Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções

MARIA ELI PUGA BELTRÃO

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI

Resumo

Este artigo é parte de uma pesquisa mais ampla (Beltrão, 2009) cujo objetivo foi investigar a utilização da Modelagem e Aplicações como abordagens para o ensino do Cálculo. Nele foi apresentado o estudo realizado para o caso particular do conceito de função. Os sujeitos da pesquisa eram alunos iniciantes de um Curso Superior de Tecnologia de Alimentos. A metodologia utilizada foi qualitativa e teve por princípio considerar o investigador como instrumento principal, adotando as estratégias das observações participantes. A proposta de implementação da Modelagem e Aplicações em três fases mostrou-se eficiente, e possibilitou resultados favoráveis à aprendizagem do Cálculo numa perspectiva em que os estudantes sejam protagonistas dessa aprendizagem.

Palavras chave*: Ensino de Cálculo; Funções; Aplicações e Modelagem Matemática.*

Abstract

This article is part of a wider research (Beltrão, 2009) which aimed to investigate the use of Modeling and Applications as a tool for teaching Calculus. This paper shows a study for the particular case of the concept of function. The research individuals were beginner students in an undergraduate course of Food Technology. The methodology used was the qualitative. Such approach took as principle to consider the researcher as a main instrument, and adopted the strategy of participant observation. The proposed implementation of Modeling and Applications in three phases proved to be efficient, and yielded favorable results to the learning of Calculus in a scenario where students are the protagonists of this learning process.

Keywords*: Teaching of Calculus, Functions, Mathematical Modeling and Applications.*

Introdução

É de longa data que as dificuldades encontradas no ensino do Cálculo são tratadas em trabalhos e pesquisas visando busca de causas e meios instrucionais para minimizar seus efeitos. Essas dificuldades tornam-se mais pronunciadas quando a disciplina é desenvolvida como “matemática para curso de serviço”, ou seja, em cursos destinados a formar não matemáticos. (HOWSON *et al.,* apud BARBOSA (2004)).

Entre os “cursos de serviço”, enumeram-se cursos de Engenharia, Economia, Biologia, etc. Barbosa (2004) destaca que o debate sobre o ensino da Matemática nesses cursos toma diversas direções, uma das quais versa sobre os conteúdos que devem integrar o programa das disciplinas - outra direção diz respeito às condições oferecidas aos alunos para desenvolverem atividades específicas no contexto geral da disciplina. Nomeia tais condições *ambientes de aprendizagem.*

A pesquisa, que apresentamos neste artigo, foi desenvolvida com alunos do primeiro ano de um curso de Tecnologia em Alimentos, na disciplina Cálculo. É o caso de "Matemática para curso de serviço".

Dois pontos são relevantes no curso citado: o papel significativo que o Cálculo desempenha na formação dos profissionais dessa área, e o fato dela ter que ser desenvolvida de forma conjugada às demais disciplinas, exigindo dos professores esforços para evitar as chamadas "ilhas de informações". Assim, cumpre estruturar cuidadosamente uma estratégia de ensino que atenda aos propósitos do curso, envolvendo nela evidentemente a disciplina Cálculo.

De pronto é importante destacar que os estudos históricos e o conhecimento das pesquisas realizadas sobre o tema das Aplicações e Modelagens, desenvolvidos na pesquisa mais ampla com vistas ao doutorado, foram essenciais para o conhecimento dos princípios epistemológicos das abordagens bem como o convencimento das potencialidades do uso das mesmas, no ensino de Matemática em geral, e especialmente nos cursos de tecnologia, nos quais se espera que a Matemática desempenhe um de seus papeis importantes que é o de explicar fenômenos da realidade.

Defesas fortes dessas potencialidades são encontradas nos trabalhos do *14º ICMI Study* entre os quais o tema – *Modelagem em diferentes níveis de ensino* – mereceu atenção de estudiosos de nove países. As potencialidades têm a seu favor a consideração de que a Modelagem Matemática é uma forma de minimizar a grande lacuna que separa a realidade e a Matemática; e de que ela permite aos alunos utilizarem experiências da vida cotidiana para compreender Matemática, equivalendo a um atalho para compreender o mundo real; e de que é importante em todos os níveis de ensino, uma vez que desenvolve o pensamento crítico e enseja que os cidadãos tomem posição sobre a realidade que os circunda.

Em relação aos termos "Aplicações" e "Modelagem", Felix Klein (1849-1925) referia-se com frequência ao método que usava "Aplicações", valorizando-o de modo particular, a ponto de recomendá-lo ao Movimento de Modernização do Ensino da Matemática, no início do séc. XX. Mais recentemente, durante as últimas décadas, os termos "Aplicações e Modelos" vêm sendo utilizados para designar qualquer tipo de relação entre o mundo real e a Matemática.

Assim sendo assumimos o termo "Aplicação" como uma ação da Matemática para a realidade. É como se estivéssemos perguntando: “conhecendo tópico(s) da Matemática, onde poderemos usá-lo?”.

O termo "Modelagem" retrata outro tipo de ação, que parte da realidade para a Matemática. É como se estivéssemos perguntando: Onde posso encontrar alguma Matemática para nos ajudar a enfrentar este problema? Ou seja, a Modelagem possibilita compreender ou resolver problemas de algum segmento do mundo real. Neste caso, a resolução de um problema envolve coleta de dados reais, que fornecem informações sobre a situação de interesse. Os dados geralmente sugerem o tipo de modelo matemático que leva à resolução. Pelo processo de matematização, os objetos, dados, relações, condições e pressupostos da aplicação do domínio extramatemático, são traduzidos em linguagem matemática, do qual resulta um modelo que permite abordar o problema identificado.

Ainda na Modelagem, os métodos matemáticos são utilizados para obter resultados pertinentes às questões que decorrem da transposição do problema do mundo real. Incluem procedimentos lógicos, dedução matemática, levantamento de hipóteses, utilização de resultados teóricos, resolução de equações, cálculos numéricos, estimativas de parâmetros, realização de testes estatísticos, simulações, etc. Os resultados matemáticos obtidos precisam ser traduzidos para então voltarem ao domínio extramatemático no qual o problema original se localizava. Dessa forma, será interpretado em relação ao seu contexto original. Far-se-á a validação caso os resultados obtidos sejam compatíveis com as informações prestadas pelo problema original. Quando é considerado insatisfatório, todo o processo deve ser repetido, com alguma modificação, ou então outro modelo deve ser apresentado.

No decurso do processo de Modelagem, conforme descrito é possível produzir um ou mais modelos, partes integrantes, portanto, de um conjunto mais vasto. Constata-se então a importância do estudo dos modelos em fornecer um amplo conjunto de ferramentas que permite aumentar as opções disponíveis para solucionar problemas.

Com essas considerações, fica estabelecido que o processo da Modelagem se inicia com o estudo de alguma situação problema, simplificando-a e estruturando-a a fim de torná-la mais precisa. Alguns dos problemas tratados pela Modelagem matemática são de natureza prática, como, que fazer para otimizar determinado compartimento? Como obter uma área ou volume a partir de uma quantidade específica de material? A esses se acrescentam os problemas de natureza científica.

As questões abordadas nesta pesquisa inserem-se nessa "realidade espacial" bidimensional. Constituem-se de determinados objetos, fenômenos ou situações e são traçadas a partir de combinações de Aplicações e Modelagem em contextos e níveis a ela pertinentes.

Procuramos traçar estratégias para ministrar Cálculo no primeiro ano de um Curso Superior de Tecnologia por meio das Aplicações e Modelagem Matemática, de modo a atender exigências institucionais como cumprimento de programa, bons resultados de avaliação, entre outras.

Essas exigências em formar egressos para o exercício de sua profissão implicam em atribuir à Matemática o estatuto de ferramenta para as disciplinas específicas do curso. Assim parecia claro que a abordagem da Matemática por meio de Aplicações ou Modelagem se adequava ao caso em estudo. No entanto algumas pesquisas evidenciam entraves na utilização dessa abordagem como estratégia de ensino.

Debruçamos-nos sobre pesquisas que revelavam dificuldades no uso da Modelagem ou Aplicações como estratégia de ensino. Em Barbosa (2001) encontramos essa indicação, e analisamos sua proposta de que a Modelagem fosse tratada como um “ambiente de Aprendizagem” no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade, e a organização das atividades em sala de aula seria atribuição dos alunos, e ao professor caberia a responsabilidade de criar estratégias para que as possíveis dificuldades surgidas ao organizar esse ambiente de aprendizagem sejam suplantadas. Concordamos com os princípios norteadores da proposta de Barbosa, porém ficamos atentos com as responsabilidades atribuídas aos alunos.

Também atentamos para as indicações de Silveira (2007) por meio de anotações de professores que rejeitam a adoção da Modelagem Matemática em suas práticas de sala de aula. Entre as justificativas que apontam estão: preocupação em cumprir o conteúdo; falta de tempo ou preocupação com gasto excessivo; reação dos alunos; preocupação acerca do processo de construção do conhecimento. O pesquisador chega a admitir que, muitas vezes, há abertura e otimismo entre os professores quanto a trabalhar com Modelagem na Educação Matemática, otimismo e abertura, entretanto, que não se concretizam na prática, visto que são muito poucos os que aplicam a Modelagem em classe.

Biembengut e Hein (2005) julgam necessário promover alterações no processo de Modelagem quando aplicado em cursos regulares com estrutura organizacional tradicional e programa a cumprir.

Os dados apresentados por Barbosa (2001), revelados por Silveira (2007) e os apontamentos feitos por Biembengut e Hein (2005), foram considerados relevantes, fizeram parte das nossas reflexões e corroboraram para a elaboração de uma abordagem cujo objetivo foi transpor grande parte dos entraves apontados. Com este procedimento pudemos minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos ingressantes ao curso superior, em especial ao curso de Tecnologia em Alimentos.

Creditamos o sucesso alcançado no relacionamento da teoria e prática que utilizamos nesta investigação. Ela nos trouxe surpresas e dificuldades constituindo-se na problemática da tese de doutorado, e a pesquisa realizada possibilitou apresentar propostas para a relação pretendida.

1. Propostas de Atuação

Este trabalho foi desenvolvido com turmas iniciantes de um curso de Tecnologia em Alimentos em 2005, na disciplina Cálculo, com os procedimentos seguintes:

Num primeiro momento foi realizada com alunos ingressantes uma atividade diagnóstica, cujos resultados foram norteadores para algumas atividades com conteúdos da Matemática básica, e um acompanhamento individual de evolução desses conhecimentos, conforme os resultados aferidos do diagnóstico. Esses conteúdos foram retomados em todo momento que houve necessidade. Após esse procedimento se iniciou o desenvolvimento do programa do curso propriamente dito.

Os conteúdos arrolados na ementa do primeiro semestre envolvem "estudos das funções elementares". Esses assuntos foram introduzidos aos alunos pela professora/pesquisadora por meio de um breve histórico, e por alguns exemplos de aplicações relacionados ao curso de Tecnologia dos Alimentos. Nessa introdução foram ainda exploradas situações com o auxílio do computador.

Na etapa seguinte a professora/pesquisadora apresentou as definições dos conceitos, algumas propriedades importantes e exemplos, os quais seguiram a orientação indicada por livros didáticos selecionados segundo os objetivos do curso.

Após a introdução formal dos conceitos, foi proposta ao aluno a busca de situações em que o conteúdo estudado tenha sido aplicado, preferencialmente em sua área de atuação. É quando se dá um retorno à questão: "com essa matemática aprendida, onde poderei usá-la?". Em geral o aluno encontra tais situações em artigos científicos, ou em trabalhos desenvolvidos em outras disciplinas. O material assim coletado é discutido, tanto sobre o assunto nele contido, como principalmente quanto à Matemática envolvida.

A elaboração de modelos ocorre num último momento quando o estudante tomou conhecimento das noções formais, mesmo que de forma introdutória, e vivenciou experiências de modelagem ou de aplicações elaborados por outros. A formação de conhecimentos prévios da matemática básica foi sendo perseguida em separado, ou no bojo do desenvolvimento do curso, tendo-se por pressuposto que a mesma é fundamental para a exploração de modelos adequados ao curso, e exploração de aplicações significativas.

Nomeamos essas fases de Fase I, II e III como organizadora de nossa estratégia, considerando que na prática pode haver fusão entre elas. Neste artigo o conteúdo estudado segundo as abordagens indicadas anteriormente é o conceito de função.

1.1. Fase I

Na primeira etapa da Fase I a professora/pesquisadora apresentou aspectos históricos do conceito de função. A intenção foi indicar ao estudante que a construção de um conceito é coletiva e leva muito tempo. É fato que muitos dos termos que aparecem numa abordagem histórica não são compreensíveis para alunos iniciantes de um curso de Tecnologia de Alimentos, mas essa introdução é apresentada buscando valorizar a construção do conceito pelo tempo. Utilizamos a obra de Klein, *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (1924-1928), pois nela é bem explorado esse aspecto da evolução do conceito de função ao longo do tempo. Nessa obra é indicado que por volta de 1750, Euler em *Introductio* apresenta duas definições distintas para função. Ele define *y* como função de *x*, a toda expressão analítica em *x*, mais especificamente, a toda expressão composta de potências, logaritmos, funções trigonométricas, entre outras, da variável *x*, sem expressar claramente como podem ser feitas as combinações. Euler já estabelecia a classificação das funções em algébricas ou transcendentes. E também define uma função pela igualdade y = f(x) quando, referindo-a um sistema de eixos coordenados, x; y, ela resulta no gráfico de uma curva qualquer, *libero manus ductu*. Euler não estabelecia qualquer relação entre as duas definições.

Joseph L. Lagrange (1736-1813) em sua *Théorie des fonctions analytiques*, publicada por volta de 1800, restringe consideravelmente o conceito de função limitando-as somente às funções analíticas, definidas por séries de potências.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), em sua obra *Théorie analytique de la chaleur* de 1822, apresenta o problema da propagação do calor em que aparecem os valores de contorno, obtidos em diferentes partes, arbitrariamente e de forma independente. Fourier aborda a situação como Euler, em sua segunda definição do conceito de função.

Essa definição subsiste em sua essência nos trabalhos de Peter G. L. Dirichlet (1805-1859), embora já estivesse se referindo a funções contínuas ou pouco descontínuas. Para ele é assim definido o conceito geral de função:

> *"Se por qualquer meio, se faz corresponder a cada valor de x compreendido em um intervalo, um valor determinado de y, diz-se que y é uma função de x".* (KLEIN (1924-28), p. 301-302).

Por volta de 1830, inicia-se o desenvolvimento da Teoria Especial de Funções de Variável Complexa, chegando pouco a pouco, ao domínio dos matemáticos, como Augustin L. Cauchy (1789-1857), Bernhard Riemann (1826-1866) e Karl Weierstrass (1815-1897).

Os conceitos, segundo Klein, foram construídos por meio das aplicações nas ciências naturais.

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, até o séc. XIX. Esses estudos evoluíram e como consequência surgem numerosas aplicações da Matemática a outras Ciências, pois, os cientistas partindo de observações procuravam uma fórmula (uma função) que explicasse os sucessivos resultados obtidos. A função torna-se, então, o modelo matemático que explica a relação entre as variáveis.

A noção de função é de importância central na concepção e no estudo de modelos (dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial,...), qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção-chave na Matemática atual.

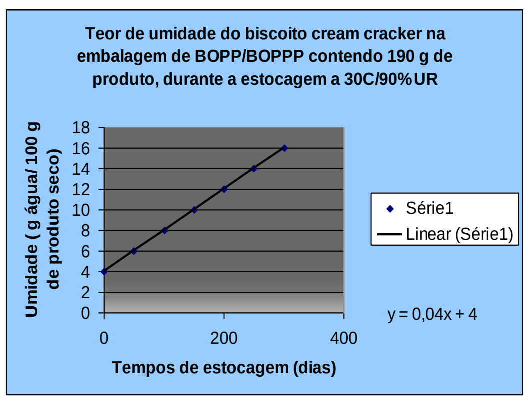
Após a abordagem histórica, inicia-se uma segunda etapa da Fase I. Nesta etapa são exploradas algumas aplicações, ou modelos já elaborados do conteúdo em estudo, no caso função. Essas primeiras ações são conduzidas pelo professor, tanto na exposição da parte histórica, quanto na exposição dos exemplos, que são preferencialmente pertinentes à área de estudos do curso. O propósito da apresentação de exemplos dessa natureza é mostrar o envolvimento da matemática, com o objetivo de informar ao aluno que o assunto a ser estudado lhe será útil em sua área de atuação. Também na pesquisa para desenvolvimento de novos alimentos ou para suas melhorias é fundamental conhecer o comportamento das funções, pois é através da análise de seus gráficos que muitas decisões são tomadas.

Um exemplo do que pode ser apresentado nessa etapa da Fase I é o caso do tempo que um produto pode ficar exposto em um supermercado. Esse tempo é chamado de *shelf* *life* ou tempo de prateleira e está relacionado à validade de um produto, que depende também de outros fatores.

É o caso de um trabalho feito com biscoitos. Um dos fatores para determinar o *shelf life* de biscoitos é a umidade retida pelo mesmo com o passar do tempo, pois compromete diretamente sua crocância, e é um dos fatores para determinar o tempo de prateleira. O trabalho sobre esse tema exposto a seguir foi elaborado por uma equipe de três alunos do Curso de Tecnologia de Alimentos. Trata-se de um exemplo de elaboração de um modelo matemático para expressar um fenômeno real: tempo de estocagem e umidade de um biscoito.

Situação

- A umidade de um determinado biscoito está relacionada ao tempo de estocagem. Nota-se que existe uma lei matemática que explica esse fenômeno, e é usado para determinar qual é a embalagem ideal para conservação de biscoito.



tempo x umidade

Esse exemplo, embora pareça simples, fornece subsídios para várias observações a respeito do fenômeno estudado, como por exemplo:

a) Comentamos que uma situação, no caso, a umidade de um biscoito, está relacionada ou depende do tempo de estocagem.

b) Que para fazer o estudo da relação é necessária uma coleta de dados, ou seja, verificar a umidade do biscoito em vários instantes.

c) Que estes dados coletados podem ser representados por pontos em um gráfico no qual a umidade depende do tempo de exposição do biscoito ao ar, sendo assim o eixo X representará tempo de exposição e o eixo Y representará a umidade.

d) Que o conhecimento desses pontos possibilitará encontrar uma lei matemática, ou seja, uma função que representará a situação.

e) Verificar se a variação da umidade a cada unidade de tempo é constante.

Enfim podemos explorar através do exemplo, a necessidade de conhecimentos para uma interpretação correta deste e de outros casos.

Não pretendemos, neste momento, que o aluno saiba fazer, interpretar e encontrar a sentença associada ao fenômeno exposto e sim que ele perceba a necessidade de conhecimentos para ser capaz de solucionar problemas de sua área de atuação.

O objetivo da apresentação de um exemplo de aplicação da Matemática é o de despertar o interesse do aluno em saber detalhes que o levará à resolução de um problema proposto, que inicialmente ele ainda não tem condições de apresentar a solução.

Na terceira etapa da Fase I são apresentadas as definições, propriedades importantes e exemplos significativos sobre o conceito de função. Para essa apresentação são utilizadas estratégias de exposição na lousa, são exploradas notas de aula, leitura de conteúdo de livros didáticos. Em geral, com as necessárias adaptações seguimos a orientação de um ou mais livros didáticos.

Análise da Fase I

No desenvolvimento da Fase I é possível detectar dificuldades na leitura de gráficos, na resolução de equações simples, nas regras de sinais e na formulação de expressões, dificuldades essas apontadas na atividade diagnóstica que realizamos com os calouros. Nossa atitude é de retorno a esses conteúdos a cada momento, principalmente porque consideramos que esses conhecimentos prévios são fundamentais para a implementação da Modelagem ou Aplicações como estratégias de ensino. As reflexões sobre nossa prática nos levam a um posicionamento de que a defasagem dos estudantes em conhecimentos básicos compromete a implementação de tais estratégias para o nível proposto. Portanto, é na Fase I que é exigido um empenho maior por parte do professor para que o aluno reveja conceitos e perceba que haverá aplicações que os envolverão.

Na Fase I também se pode detectar uma das inquietações dos alunos dos Cursos Superiores de Tecnologia em Alimentos: saber em quais situações determinado assunto de Matemática poderá ser usado ou aplicado.

A apresentação de trabalhos elaborados por outros alunos para compor os primeiros exemplos, traz algumas reações positivas: a primeira é que os autores se sentem gratificados tendo seu trabalho apresentado e a segunda é que os alunos novos se sentem incentivados pois consideram que também serão capazes de elaborar trabalhos semelhantes.

Neste momento vale destacar que a motivação para a passagem para a Fase II está fomentada. Esta pesquisa nos expôs de forma clara que o interesse do aluno pelo estudo traz frutos e que se ele passar pela disciplina pela simples obrigatoriedade de composição curricular, as relações que envolvem ensino e aprendizagem tornam- se difíceis de serem conduzidas.

1.2. Fase II

Na Fase II, quando se pretende a inserção do aluno no processo de elaboração de modelos bem como a utilização de aplicações, propomos que ele busque exemplos, preferencialmente em sua área de atividade. No caso exposto neste artigo, aqueles relacionados às funções. Os exemplos podem ser encontrados em artigos científicos, situações ocorridas em outras disciplinas, e até mesmo assuntos abordados sem livros direcionados à área. O aluno tem a opção de fazê-lo individualmente ou em grupo, e apresentar em forma de seminário.

O objetivo da Fase II é que os alunos entendam o teor do assunto escolhido por eles, que em muitos casos referem-se às pesquisas científicas desenvolvidas no campo de atuação específico do curso, e percebam qual a importância do uso de funções na situação abordada.

A realização deste trabalho transcorre em aproximadamente duas semanas, e além do tempo extra classe envolvido, as aulas do período são destinadas a essa tarefa que envolve a busca do exemplo solicitado e uma discussão em torno de detalhes do exemplo escolhido, tais como: pertinência do exemplo ao contexto, complexidade do assunto, tipos de funções envolvidas, e a intervenção ou não no texto escolhido, quer seja ele um artigo, um exemplo extraído de um livro ou mesmo de uma nota de aula de outra disciplina. Detalhando um pouco mais:

A pertinência do exemplo ao contexto é uma observação importante, pois o aluno está iniciando o curso e por isso fica difícil para ele distinguir se alguns exemplos são adequados ou não, e nesse momento muitos solicitam a opinião da professora, que então assume o papel de orientar se o assunto está relacionado ou não à sua área de interesse, e se algumas vezes é necessário acrescentar informações. O importante é destacar que a decisão final fica por conta do aluno.

A complexidade do assunto e os tipos de funções envolvidas são tratados de forma similar à situação anterior, ou seja, em alguns exemplos selecionados o aluno solicita a intervenção da orientadora para auxiliá-lo em sua interpretação ou ainda fornecer indicações sobre a relação à matemática envolvida. A interferência da professora sempre ocorre de modo a indicar mais pistas para que o aluno decida. E também a decisão fica por conta do aluno.

Quanto à intervenção no texto escolhido: em alguns casos, os alunos consideram interessante detalhar mais o exemplo escolhido. É interessante informar que essa opção especificamente não foi sugerida pela professora, no entanto há trabalhos em que o aluno toma essa decisão para que os colegas tenham maior facilidade em sua compreensão.

Com essa dinâmica, são realizados simultaneamente diversos trabalhos com assuntos, complexidade, e formas de tratamento diferentes o que dificulta estabelecer o limite entre Aplicação e Modelagem, principalmente nos casos em que há interferência do aluno no texto ou contexto do exemplo por ele escolhido.

Dentre os trabalhos apresentados na Fase II, selecionamos um deles elaborado por um grupo de dois alunos, que tiveram duas semanas para elaborar a pesquisa. A proposta, como já dissemos é que os alunos busquem exemplos, de modelos ou de aplicações.

Este grupo que destacamos decidiu apresentar ***Como calcular o número de gerações ocorridas em microorganismos.***

O descrito a seguir está na forma como os alunos apresentaram.

Cálculo do número de gerações ocorridas em microorganismos

A função apresentada abaixo relaciona o número de gerações que ocorrem em uma cultura de microorganismos, dependendo dos valores que representam a população inicial e final desses microorganismos.

Assim temos: $f(x) = 3{,}3\ (\log N - \log No\ )$ em que $f(x)$ representa o número de gerações; $\log N$ representa a população final e $\log No$ a população inicial.

Nosso questionamento é: *Como se concluiu que o número de gerações pode ser expresso por: $f(x) = 3{,}3\ (\ \log N - \log No\ )$? Ou seja: Como ocorreu o desenvolvimento da função que pode representar o fenômeno referido?*

A justificativa dada é que o crescimento de uma cultura de espécie de unicelulares pode ser caracterizado em termos quantitativos, e isto inclui o número de gerações desenvolvidas em um período de incubação, bem como o tempo de geração e a taxa de crescimento (n° de gerações por unidade de tempo).

Estes valores trazem algumas informações sobre a natureza das espécies microbianas, como por exemplo, a *Bradyhizobium japonicum*, uma bactéria fixadora de nitrogênio, que tem um crescimento lento comparado a outra bactéria de nome *Echerichia coli*, comumente utilizada em estudos genéticos e bioquímicos.

Os organismos de crescimento rápido são mais úteis em muitos tipos de pesquisas e aplicações industriais. É possível para os cientistas predizer e controlar crescimento de qualquer espécie microbiana unicelular. As células resultantes deste crescimento controlado podem ser utilizadas para estudos que são fundamentais, como por exemplo, a produção de vacinas.

A população total final (N) de uma cultura microbiana que começa com uma célula pode ser expressa por $N = 1 \times 2^{N}$, pois sua reprodução é por bipartição, ou seja, cada célula dá origem a outras duas, formando assim uma progressão exponencial.

No entanto, na realidade o número de bactérias inoculadas no tempo zero (No) não é um, mas muitos milhões, então a equação pode ser reformulada como:

$$N = No \times 2^{N}$$

A resolução dessa equação é facilitada com a aplicação dos logaritmos e suas propriedades. Assim temos:

$$\log N = \log No + N \log 2$$

O logaritmo na base 10 é utilizado porque os números do inóculo No, estão na magnitude de milhares que podem ser facilmente trocados por valores representados por potência de 10. Assim isolando-se o N da equação acima temos:

$$N = \frac{\log N - \log N_0}{\log 2}$$

Substituindo-se log 2 pelo seu valor 0,301, a equação anterior, poderá ser simplificada para: $N = \dfrac{\log N - \log N_0}{0{,}301}$ .Considerando que 1/0,301 = 3,3, chegamos à equação inicial:

$$N = 3{,}3\ (\log N\ -\ \log No\ )$$

Com essa equação é possível calcular o número de gerações que ocorreram em uma cultura, quando os números da população inicial e final forem conhecidos.

Exemplo:

Após a contagem de uma população em cultivo, obteve-se o valor de 1000 células. Depois de um determinado tempo, essa contagem foi novamente realizada obtendo-se o valor de 100.000.000 de células. Para encontrar o número de gerações (N), consideramos:

$$\mathbf{N = 3{,}3\ (\log N\ -\ \log No\ )}$$

$$N = 3{,}3\ (\log 100\,000\,000 - \log 1000)$$

$$N = 3{,}3(8-3) = 16{,}5 \text{ gerações.}$$

Observações

O tempo de geração designado por G (o tempo que leva para uma população dobrar de número) pode ser determinado pelo número de gerações (N) que ocorre em um intervalo de tempo (t). Assim: $G = \frac{t}{N}$

Exemplo:

Supondo que 16,5 gerações ocorreram em 5 horas. O tempo que essa população levou para dobrar de número é dado por:

G = 16,5/5 = 3,3 hs[1].

Bibliografia

BARUFFALDI, R. e OLIVEIRA, M. N. **Fundamentos de Tecnologia de Alimentos.** São Paulo: Editora Atheneu, 1998. Volume 3.

GAVA, ALTANIR JAIME. **Princípios de Tecnologia de Alimentos.** São Paulo: Editora Nobel, 1999.[2]

Comentário sobre esta atividade (feito pela professora/pesquisadora)

Uma das disciplinas que compõe a grade curricular do segundo semestre do curso de Tecnologia em Alimentos é Biologia, e nessa disciplina foi apresentada a função que relaciona o número de gerações que ocorrem em uma cultura de microorganismos, dependendo dos valores que representam a população inicial e final destes microorganismos, f(x) = 3,3 (log N – log No), contudo a professora de Biologia não entrou em detalhes quanto às informações para a obtenção dessa função que consideramos um modelo matemático responsável por encontrar o número de gerações de bactérias.

---

[1] Correção feita pela professora: h em lugar de hs.
[2] A bibliografia apresentada aqui faz parte do trabalho apresentado pelos alunos.

Este caso suscitou nos alunos a preocupação de desenvolver as etapas ocorridas para o desenvolvimento da "fórmula" apresentada, ou seja, os alunos interferiram no modelo apresentado. Os alunos apresentaram o desenvolvimento de como calcular o número de gerações ocorridas em microorganismos, buscando entender o processo que gerou a equação, ou o modelo para esse fenômeno. Trabalharam no sentido inverso, a partir do modelo buscaram entender o processo que o gerou e acrescentaram exemplo de aplicação. Eles também aproveitaram a oportunidade para esclarecer e entender melhor uma fórmula utilizada não especificamente na disciplina de Cálculo.

Este trabalho se insere dentre aqueles considerados difícil sua classificação como Aplicação ou Modelagem Matemática. Se pensarmos que temos um modelo pronto e vamos simplesmente calcular o número de gerações, podemos pensar como "Aplicação". Por exemplo, uma aplicação para os logaritmos é calcular o número de gerações de um microorganismo. Se pensarmos que o modelo ou a função inicial foi reconstituído passo a passo, para que se identificassem os procedimentos matemáticos envolvidos, podemos pensar em "Modelagem". Que matemática foi necessária para determinar o número de gerações de um microorganismo? De qualquer forma é um trabalho que foi desenvolvido na fase II, e que os alunos avançaram em seus procedimentos.

Esta ação de "avançar", "ir além" do solicitado, é considerada por nós como resultado positivo, que aos poucos liberta os alunos da reprodução simples de exercícios.

Durante a apresentação deste trabalho, a maioria dos alunos da classe (que não participou da elaboração do mesmo), teve dificuldade em entender todos os passos do desenvolvimento da fórmula, sendo necessárias algumas intervenções da professora. Vale destacar que este foi um momento propício para conhecermos uma atividade interdisciplinar e melhorar a visão de "ilhas" que as disciplinas proporcionam.

Avaliação da professora pesquisadora sobre a Fase II

O primeiro contato com os trabalhos na área específica do curso geralmente surpreende o aluno, na maioria das vezes alheio ao vínculo entre a Matemática e o seu setor de atuação. Dessa forma, consideramos, com a Fase II, iniciada a convivência do aluno com situações problema que envolvem o real as quais podem ser solucionadas com uso de recursos matemáticos. Essa é a fase que consideramos das Aplicações (o aluno verifica onde a Matemática aprendida foi aplicada). Estamos caminhando no sentido Matemática-Realidade. Neste momento, em geral os alunos se surpreendem ao constatar que o conteúdo matemático é realmente aplicado, e que há uma diversidade de situações em que isso ocorre. A discussão gera interpretações que apontam o papel da Matemática na constituição daquela situação apresentada e o potencial dessa Ciência para expressá-la.

Com a exposição dos trabalhos ficou evidenciada a tênue passagem das Aplicações para a Modelagem. Nesse sentido devemos considerar a delimitação do processo que compõe esta pesquisa em "Fases", somente teórico, justamente pelas características que as atividades elaboradas possam apresentar. Contudo esse não é o mérito da questão. O que realmente é satisfatório é o desenvolvimento do aluno em relação, não somente aos conteúdos que lhe traz melhores condições de compreender um modelo já desenvolvido, mas, sobretudo aos primeiros passos dados no encaminhamento do processo de Modelagem.

1.3. Fase III

Na Fase III ocorre a elaboração, pelos alunos, de modelos matemáticos na disciplina de Cálculo do curso de Tecnologia em Alimentos, no caso em estudo. Procedimentos semelhantes são adotados em outros cursos de tecnologia, diferindo apenas nos exemplos apresentados, que deverão contemplar os principais objetivos do curso. Evidentemente os trabalhos apresentados pelos alunos também favorecem esses objetivos.

Na Fase III seguimos, praticamente, todos os passos que compõem os procedimentos para o ensino usando a Modelagem Matemática.

Após a Fase II em que o aluno tem os primeiros contatos com modelos já executados, sendo em sua maioria pertinente a área de atuação do curso, outro trabalho é proposto, que poderá ser executado individualmente ou em grupo. O tema, ou o assunto do trabalho, ficará a critério do grupo. Sendo assim vários assuntos estarão sendo pesquisados e elaborados simultaneamente, pelos diversos grupos formados.

As várias pesquisas que afloram nesse momento são acompanhadas pela professora/pesquisadora, que direciona atenção especial a cada grupo de trabalho, orientando-os em sua execução. Se por ventura em algum trabalho em especial, houver necessidade de algum elemento de assunto não visto, o mesmo é abordado de forma a atender as necessidades presentes, de forma mais sintética.

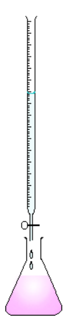
Os trabalhos são apresentados em forma de seminário, e discutidos os detalhes do assunto tratado e da Matemática envolvida. Finalmente, propõe-se a produção de um pôster de cada trabalho e esse material é exposto na semana da Tecnologia, evento que ocorre anualmente na Instituição. Em suma são esses os passos para a efetivação da Fase III.

A seguir, apresentamos um dos trabalhos desenvolvidos envolvendo a teoria estudada, que contou com a participação de dois alunos e o tempo estabelecido para esta fase foi de três semanas.

Efeito da Pressão Descontínua na Vazão da Água em Buretas de Vidro.

Este trabalho foi desenvolvido através de experimentos realizados em laboratório. Seu objetivo principal é verificar a questão da pressão descontínua que influencia diretamente na velocidade da vazão de líquidos em buretas[3]. Nosso propósito é coletar dados para e averiguar a possibilidade de identificar um Modelo Matemático para essa situação.

A figura abaixo mostra uma titulação sendo feita com a dispensa de líquido por uma bureta para dentro de um *erlenmeyer.*

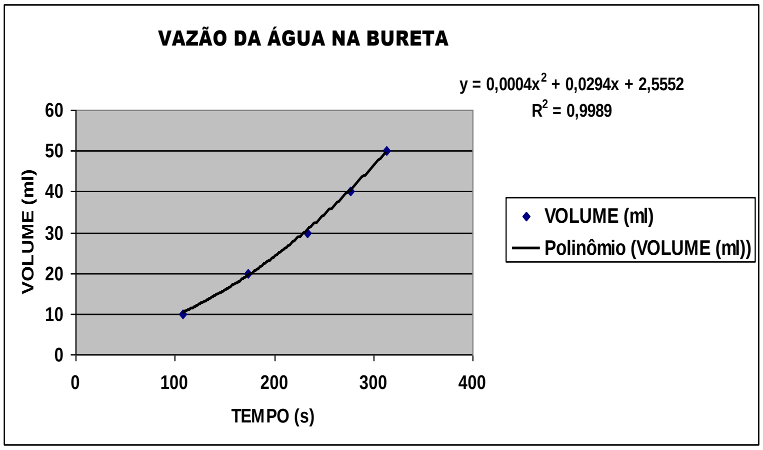


[3]A bureta é um instrumento laboratorial cilíndrico, de vidro colocado na vertical com a ajuda de um suporte, contendo uma escala graduada rigorosa. Possui na extremidade inferior uma torneira de precisão para dispensa de volumes rigorosamente conhecidos em tarefas como titulação de soluções.

Métodos

- As buretas foram preenchidas com água até a marcação de 50ml para que se começasse a coletar os dados necessários para o cálculo.
- Com o auxílio de cronômetros regulados coletamos os dados e organizamos em tabela.
- A partir dos dados tabelados, com o auxílio do excel procuramos o gráfico que melhor se adapta aos pontos obtidos por meio do experimento como também a equação algébrica.

Tempo(s)	volume(ml)
313,16	50
276,48	40
233,58	30
173,10	20
108,18	10



A equação algébrica encontrada foi: $\mathbf{V = 0{,}0004t^{2} + 0{,}0294t + 2{,}5552}$

O que pudemos notar com esta experiência:

- Comprovamos que quanto maior a pressão exercida neste sistema, mais rápida será a vazão do líquido contido no interior da bureta.
- Verificamos que a pressão descontínua influencia diretamente na velocidade de fluidez do líquido.
- É possível obter um Modelo Matemático que permite calcular a velocidade de um líquido em função do tempo, em condições específicas.

- O Modelo Matemático para o cálculo da pressão descontínua foi encontrada por Daniel Bernoulli (1700-1782) e esta equação descreve o comportamento de um fluido que se move ao longo de um tubo.

Equação de Bernoulli

- $P = Po + p. gh + ½ . p.v^2$
- P= pressão descontínua;
- Po = pressão (N/m^2)
- p = viscosidade;
- g = gravidade (m/s^2)
- v = velocidade do fluido ao longo do conduto
- h = altura (m)
- grau de viscosidade da água 1.10-6 m^2/s (valor adotado).

Conclusão

Através deste experimento realizado em laboratório, confirmamos as avaliações feitas por Bernoulli a respeito da influência da pressão descontínua na vazão de fluidos. Pudemos experimentar, mesmo que de forma amadora um processo para se obter um Modelo Matemático que generalize uma determinada situação.

Comentários sobre a atividade (formulados pela professora pesquisadora)

O uso de buretas em laboratórios é muito comum. Nesse trabalho os alunos elaboraram uma experiência para verificar a questão da pressão descontínua que influencia diretamente na velocidade da vazão de líquidos em buretas, com propósito de coletar dados e identificar a presença de um Modelo Matemático que expresse essa situação.

O texto elaborado pelos alunos deixa claro como foi feita a coleta de dados e informam que usaram o aplicativo Excel para a pesquisa do modelo. Os alunos não detalharam como foi o uso do Excel, talvez pela familiaridade com que passaram a ter com esse aplicativo após seu uso em outras situações. Para detalhar melhor o procedimento dos alunos em relação ao aplicativo acrescentarei outros detalhes.

Inicialmente os dados coletados são considerados pontos do plano, assim a informação 313,16 segundos e 50ml, é considerado um ponto de coordenadas (316,16 ; 50). Dessa forma têm-se o conjunto de pontos que consta na tabela.

O segundo passo é inserir esses dados em uma planilha do Excel e preparar um gráfico de dispersão. Para esse gráfico de dispersão escolhe-se uma linha de tendência, selecionando para que o programa forneça a equação da linha escolhida como também o (R^2)[4]. A análise do (R^2) é fundamental para considerar se a equação escolhida é adequada aos pontos plotados no gráfico.

A característica especial desse trabalho é a busca de um modelo que determine a vazão (volume) de água em função do tempo.

Identificamos no mesmo, todos os passos sugeridos para o trabalho com Modelagem Matemática, ou seja:

a) Ficou a critério do aluno a escolha da situação problema envolvida.

b) Foram coletados dados de uma situação real que foram submetidos à procedimentos matemáticos, gerando uma sentença matemática ou um modelo matemático.

c) Após a obtenção do modelo foram efetuados testes para averiguar a validade do modelo[5]

Embora tenham se inspirado em um outro modelo que trata das mesmas grandezas, os passos efetuados são os que caracterizam a Modelagem Matemática e que pode ser interpretado como uma forma de comprovação do modelo matemático apresentado como Equação de Bernoulli.

---

[4] R^2, chamado de coeficiente de determinação, é uma medida relativa de adequação do ajuste dos pontos obtidos experimentalmente ao modelo matemático encontrado.

[5] Embora não tenha sido explicitado no trabalho, durante a apresentação houve a indagação de como os alunos poderiam provar que o modelo estava correto. Como resposta, esclareceram que fizeram o teste com um valor intermediário, não usado na planilha. O resultado obtido experimentalmente foi compatível, ou seja, bem próximo ao resultado algébrico usando o modelo.

A apresentação desse trabalho trouxe várias discussões principalmente em relação às diferentes formas que podem ser utilizadas para matematizar uma situação real.

Considerações Finais

Apresentamos como resultado desta pesquisa a construção de uma abordagem por meio das Aplicações e Modelagem no ensino de Funções para um Curso Superior de Tecnologia em Alimentos, configurando-se seu pelo desenvolvimento de três fases que se entrelaçaram durante todo o curso.

A Fase I é a fase da apresentação do conteúdo pelo professor e comporta três etapas: da introdução histórica quando buscamos chamar a atenção do estudante para o fato de que a Matemática foi construída com idas e vindas, assim como ocorre quando estamos aprendendo essa ciência; da exploração de algumas aplicações de conteúdos a serem abordados, dando conta de certa forma ao questionamento “para que serve”; da institucionalização de conhecimentos quando são introduzidas as noções formais por meio das definições e propriedades.

A Fase II é a fase em que o estudante tem os primeiros contatos com fenômenos reais modelados pela Matemática ou como aplicações dela. Esses contatos ocorrem por meio de artigos científicos, livros didáticos ou situações ocorridas em outras disciplinas do curso.

A Fase III é a fase da elaboração de modelos para expressar um fenômeno do real (do fenômeno para a matemática) ou de efetivar aplicações da matemática (da matemática para o fenômeno). Nela o aluno investiga situações vinculadas a fenômenos específicos à área de estudo, vivencia os momentos de construção de modelos, ou de modo inverso escolhem um conteúdo e buscam aplicações desse conteúdo nos temas de Tecnologia de Alimentos, interferindo em fases de seu desenvolvimento.

Essa estratégia do trabalho, em fases, possibilitou a ultrapassagem de entraves como ementa pré-fixada, programa a cumprir num espaço de tempo curto, exigências de bom aproveitamento, entre outros, e possibilitou explorar a contento os conteúdos previstos. Isso porque, de um lado, a cada fase íamos dando conta também de contratos institucionais pré-estabelecidos, e assim contornando dificuldades inerentes aos mesmos. E por outro, o contato antecipado com trabalhos de modelagem e aplicações (Fase II) favoreceu o envolvimento dos estudantes na realização de suas próprias investigações quando ele se tornava o centro das atividades pedagógicas.

Os estudos do que consta na literatura sobre elaboração de modelos ou aplicações, ou as experiências vivenciadas pelos estudantes foram propícias para estabelecer entrosamento desejável com as disciplinas específicas do curso.

Retomemos alguns dados da pesquisa: os sujeitos eram alunos que iniciavam o estudo de Cálculo, e apresentavam dificuldades em conteúdos de matemática elementar. A instituição tinha exigências especiais no que se refere aos resultados dos alunos. O curso de Cálculo deveria ser desenvolvido de modo a atender às necessidades das outras disciplinas.

Nesse contexto encontrar uma estratégia de ensino que possibilitasse a atender às necessidades do curso era um grande desafio. As dificuldades de nossos alunos compunham um cenário mais geral, o que só agravava a situação. Esse cenário era expresso em estatísticas oficiais e em pesquisas[6], Cury (2005), Flemming e Luz (1999), Lopes (1999).

Feitas as adaptações e submetidas à prática para observação de resultados podemos considerar que, a estratégia apresentada neste artigo possibilitou resultados relevantes para a utilização da Modelagem e Aplicações no ensino do Cálculo em um curso em que a Matemática é ferramenta. Vejamos por exemplo uma situação indicada em Bassanezi (2004) de entrave para a aprendizagem do Cálculo. Bassanezi relata que na turma de 1983 do curso de Tecnologia em Alimentos da UNICAMP, muitos alunos usavam a camiseta-símbolo do curso com os dizeres: "Detesto Cálculo", traduzindo dessa forma o sentimento dos veteranos que não viam motivo satisfatório para estudar, durante três semestres seguidos, uma disciplina que consideravam inútil.

[6] Barufi (1999), taxa de reprovação na disciplina Cálculo para Funções de uma Variável Real do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo foi de 66,9%. Mometti (2007) de 1993 a 1998 na UNESP de Presidente Prudente – SP, os percentuais de reprovação estiveram entre 50% a 71%. Segundo o MEC, em 2000 o índice nacional de reprovação era de aproximadamente 80%.

O oposto ocorreu com os alunos do curso de Tecnologia em Alimentos que participaram desta pesquisa, embora não tenhamos registrado por escrito desse fato. Os alunos comentavam que passaram a “gostar de estudar Matemática” a partir do momento em que perceberam que poderia ser aplicada em situações do seu cotidiano profissional, e que por sua vez os exemplos e as pesquisas feitas ajudaram em seus desempenhos em reação a resolução de problemas, e a que as dificuldades com a própria matemática iam pouco a pouco se dissipando.

Os trabalhos executados pelos alunos comprovaram avanço considerável em relação aos seus conhecimentos matemáticos comparativamente às respostas dadas por eles às questões que compuseram o teste aplicado no início do curso, assim como a dificuldade de compreensão da temática exposta nas primeiras aulas.

O modo competente com que os alunos trataram de temas relevantes para o curso, com que usaram ferramentas matemáticas (funções, derivada e integral) para expressar fenômenos da área de tecnologia de alimentos, e com que enfrentaram a estratégia da elaboração de modelos e utilização de aplicações, observados nos trabalhos, são indicadores do sucesso na aplicação das estratégias.

Por fim o alto índice de aprovação na disciplina de Cálculo comprovada por documento fornecido pela Instituição, na qual o curso é em tempo integral gratuito com oferta de material didático, uniforme, alimentação e em alguns casos, ajuda financeira à família do aluno para que o mesmo possa dispor do tempo para estudar. Como contrapartida a Instituição há rigor em relação ao desempenho do aluno. Entre as normas está que se o aluno for retido em uma única disciplina, em qualquer fase do curso, ele é excluído, não havendo qualquer tipo de dependência ou possibilidade de uma nova matrícula. Ao lado disso havia ainda outros limitadores para a utilização de estratégias renovadoras, como interferência de pais e coordenadores, programa a cumprir, entre outros.

Os resultados obtidos nesta pesquisa nos permitem concluir que a estratégia que utilizamos traz bons resultados no que diz respeito à aprendizagem de conceitos matemáticos, ao desenvolvimento de atividades escolares com alunos motivados e à possibilidade de utilizar a Matemática como meio de estudar fenômenos. Trabalhamos com a elaboração de modelos, com as aplicações da Matemática, e ou com combinações das duas estratégias. Isso conforme a natureza do fenômeno a ser expresso ou conforme o conteúdo matemático a ser ensinado. Os estudantes sempre foram preparados para serem protagonistas das ações. O preparo envolveu tratamento de conceitos prévios matemáticos e de elaboração de modelos ou utilização de aplicações da matemática. A nosso ver esta pesquisa traz contribuições para a discussão do uso da Modelagem Matemática ou utilização de Aplicações da Matemática como estratégia de ensino do Cálculo.

Referências

BARBOSA, J.C. (2001). Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

BARBOSA, J.C. (2004). Modelagem Matemática em cursos para não-matemáticos. CURY, H. N. (Org.). Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos e propostas., EDIPUCRS, pp. 63-83, Porto Alegre.

BARUFI, M.C.B. (1999). A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BASSANEZI, R.C. (2004). Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática – uma nova estratégia. Contexto. São Paulo.

BELTRÃO, M.P. (2009). Ensino de cálculo pela modelagem matemática e aplicações: teoria e prática. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. (2005). Modelagem Matemática no Ensino. Contexto. São Paulo.

CURY, H.N. (2005). Aprendizagem em Cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. São Paulo.

FLEMMING, D.M.; LUZ, E.F. (1999). Tendências atuais no ensino das disciplinas da área de matemática nos cursos de engenharia. In: XXVII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Natal.

KLEIN, F. (1924-1928). Elementar Mathematik von höheren Standpunkt aus. Berlim. Trad.castelhana Roberto Araújo: Matemática elemental desde un punto de vista superior.

LOPES, A. (1999). Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. In: Sociedade Brasileira de Matemática. no.26/27, p.123-146, Rio de Janeiro.

MOMETTI, A. L. (2007). Reflexão sobre a Prática: Argumentos e metáforas no Discurso de um Grupo de Professores de Cálculo. Tese de Doutorado – PUC-SP.

NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. (2007). Introduction - BLUM, W. et al. (ed.) Modelling and Applications in Mathematics Education - the 14 th ICMI Study.: Springer, pp. 3-29. New York.

SILVEIRA, E. (2007). Modelagem Matemática em Educação Matemática no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná.