: Análise das Praxeologias Matemáticas e Didáticas Propostas em Livros Didáticos.* (Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Pernambuco).

Bianchini, E. & Paccola, H. (1997). *Matemática.* 2. ed. São Paulo: Moderna, v. 3.

Brito Menezes, A. P. A. (2006). *Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-relações Entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental.* (Tese de doutorado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco).

Brousseau, G. (1986). Fondementes e méthodes de la didactique dês mathématiques. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Chevallard, Y. (1991). *Sur la Notion de Temps Didactique*. IVème École d'Eté de Didactique Des Mathématiques.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse Des Pratiques Enseignantes et Didactique Des Mathematiques: L'Approche Anthropologique*. Actes de l'U.E. de la Rochelle.

Chevallard, Y. (1999). L'Analyse Des Pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. pp. 221-266.

Chevallard, Y. (1999). In: Duperret J.C & Fenice J.C. L'Accès au Calcul Littéral et Algébrique: Um Enjeu du Collège. *Repères IREM*, n. 34, p. 29-54.

Chevallard, Y. (2001). Organiser l'Etude 1. Structures et Fonctions. In Dorier, J – L. et al. (eds): *Actes de la 1 Lieme Ecole d'Ete de Didactique des Mathematiques – corps – 21 – 30 Aout.* Grenoble: La Pensée Sauvage. pp. 3-22.

Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O Elo Perdido Entre o Ensino e a Aprendizagem.* Tradução Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora.

Henry, M. (1991). *Didactiques Des Mathématiques: Sensibilizations à la Didactique en Vue de la Formation Initiale Dês Ensignants de Mathématiques*. Laboratoire de Mathématiques – IREM, Besançon.

Iezzi, G. ; Murakami, C. & Machado, N. J. (2002). *Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e Noções de Integral.* 5. ed. São Paulo: Atual, v. 8.

Leithold, L. (1977). *O Cálculo com Geometria Analítica.* 2. ed. São Paulo: Harbra.

Nogueira, R. C. S. (2008). *A Álgebra Nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Uma Análise Praxeológica.* (Dissertação de mestrado em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul).

Rafael, R. C. (2017). *Cálculo Diferencial e Integral: Um Estudo Sobre Estratégias Para Redução do Percentual de Não Aprovação.* (Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora).

Santos, M. B. S. (2013). *Um Olhar Para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos Sobre o seu Ensino e Aprendizado.* (Tese de doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Souza, V. C. (2001). *A Origem do Cálculo Diferencial e Integral.* (Monografia de especialização em Orientação Educacional, Universidade Candido Mendes).

Stewart, J. (2013). *Cálculo.* 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, v.1.

Stewart, J. (2017). *Cálculo*. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, v.1.

Swokowski, E. W. (1983). *Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, v.1.

Taveira Neto, J. G. (2016). *A Importância do Estudo do Cálculo Diferencial na Educação Básica*. (Dissertação de mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Tocantins).

Recebido em: 27/11/2019
Aprovado em: 27/05/2020