mática han surgido para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del área, articulando los saberes de comunidades académicas como la nuestra, con los conocimientos locales de nuestras comunidades indígenas y con los aspectos regionales y mundiales que son comunes en la matemática.

Esta articulación de saberes genera varias preguntas, unas relacionadas con la matemática misma y la pertinencia de algunos temas en el contexto de una comunidad indígena, la preocupación por que los documentos legales que regulan la educación están pensados para las regiones centrales del país y su aplicabilidad en regiones de frontera no se promueve o se hace superficialmente.

El trabajo de acompañamiento tuvo resultados concretos como la producción conjunta por docentes y asesores de un documento para el plan de estudios, y la voluntad de las partes en continuar el proceso involucrando más instituciones que puedan aportar nuevas luces para promover desde la educación matemática cambios profundos en el proceso enseñanza-aprendizaje de esta área, y hacer aportes para que las comunidades de las regiones más apartadas del país gocen en lugar de sufrir en el proceso de intercambio de saberes relacionados con la matemática.

Átomos y núcleos de infinitesimales

KEMEL GEORGE

UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

Presentación

Leibniz se enfrentó con dos grandes problemas teóricos: el primero, dar una explicación convincente del concepto de infinitesimal. El segundo, mostrar una regla que permita la eliminación de infinitesimales comparativamente de orden mayor que otros. A ambos les dio una solución práctica, pues no sólo fundó el moderno cálculo diferencial e integral, sino que le permitió resolver innumerables problemas cuya solución era considerada imposible, haciendo uso de los métodos tradicionales de cálculo.

La respuesta a la controversia sobre el fundamento lógico matemático del cálculo tuvo que esperar tres siglos, con el *análisis no estándar de Robinson*[1] . A partir de allí, el sistema numérico real es considerado una estructura numérica de baja complejidad comparado con un sistema de mayor complejidad, conocido con el nombre de sistema numérico hiperreal *R.

El cálculo infinitesimal, o sea, el cálculo con *infinitamente grandes e infinitamente pequeños*, después de Robinson, se despliega en varias direcciones de investigación y grandes tendencias, que de una u otra forma repercuten en el aula de clase. Destacamos, en primer lugar, la que se ha delineado desde Nelson[2] , que consiste en insertar tres nuevos axiomas en la teoría axiomática de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel cuyas siglas son ZFC. Surge así la *Teoría Interna de Conjuntos* IST.

Hay métodos de construcción de la recta no estándar, como los de Hurd-Loeb[3] y Lindstrom[4], quienes obtienen el campo de los *hiperreales* -con tres tipos de cantidades, reales ordinarios, reales infinitos e infinitesimales- utilizando sucesiones numerables de reales ordinarios, identificadas entre sí mediante *ultrafiltros*.

Algunos autores han llegado a plantear que sólo con el apoyo de la *Teoría de Modelos* y aplicaciones del *Principio de Transferencia*, (fórmulas verdaderas en los reales son verdaderas en el nuevo modelo no estándar) se pueden entender los hiperreales, lo que haría casi imposible su introducción en los cursos elementales de cálculo diferencial e integral. Si esto fuera así, tendríamos que darles la razón, porque desde el punto de vista cognitivo no es nada claro que estos métodos sean más atractivos en el aula de clase que los tradicionales.

[1] Robinson A. Non-Standard Analysis, North-Holland Pub. Co. Amsterdam, 1966. Revised edition, 1974.

[2] E.Nelson, "Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis", Bol. of the American Mathematical Soc., Vol.83, Nov.6, 1977.

[3] A.E.Hurd, P.A.Loeb, An Introduction to Nonstandard Real Analysis, Academic Press, Inc. 1985.

[4] T.Lindstrom, An Invitation to Nonstandard Analysis -Nonstandard Analysis and its Applications, Edited by N.Cutland, Cambridge University Press, 1988.

Nuestro interés es precisamente, evitar en lo posible esta situación, al presentar unas construcciones que combinan varias metodologías, con un objetivo cognitivo y didáctico. Y esta es precisamente la tendencia que nos interesa destacar, la que se orienta hacia la educación matemática, o sea que su énfasis es el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que se usa el análisis no estándar como herramienta. Este esfuerzo puede percibirse en cierta medida en Keisler[5] y se encuentra reforzada por los grupos de investigación en México, con Imaz[6], entre otros. La propia denominación de la actividad, el Cálculo con *Infinitesimales*, retoma las ideas originales de Leibniz y Newton y reafirman la inclinación de esta metodología.

El sistema numérico hiperreal. La base numérica del cálculo con infinitesimales es el campo de los números reales extendidos, también llamada la *recta hiperreal* *R. El conjunto *R es un campo linealmente ordenado, que contiene al campo linealmente ordenado de los números reales R. Este conjunto *R está organizado como estructura aritmética, donde cohabitan tres tipos de números: los *infinitesimales* o infinitamente pequeños, incluido el cero; estos son números que en valor absoluto son menores que cualquier real ordinario. Los *finitos*, entre los cuales se encuentran los reales ordinarios; y los *infinitos*, que son número en valor absoluto mayores que cualquier real ordinario.

Estos tres tipos de cantidades y las operaciones que sobre ellas se erigen - suma, resta, multiplicación, división, raices y potencias, exponenciales y logaritmos, funciones trigonométricas, etc.- difieren de manera drástica del manejo convencional y tradicional que se conoce sobre los números reales que se enseñan en el aula de clase.

Vamos a demostrar que son suficientes dos suposiciones, para que podamos hacer cálculo con infinitesimales. En primer lugar, aceptaremos que existe un campo ordenado *R, extensión de los números reales R, o sea, R $\subset$ *R; en segundo lugar, esta extensión es tal que las funciones y operaciones que conocemos en R son funciones y operaciones admitidas en *R. A continuación, demostraremos que en *R existen elementos infinitos, finitos e infinitesimales, donde *infinitesimal* significa, como es entendido, una cantidad menor que todo real e infinito es una cantidad mayor que todo real.

Infinitos e infinitesimales. En efecto, la suposición de que existe un campo totalmente ordenado *R tal que R $\subset$ *R tiene profundas consecuencias aritméticas y lógicas. Como R es parte de *R, obviamente todos los reales ordinarios son hiperreales. Pero si existe al menos un elemento *r de *R que no es elemento de R, entonces es posible extraer algunas conclusiones sobre este extraño elemento. Como *r no puede ser cero, necesariamente *r es menor o mayor que cero, ya que los hiperreales forman un campo ordenado.

Vamos a suponer *r > 0. ¿Habrá un real ordinario u que esté comprendido entre 0 y *r, esto es, que cumpla la condición 0 < u < *r? Si no lo hay, entonces *r es menor que todo real ordinario, y esto es precisamente lo que hemos dicho que se denomina *infinitesimal*. Por tanto, *r sería un infinitesimal y tendríamos otro tipo de cantidad distinta de las reales ordinarias.

Puede ocurrir que existiera un real ordinario u tal que 0 < u < *r. Entonces solo quedan dos alternativas. O bien hay un real ordinario s a la derecha de *r, o no lo hay. En caso que lo haya, diremos que *r es finito (porque está acotado a la izquierda y a la derecha por un real ordinario, donde u es cota inferior y s es una cota superior de *r. Tenemos pues, 0 < u < *r < s. El conjunto A de reales ordinarios menores que *r es no vacío, ya que u $\in$ A. Además , está acotado superiormente por s. Luego A tiene una máxima cota inferior que es un real ordinario. Similarmente, el conjunto B de reales ordinarios mayores que *r es no vacío, ya que s $\in$ B. Además , está acotado inferiormente por u. Luego tiene una mínima cota superior que es un real ordinario. El par A, B es lo que se denomina *cortadura de Dedekind*[7] en los reales ordinarios, ya que ninguno de ellos es vacío, todo elemento de A es mejor que todo elemento de B, la unión de los dos conjuntos es R y la intersección de los dos es vacía. Por consiguiente, o bien la máxima cota inferior es elemento de A o bien, la mínima cota superior es elemento de B.

Sea r la máxima cota inferior y supongamos que es elemento de A. Como r < *r llamemos α la can-

[5] H.J.Keisler, Elementary Calculus, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1976.

[6] C.Imaz, "Infinitesimal models for Calculus", Bol.Sociedad Matemática Mexicana, Vol.29, 2,1984.

[7] R. Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, Dover Publications, Inc. New York, [1901], 1963

tidad positiva α= *r - r. No puede haber ningún real ordinario u que cumpla 0 < u < α porque entonces tendríamos u < *r - r, u + r < *r, y esto contradice que r es la máxima cota inferior. Supongamos que la mínima cota superior r es elementos de B. Como r < r llamemos α la cantidad positiva α = r - *r. No puede haber ningún real ordinario s que cumpla 0 < s < α porque entonces tendríamos s < r - *r, *r < r - s, y esto contradice que r es la máxima cota inferior. Conclusión, en ambos casos, a es menor que todo real ordinario positivo, o sea, es infinitesimal. Ello significa que el hiperreal finito *r se separa en dos sumandos: el real ordinario r y el infinitesimal α. En otras palabras, hemos demostrado que todo hiperreal finito *r es de la forma *r = r + α. Esta descomposición es única, porque si separamos a *r como *r = s + β entonces r - s = α - β y siendo r - s un real ordinario y un infinitesimal, está obligado a ser el infinitesimal 0.

Queda otra posibilidad: el hiperreal *r que tomamos no está acotado superiormente por ningún real ordinario s. Esto quiere decir que es mayor que todo real ordinario, que es la definición de hiperreal *infinito*. Y tenemos el tercer tipo de hiperreales. Como podemos ver, la existencia de un campo totalmente ordenado *R extensión de los reales R implica, necesariamente, la existencia de cantidades de naturaleza aritmética distinta a la de los reales ordinarios: los infinitesimales, los finitos, y los infinitos.

El lenguaje hiperreal. Para familiarizarnos con el sistema numérico hiperreal son suficientes algunas definiciones y ejemplos, que expondremos a continuación. Hemos visto que los infinitesimales o infinitamente pequeños, α, β, etc., -incluido el cero- son aquellas cantidades que en valor absoluto son menores que cualquier real ordinario . Dado un infinitesimal α, se escribe α ≈ 0. En general, si tenemos dos hiperreales a, b cualesquiera y ocurre que la diferencia b - a es infinitesimal, decimos que a está muy cerca de b y se escribe a ≈ b. Otro tipo de cantidades son los reales infinitos M, que son aquellas en valor absoluto mayores que todo real ordinario, y por ende resultan ser inversos multiplicativos de los infinitesimales, $\forall r \in R \rightarrow r < |M|$. En otras palabras, un número real distinto de cero es infinito si y sólo si su inverso multiplicativo es infinitesimal. Entre los reales infinitos, nos interesa destacar los enteros infinitos N, M, etc., y a los que frecuentemente se llaman *hiperenteros*.

Hemos visto que otro tipo de números son los reales finitos *r, que son de la forma *r = r+α, donde r es real ordinario y α es infinitesimal positivo, negativo o cero.

$$\exists r \in R, |{}^*r| < r$$

Los finitos incluyen los reales ordinarios s, t, u, v, etc. que ocurren precisamente cuando α = 0. Si *r es hiperreal finito de forma *r = r + α, el real ordinario r se denomina parte estándar de *r y se escribe st (*r) = r.

El siguiente sorprendente ejemplo es tomado de un texto clásico de cálculo infinitesimal[8] . Si H es infinito, entonces $\sqrt{H+1}-\sqrt{H-1}$ es infinitesimal, porque

$$\sqrt{H+1}-\sqrt{H-1} = \frac{\left(\sqrt{H+1}-\sqrt{H-1}\right)\left(\sqrt{H+1}+\sqrt{H-1}\right)}{\sqrt{H+1}-\sqrt{H-1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H-1}} \approx 0$$

ya que el denominador es la suma de hiperreales infinitos, de modo que su inverso es infinitesimal.

El átomo de un real. Uno de los hechos más espectaculares de *R es que, para cada real ordinario, podemos considerar el conjunto de todos los hiperreales que están muy cerca a él. Particularmente, podemos considerar el conjunto de todos los infinitesimales, o sea, de todos los hiperreales que están infnitamente cerca de cero. Esto es lo que se denomina *el átomo* de cada real ordinario.

En otras palabras, siempre que a sea real ordinario, se llama A(*a*), el átomo de *a*, todos los *b* tales que *a* ≈ *b*, aunque algunos autores, entre ellos, el mismo Robinson, lo llaman la *mónada de a*. Como todo hiperreal finito tiene una parte estándar, dicho hiperreal pertenece al átomo de su parte estándar. La relación de pertenecer o no al mismo átomo, es una relación de equivalencia por lo siguiente: es claro que *a* ≈ *a*, por cuanto *a* - *a* = 0. Además, si *a* ≈ *b*, *a* - *b* = *a*, a infinitesimal, luego *b* - *a* = - *a*, infinitesimal. Finalmente, si a - b = *a y b* - *c* = *β* entonces *a* - *c* = *a* - *β*, infinitesimal.

Como vemos, el átomo A(*a*) es el conjunto de todos los hiperreales finitos de la forma *a* + *a* , donde *a* es real ordinario y α es infinitesimal. Por

[8] H.J.Keisler, Elementary Calculus, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1976.

consiguiente, como la distancia entre dos reales ordinarios distintos no puede ser infinitesimal, sus átomos tienen intersección vacía. Esto es un atributo único de los hiperreales, porque quiere decir que los átomos separan, en sentido estricto, a cada real ordinario de otro. Recordemos que todos los infinitesimales conforman el átomo de cero A(0).

Hay que ser cuidadoso con las operaciones entre infinitesimales. Por ejemplo, si N es infinito, los siguientes cuatro números son infinitesimales,

$$\frac{1}{N+1} \approx 0, \quad \frac{1}{N+2} \approx 0, \quad \frac{N}{N^3+2} \approx 0, \quad \frac{1}{N+1} \approx 0$$

Si dividimos el primero por el segundo, obtenemos un hiperreal muy cerca de 1,

$$\frac{N+2}{N+1} = \frac{N}{N+1} + \frac{2}{N+1} = 1+\alpha,$$

mientras que si dividimos el tercero por el cuarto, obtenemos un infinitesimal:

$$\frac{N+1}{N^3+2} \approx 0,$$

Se dice que las dos primeras cantidades tienen igual orden de magnitud, mientras que la tercera es de menor magnitud que la cuarta. Esta cuestión crucial de comparación de cantidades está fuera del alcance del cálculo tradicional.

$3\alpha^2$ $\frac{\alpha}{\beta} = 1+\delta$

Conviene aquí hacer un comentario sobre un hecho inesperado en los hiperreales: se pueden exhibir conjuntos acotados que no tienen mínimas cotas superiores ni máximas cotas inferiores. Por ejemplo, el átomo de cualquier real ordinario. Así, el átomo de 0 está acotado superiormente por cualquier real ordinario positivo, pero no existe el mayor de los infinitesimales, o el menor de los infinitesimales, o algo por el estilo.

Esta situación inesperada, de poder comparar magnitudes, nos lleva a preguntarnos si no hay un método que nos permita *despreciar* cantidades de mayor orden en relación a otras cantidades de orden menor, que es lo que a continuación vamos a demostrar.

El núcleo de un infinitesimal. Comparar infinitesimales nos permite resolver definitivamente uno de los más importantes problemas teóricos que enfrentaron -infructuosamente- los fundadores del cálculo: la eliminación de infinitesimales que comparativamente son de orden mayor que otros.

Supongamos que tenemos el infinitesimal $\alpha+\alpha^2$. Es deseable eliminar el segundo sumando, para lograr la identificación $\alpha \equiv \alpha+\alpha^2$. Y en efecto, esto es lo que hacían Leibniz y sus seguidores, quienes declaraban que, en comparación con un infinitesimal, su orden cuadrático es "despreciable". El criterio para saber cuando una cantidad es o no despreciable, lo podemos resolver satisfactoriamente de la siguiente manera.

Sea A(0) el átomo de 0. Definamos allí la siguiente relación entre infinitesimales. Diremos que dos elementos no nulos del átomo de cero son equivalentes si y sólo si el cociente de ambos está en el átomo de la unidad. En otras palabras, $\alpha \cong \beta \leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 1+\delta$, donde δ es otro infinitesimal.

Esta es una relación de equivalencia porque $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Además, si , el inverso es $\frac{\beta}{\alpha} = 1+\eta$.

Finalmente,

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1+\delta, \quad \frac{\beta}{\gamma} = 1+\eta, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma} = (1+\delta)(1+\eta) = 1+\lambda.$$

La clase de equivalencia de cada infinitesimal α la denominaremos núcleo de a y la escribiremos N(α). Por supuesto, la clase del cero es el cero mismo. Dado un infinitesimal α, diremos que el infinitesimal δ es *despreciable* comparado a si α + δ pertenece a N(α). Por ejemplo, $\alpha+3\alpha^2$ es elemento de N(α) porque $\frac{\alpha+3\alpha^2}{\alpha} = 1+3\alpha$. Luego $3\alpha^2$ es despreciable comparado con α. Claro que el núcleo de estás bastante lejos del núcleo de α, y un elemento de este núcleo tendría que ser, digamos, el infinitesimal $3\alpha^2 - 5\alpha^7$. Por tanto, el segundo sumando es despreciable en relación con el primero.

Como 0 es infinitesimal y α + 0 = α, es obvio que 0 es despreciable respecto a cualquier otro infinitesimal.

Podemos separar el átomo de cada real ordinario r distinto de cero en sus respectivos núcleos, sumando a este real cada núcleo del átomo de cero. O sea, definimos N(r+α) = r + N(α). Así, podremos decir que el real finito q +δ es despreciable comparado con el real finito p + α si tienen idéntica parte estándar p = q y δ es despreciable respecto a α.

La existencia de núcleos en un átomo tiene, además, un sabor didáctico. Muchos podrían pensar que el átomo de cero es algo muy pequeño, pero el interior del átomo, a su vez, se separa en toda una constelación de núcleos, uno por cada infinitesimal.

La regla de Leibniz. Uno de tantos ejemplos que nos puede ilustrar la aplicación de nuestro método, es la regla de Leibniz de la diferencial del producto de dos funciones. Dado el producto $x \times y$, si son infinitesimales, la diferencial,

$$d(x \times y) = (x + dx) \times (y + dy) - x \times y = ydx + xdy + dx \times dy$$

pero el infinitesimal $dx \times dy$ es despreciable comparado con el infinitesimal porque si ambas funciones tienen derivada, el cociente

porque r es real finito, luego es infinitesimal. Esto permite escribir al clásica fórmula

$$d(x \times y) = ydx + xdy$$

La calculadora TI 92 plus y el cbr en la modelación del movimiento pendular

MEN – UNIVERSIDAD DE NARIÑO – INEM PASTO
ÓSCAR ALBERTO NARVÁEZ GUERRERO

La introducción a la clase de matemáticas de la calculadora TI 92 Plus y otros dispositivos, tales como el CBR, están generando una nueva cultura matemática, caracterizar algunos rasgos de éste fenómeno educativo en la modelación del movimiento pendular es el propósito central de la presente investigación. El trabajo de los estudiantes permitió observar en la práctica los constitutivos del marco teórico del Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de Colombia, como son: Mediación Instrumental, Representaciones Ejecutables, Cognición Situada, Solución de Problemas, Fluidez Algorítmica y Fluidez Conceptual.

El problema de investigación. ¿Cuáles son algunos aspectos fundamentales del uso de la calculadora TI 92 Plus y el CBR en la modelación matemática de la oscilación de un péndulo?

Objetivo general. Identificar algunos rasgos importantes acerca del uso de la calculadora TI 92 Plus y el CBR en la modelación matemática de la oscilación de un péndulo.

Metodología. La investigación fue de carácter *CUALITATIVO ETNOGRÁFICO EN EDUCACIÓN*. Por las características de los resultados es *DESCRIPTIVA NORMAL.*

Categorías y subcategorías. Éstas se formularon a partir de las 6 teorías que constituyen el Marco Teórico mencionado al inicio.

Actividades realizadas por los estudiantes. Los estudiantes realizaron básicamente tres tipos de actividades: Primera. Debían articular el CBR y la calculadora TI 92 plus, para obtener la representación gráfica del movimiento pendular. Segunda. Resolver una guía de trabajo relacionada con el movimiento pendular y sus representaciones semióticas. Tercera. Resolver un cuestionario complementario.

Conclusiones

Los resultados de la investigación ayudan a comprender, caracterizar y ampliar los referentes teóricos que fundamentan el Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas. Es así como en lo relacionado con la MEDIACIÓN INSTRUMENTAL, se concluye que sin la calculadora TI 92 Plus y el CBR, hubiese sido casi imposible que estos estudiantes de 10º grado contextualizarán el modelo matemático asociado al movimiento pendular. Las REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EJECUTABLES de la calculadora TI 92 Plus permitieron a los estudiantes acceder y explorar estos objetos virtuales a fin de comprender el movimiento pendular y sus modelos matemáticos. El trabajo en equipo permitió caracterizar LA COGNICIÓN SITUADA, aspectos como la motivación grupal, la sana competencia, el respeto a los demás, entre otros fueron los aspectos observados en la experiencia. La ZONA DE DESARROLLO PROXIMO formulada por Vigotsky, hizo su presencia en todos los instantes de la experiencia: Los estudiantes alcanzan un alto grado motivacional y de conflicto cognitivo, ingredientes que favorecen el aprendizaje si el docente en su calidad de "experto", como lo manifiesta Vigotsky, aprovecha esta situación para