



UMA ANÁLISE ACERCA DA PRODUÇÃO DE CONJECTURAS E PROVAS MATEMÁTICAS DE ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Liana Krakecker¹
José Luiz Magalhães de Freitas²

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar considerações e perspectivas advindas de um trabalho, cujo objetivo consistiu em analisar a produção de conjecturas e provas de propriedades envolvendo ângulos de polígonos, por alunos do 8º ano do ensino fundamental. O percurso metodológico seguiu os princípios da Engenharia Didática e foi aplicada uma sequência de atividades em contraturno escolar e analisados dados dos alunos com maior frequência nos encontros. Observou-se que atividades experimentais e as diferentes formações das duplas, ao longo dos encontros, favoreceram a elaboração de conjecturas. Apesar da maioria das provas serem fundamentadas em manipulações ou experimentações com utilização do transferidor e evidenciarem dificuldades dos alunos no que concerne à escrita em linguagem matemática, foi possível constatar evoluções em relação à produção de argumentos de prova apresentados.

Palavras-chave: Conjecturas. Tipologia de Provas. Ângulos. Validação.

AN ANALYSIS ON THE PRODUCTION OF CONJECTURES AND MATHEMATICAL PROOF OF STUDENTS OF THE 8TH GRADE OF THE ELEMENTARY SCHOOL

Abstract

The objective of this article is to present considerations and perspectives from a study, whose objective was to analyze the production of conjectures and proofs of properties involving angles of polygons from students of the 8th Grade of the Elementary School. The methodological course followed the principles of Didactic Engineering and a sequence of activities was applied in contracting the study and analysis of the data of the students with more frequency in the meetings. We observed that experimental activities and different formations of the doubles throughout the meetings can favor the elaboration of conjectures. Although most of the proofs are based on manipulations or experimentation with the use of transferences and evidences difficulties with a written in mathematical language, we see evolutions in relation to the production of arguments of proof.

Keywords: Conjectures. Type of Proofs. Angles. Validation.

¹ Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS. Campo Grande, MS, Brasil. Email: lia.krake@gmail.com

² Doutor em Didática da Matemática. Professor do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS. Campo Grande, MS, Brasil. Email: joseluizufms2@gmail.com

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam que, desde os primeiros anos de escolaridade, devem ser exploradas metodologias que favoreçam a criação de estratégias, comprovação, justificativa, argumentação, espírito crítico, criatividade, trabalho coletivo, autonomia, dentre outros. (BRASIL, 1997). Uma das orientações contidas nesse documento, em relação aos anos finais do ensino fundamental, consiste no trabalho com investigações e a argumentação acerca da validade dos resultados e das conjecturas por meio da linguagem oral e das diversas representações matemáticas (BRASIL, 1998).

Ainda, conforme o nível de escolaridade aumenta, há a indicação para o trabalho com algumas provas de propriedades, pois é:

[...] desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, p. 1988 70-71)

Mesmo diante de tais orientações, nem sempre os alunos têm contato com provas matemáticas em sala de aula, como observamos em Oliveira (2009), Mello (2009), Piccelli (2010), entre outros. Estas pesquisas, cujos enfoques voltaram-se mais para a produção de provas e demonstrações evidenciam, por um lado, lacunas em relação às validações matemáticas e, por outro, mostram que com um trabalho orientado é possível que alunos de ensino fundamental apresentem provas de propriedades mais elaboradas no decorrer do tempo.

Neste contexto, desenvolvemos um trabalho no qual tínhamos o objetivo de analisar a produção de conjecturas e provas relativas a ângulos de polígonos que alunos de 8º ano de uma escola pública de Campo Grande – MS viessem a produzir. Consideramos conteúdos geométricos pela afinidade que tínhamos para com os mesmos, como também pelo favorecimento em relação às atividades manipulativas (dobrar, recortar, medir, entre outras) e para a elaboração de conjecturas.

Para finalizar, descrevemos aspectos teóricos em relação a conjecturas e provas de propriedades, bem como algumas das considerações e perspectivas que tivemos a partir de nossas análises.

Conjecturas e provas matemáticas

Assumimos que uma conjectura é uma proposição que ainda não foi provada e tampouco refutada podendo ser verdadeira ou falsa. É importante destacar que na organização dedutiva da matemática, quando a conjectura é verdadeira apenas para alguns casos ela é falsa, pois bastaria um contraexemplo para invalidá-la. Por outro lado, quando se consegue provar que ela é verdadeira ela também deixa de ser uma conjectura e, nesse caso, passa a ser chamada de teorema.

Quando se trata de alunos de ensino fundamental que ainda não conhecem a propriedade relativa à medida da soma dos ângulos internos do triângulo, por exemplo, a suposição de que ela resulta sempre 180° é uma conjectura até que venha a ser refutada ou provada, passando a adquirir status de proposição válida para essa comunidade.

Quanto à elaboração de conjecturas, “[...] é o processo de supor ou de perceber se uma afirmação é verdadeira, o que induz a necessidade de investigar a sua veracidade” (MASON et al. 1982, p. 71 *apud* MAGALHÃES; MARTINHO, 2014, p. 104). Esse processo pode envolver, por exemplo, a formulação da conjectura, a verificação de casos particulares por meio de diversos testes, a apresentação de motivos pelos quais se considera que ela é válida, a reformulação da conjectura, entre outros.

Existem diferentes maneiras pelas quais uma conjectura pode ser formulada, seja por meio da observação e/ou manipulação de dados, busca por regularidades, testes sucessivos, entre outros. No trabalho em sala de aula, nem sempre as conjecturas são explicitadas, pois elas podem ficar restritas ao pensamento do aluno (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003). Neste caso, discussões coletivas podem auxiliar o professor a compreender melhor a conjectura formulada e os motivos pelos quais se acredita que ela é válida. Por vezes, os próprios alunos concluem a falsidade de determinadas hipóteses levantadas mediante a exposição dos argumentos de colegas, como observamos em nosso trabalho maior (KRAKECKER, 2016).

Outra característica do grupo investigado e que, segundo Ponte (2003; 2006), é comum em alunos que possuem pouco contato com a elaboração de conjecturas, é a conclusão de que elas são verdadeiras após as terem testado apenas para alguns casos. Como destacamos anteriormente, nem todas as formulações são verdadeiras ou verdadeiras para todos os casos possíveis, por isso é importante o trabalho de validá-las tomando como base princípios matemáticos válidos. Nesse sentido, deixa-se de operar com a “lógica natural” utilizada espontaneamente pelos alunos, passando a considerar “a lógica formal” envolvida (ARSAC, 1982). Assim,

A introdução da ideia da prova matemática pode ser feita gradativamente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 38)

Nessa linha de pensamento, algumas provas simples, cujo raciocínio seja plausível podem ser consideradas pelo professor e pelo grupo de alunos. Balacheff (1988), por exemplo, apresenta um modelo de classificação hierárquica para as provas que contempla desde validações fundamentadas em exemplos ou casos particulares até as demonstrações. Então, quando um grupo de alunos aceita determinada proposição como sendo válida em determinado momento, surge a noção de prova. Neste caso, “a prova tem valor relativo, serve apenas para o grupo que a aceita, que se sentiu convencido pelo argumento” (SALES, 1996, p. 36) e, assim, uma explicação pode ter o status de prova para certo grupo, mas para outro, não (ARSAC, 1992).

Balacheff (1988) classifica as provas em dois níveis sendo o primeiro deles referente às provas pragmáticas as quais são apoiadas em ações realizadas em alguns exemplos singulares, sem que haja elementos voltados à generalização. Por isso, podemos dizer que são baseadas em manipulações e exemplos. Neste nível, Balacheff identificou dois tipos de prova, a saber, *empirismo ingênuo* e *experimento crucial*. Quando a afirmação é obtida com base na observação de casos particulares, como, por exemplo, quando se conclui que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° , a partir da manipulação de algumas poucas figuras, dizemos que o tipo de prova apresentada é do tipo *empirismo ingênuo*. Caso o aluno desconfie da validade da afirmação

com o teste apenas desses poucos resultados e decida testar conjectura em um triângulo atípico, por exemplo, com ângulos de medidas 10° , 120° e 70° , podemos inferir que ele apresentou o tipo de prova *experimento crucial*.

O segundo nível estabelecido pelo autor recebe o nome de provas intelectuais, nas quais as conclusões obtidas são fundamentadas em deduções, com base em propriedades válidas e neste nível já aparece a generalização. As provas são dos tipos *exemplo genérico* e *experimento mental*. O *exemplo genérico* ocorre quando o aluno escolhe um caso particular para ser o representante da sua classe de objetos. Seria este o tipo de prova caso os alunos utilizassem noções sobre retas paralelas e transversais e ângulos de meia volta para relacionar a congruência de ângulos no triângulo. Conforme a figura que segue, os ângulos de medidas p e r / q e t são congruentes. Então, $p+s+q = r+s+t = 180^\circ$.



Figura 1 - Exemplo do tipo de prova *exemplo genérico*
 Fonte: Os autores

E, por último, têm-se o *experimento mental*, em que a validação é baseada em uma proposição genérica. Para exemplificar este tipo de prova, podem-se citar as demonstrações formais, como quando se demonstra a partir de postulados e axiomas sem precisar se prender ao auxílio da figura. Quando ela é utilizada, serve apenas como suporte ao raciocínio, representando generalidade,

A principal diferença entre estes dois últimos tipos de prova consiste na generalização, que no primeiro caso é realizada raciocinando sobre um elemento particular. Já no *experimento mental*, mesmo diante de uma representação qualquer, está-se pensando para quaisquer elementos do grupo a que pertence essa representação. (KRAKECKER, 2016, p. 40, grifo do autor)

Na prática, a seguinte resposta dada a partir da figura 2 consiste em um tipo de prova *experimento mental*: dado um triângulo ABC, considere a reta r que passa pelo vértice C e paralela à reta determinada por A e B. O ponto C determina sobre r duas semirretas. Sejam X e Y dois pontos, um em cada uma destas semirretas. Temos: medidas

$\widehat{XCA} + \widehat{C} + \widehat{BCY} = 180^\circ$. Como a reta AC é transversal às paralelas r e AB, segue da proposição “duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal determinam ângulos correspondentes congruentes” (admitida como verdadeira) que $\widehat{XCA} \cong \widehat{A}$. Analogamente concluímos que $\widehat{BCY} \cong \widehat{B}$. Portanto, medidas $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{XCA} + \widehat{BCY} + \widehat{C} = 180^\circ$.

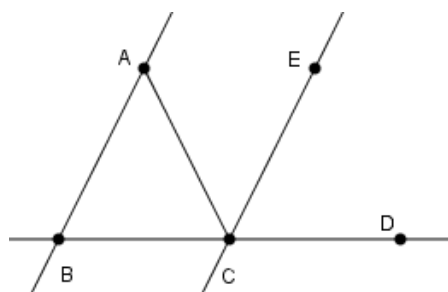


Figura 2 - Exemplo do tipo de prova *experimento mental*
Fonte: Os autores

Procedimentos metodológicos

Com relação aos procedimentos metodológicos, nosso trabalho teve como norte a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), que pressupõe quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Uma vez definido o tema com o qual trabalharíamos, ângulos de polígonos, passamos a realizar leituras acerca do mesmo, abrangendo também a geometria, seu ensino, o livro didático, a elaboração de conjecturas, a produção de provas, entre outras. Neste cenário, procuramos artigos, dissertações e teses cujo tema e objetivos se aproximassem daqueles que estávamos explorando. Dentre tais trabalhos, podemos citar Oliveira (2009), que analisou a evolução dos argumentos presentes nas validações em relação às construções geométricas em uma turma de alunos do 8º ano do Ensino fundamental; Mello (2009), que objetivou elaborar uma sequência didática com alunos de oitava série do Ensino Fundamental, considerando a demonstração; Piccelli (2010), que investigou a elaboração e a validação de conjecturas em geometria plana por alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Exploramos, também, documentos norteadores do Ensino Fundamental, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais e o que estes orientam no que se refere ao ensino da Geometria e à elaboração de conjecturas e provas. Uma coleção de livros didáticos

também foi objeto de estudo quanto à abordagem do conteúdo em questão, especificamente o tema ângulos de polígonos e respectivas provas de propriedades.

Esse primeiro trabalho foi retomado e aprofundado ao longo da investigação conforme sentíamos necessidade. Esta fase de análises preliminares subsidiou tanto a escolha das variáveis didáticas, quanto à elaboração das atividades com vistas à produção de conjecturas e provas de propriedades, realizado durante a segunda fase da Engenharia. Nela, além da elaboração da sequência de atividades, tentamos prever e descrever possíveis respostas, resoluções e comportamentos, tanto dos alunos como nossos, diante da implementação da proposta.

A fase da experimentação consiste no contato direto com os alunos e com os dados produzidos por eles diante das atividades propostas, bem como por meio de diálogos, registros e entrevista. Nesse momento, aplicamos nossas atividades com alunos de 8º ano de uma escola municipal de Campo Grande - MS em horário extraescolar. Foram desenvolvidas sete sessões com duração média de duas horas cada e, devido à participação voluntária, analisamos os dados produzidos pelos sete alunos de maior frequência nos encontros.

De acordo com a sondagem inicial que fizemos junto ao professor regente da turma, identificamos que, embora os alunos já tivessem tido algum contato com o tema em anos anteriores, este não ocorreu de modo aprofundado. Ademais, o conteúdo relativo a ângulos de polígonos reservado ao 8º ano ainda não havia sido abordado em sala. Por este motivo, nas primeiras sessões, tínhamos a intenção de identificar e, também, revisar conceitos e ideias fundamentais para o andamento da proposta, como, por exemplo, medir ângulos utilizando o transferidor e a soma das medidas de ângulos complementares.

A experimentação foi realizada pela primeira autora deste trabalho junto de um colega, ambos, membros do Grupo de Estudos em Didática da Matemática – DDMat³, dentro do qual a pesquisa estava inserida. Os conteúdos trabalhados nas sessões foram: ângulo raso, ângulo de uma volta, ângulos suplementares, ângulos complementares, retas paralelas e transversais, ângulos opostos pelo vértice (OPV), ângulos formados por retas paralelas e transversal, ângulos internos de triângulos, ângulos internos de polígonos quaisquer, ângulos externos de polígonos quaisquer.

³ <http://grupoddmат.pro.br/index.php/home/>

De posse dos dados produzidos pelos alunos, realizamos as análises *a posteriori* onde olhamos para a transcrição das falas, como também para os protocolos (produções escritas) num processo de análise, considerando o objetivo e os referenciais adotados. Esse movimento constituiu-se de idas e vindas entre as análises feitas logo após a experimentação e aquelas feitas anteriormente, numa tentativa de amarrar as duas em apenas uma.

Elementos de análise

Na primeira sessão, observamos que os alunos não possuíam muitos conhecimentos acerca de ângulos e suas propriedades e, por isso, foi necessário realizar uma explanação sobre o uso do transferidor e o modo como medir ângulos. As discussões ocorreram de forma tímida e os protocolos permaneceram praticamente em branco. Mesmo assim, por ser o primeiro encontro com a proposta de trabalho, consideramos que os resultados foram satisfatórios, já que, quando são propostas atividades que exigem justificativas que não são comuns na sala de aula, o registro escrito é um desafio a mais, porque exige um tipo de representação que geralmente não é utilizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

No segundo encontro, os alunos formularam a conjectura de que os ângulos OPV possuem medidas iguais e para validá-la, apoiaram-se em suas próprias construções, como podemos observar na resposta de Lisa⁴

⁴ Todos os nomes dos alunos utilizados neste trabalho são fictícios.

Pesquisadora: Será que sempre, quando tivermos dois segmentos concorrentes como dessa forma, os ângulos OPV terão mesma medida?

Ana: Não

Lisa: Sim! Olha o que eu fiz... Deu a mesma coisa! Olha aqui, **eu fiz um monte**, olha! Deu tudo a mesma coisa! Olha aqui o tamanho desses!

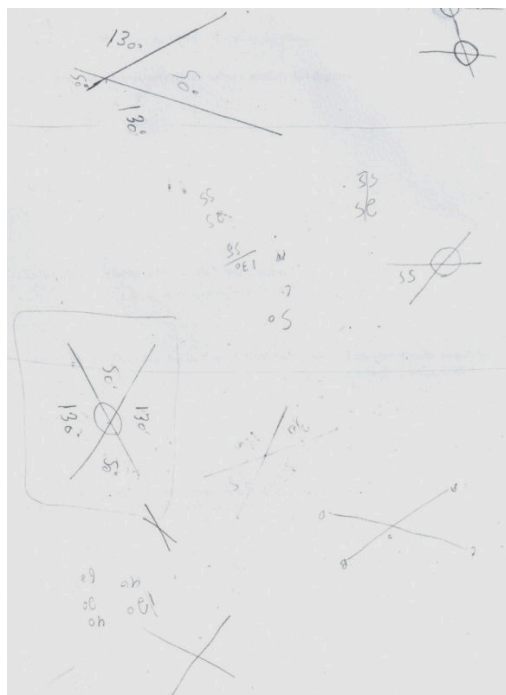


Figura 3 - Protocolo da aluna Lisa.
Fonte: Dados da pesquisa.

Classificamos a resposta de Lisa como sendo o tipo de prova *experimento crucial*, de nível pragmático, cuja conclusão é baseada em diversos exemplos, sobretudo em algum bem particular, como é possível observar nos desenhos do protocolo. É importante destacar que mesmo diante de poucas construções, o fato de Lisa ter dito “Olha aqui o tamanho desses!” significa que para ela aquele desenho cujo prolongamento das semirretas foi pequeno, ao qual estava se referindo, foi o caso não familiar, atípico e determinante na validação da conjectura.

Na terceira sessão, retomamos esse assunto, ângulos OPV, pois percebemos que nem todos os alunos sentiram-se convencidos pelo argumento de Lisa, o que significa que a validação da conjectura não adquiriu status de prova para o grupo de alunos. A partir deste dia, ao final de cada sessão, passamos a realizar uma prova de cada propriedade que estava sendo abordada com o intuito de mostrar aos alunos outras possibilidades de justificações, além daquelas que vinham sendo apresentadas (de nível pragmático). Esse momento era de discussão, pois os alunos participavam ativamente da construção da prova. Sobre isso, Boavida et al. inferem que

Nem sempre os alunos conseguem provar as conjecturas formuladas, nem sequer acompanhar uma prova apresentada pelo professor. Este facto não constitui um

factor negativo, pois a actividade de formulação de conjecturas tem, em si mesmo, valor educativo. Além disso, este facto pode proporcionar boas oportunidades para os alunos começarem a compreender a natureza do trabalho em Matemática onde a formulação de conjecturas e a sua prova, frequentemente, não ocorrem em simultâneo. (BOAVIDA et al., 2008, p. 89)

Nem sempre é fácil fazer com que os alunos compreendam a necessidade de justificação de conjecturas, sobretudo quando estas parecem ser verdadeiras e resistem a vários testes. Contudo, esse é um trabalho que se faz necessário.

No quarto encontro, trabalhamos com ângulos formados por retas paralelas e transversais, assim como atividades de aplicação e reinvestimento de noções que até então foram abordadas. A quinta sessão foi dividida em dois momentos. No primeiro deles distribuimos diversos triângulos com tamanhos e formas diferentes e solicitamos aos alunos que medissem seus ângulos internos. A conjectura pretendida foi elaborada, como percebemos no diálogo entre Wendy e Peter

Wendy: Quanto deu a soma aqui?

Peter: 180° eu acho...

Wendy: Olha deu 180° de novo!

Algum tempo depois...

Wendy: Deu 180° de novo!

Peter: Não está dando todos 180° não!

Wendy: Está dando todos 180° !

Peter: Você já mediu quantos?

Wendy: Quatro!

Peter: Eu estou no terceiro ainda!

Algum tempo depois...

Wendy: Nossa está dando todos 180° ! Eu acho que vai dar todos 180° ...

Peter afirma que nem todas as somas feitas estão resultando em 180° e observamos em sua folha de anotações que seus resultados, para a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos, foram 163° (um caso), 182° (três casos) e 184° (dois casos). Nas anotações de Wendy, por outro lado, todas as somas resultam em 180° . E aqui, não é possível concluir se ele arredondou as medidas dos ângulos ou se, percebendo para um ou dois casos a recorrência desse valor, modelou os demais. Depois de um processo de experimentação no qual Wendy mediu os ângulos internos de vários triângulos e somou as medidas encontradas, ela diz achar que “vai dar todos 180° ”. Esse é um caso em que há a conjectura implícita de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Em seguida, naquele momento de exploração, pedimos aos alunos que pintassem e recortassem os ângulos internos dos triângulos e os juntassem em torno de um único vértice. Wendy logo se pronuncia,

Wendy: Ahhh! Não falei que iria dar 180° ! Deu a metade, olha... 180° aqui mais 180° vai dar 360° !

As provas produzidas permaneceram no nível pragmático, pois os alunos apoiaram-se na atividade experimental que foi realizada. Vemos, assim como no trabalho de Mello (1999), que quase todos os estudantes que fizeram esta mesma atividade, lembram e a utilizam para justificar a medida da soma dos ângulos internos de triângulos, mesmo passado algum tempo. Desta forma, consideramos que estas atividades são importantes para que o aluno se sinta ativo e faça parte do seu processo de aprendizagem e para que possa estabelecer associações entre diferentes noções matemáticas. Entretanto, elas devem compor o caminho para se chegar à formalidade que a matemática exige.

Na sessão posterior, os alunos realizaram atividades de aplicação e reinvestimento de noções que havíamos trabalhado até o momento. Além disso, propusemos questões relativas à soma dos ângulos internos de quadriláteros, a fim de que conjecturas e provas a esse respeito fossem elaboradas. Peter apresentou a seguinte resposta:

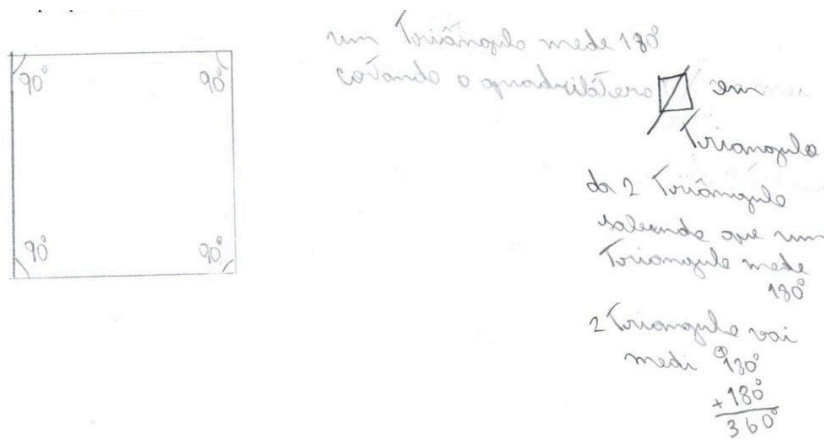


Figura 4 - Protocolo do aluno Peter
Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno dividiu o quadrilátero em triângulos e organizou seu discurso dedutivo. Destacamos que mesmo que Peter tenha sido influenciado pela atividade experimental realizada (juntar os ângulos do quadrilátero convexo em torno de um único vértice), ele apresenta uma sequência lógica de afirmações a partir da representação de um polígono de quatro lados. Nesse sentido, classificamos a prova apresentada como sendo *exemplo genérico*. Essa classificação seria outra, caso Peter respondesse algo do tipo “é 360° , por

que quando recortamos e juntamos os dois triângulos, vimos que deu dois triângulos”. Para Balacheff (1987), quando se trata de uma evolução referente às provas, em específico das provas pragmáticas para as intelectuais, o processo é marcado não só por uma evolução da natureza do conhecimento, mas também por uma evolução das características linguísticas, como vem demonstrando Peter.

Outro elemento que nos fez atribuir a referida classificação à prova realizada, foi a presença de duas representações do quadrado em seu protocolo. Numa delas, aspectos como o traço exato, a utilização da régua e a igualdade de certas medidas foram consideradas por Peter importantes para “constatar” a veracidade da conjectura. Na segunda (Figura 4), não há preocupação alguma em obedecer a tais regras, de modo que o estatuto passa a ser outro. Arsac (1982) sublinha que, pouco a pouco, o aluno deverá evoluir, assim como o estatuto da figura em geometria. Isso é difícil de ser explicado ou definido precisamente, mas se deixará de medir ou constatar com réguas ou transferidores para raciocinar ou ainda deduzir a partir da figura. Ademais, acreditamos que a justificativa apresentada por Peter pode ter sido influenciada pela nossa opção em discutir provas de propriedades trabalhadas a cada sessão, mostrando que é possível de se atingir níveis de provas intelectuais.

No último encontro, tínhamos a intenção de formular conjecturas acerca da soma das medidas dos ângulos externos de triângulos a partir da manipulação de exemplos produzidos pelos próprios alunos. Isso foi observado, por exemplo, no diálogo entre Mary e Wendy:

Wendy: 330°...

Mary: 365°... Não vai dar... Tem mais que 335°

Wendy: O meu deu 330°...

[...]

Mary: 40° aqui. Dá 120°...

Wendy: Por que aqui deu 120°?

Mary: 380°... Deu 365°, Wendy...

Wendy: O meu deu 360°...

Mary: Por que aqui deu... E aqui deu 360°? Por que o quadrado...

Wendy: Dentro... Dentro tem que dar 180° [referindo-se aos ângulos internos do triângulo]

Aqui deu 180° certo?

Mary: Mas tem que medir o de fora...

Wendy: Verdade...

Inicialmente, as alunas não distinguem ângulos internos e externos, mas ao longo da discussão este aspecto é resolvido entre as próprias alunas, evidenciando a autonomia já adquirida. Além disso, há a exploração das medidas dos ângulos das figuras e, por meio disso, a formulação da conjectura. A justificativa escrita de Mary e Wendy foi classificada como *empirismo ingênuo*, pois elas escreveram que a resposta solicitada fora 360°, pois

havia medido com o transferidor. Este foi um aspecto que se mostrou evidente em quase todas as sessões, já que os alunos justificavam com respostas escritas como se estivessem a nos contar o motivo pelo qual acreditavam que suas respostas estavam corretas. As alunas ainda não produziram argumentos escritos de provas intelectuais, como foi o caso de Peter e James (que neste dia trabalharam juntos).

Considerações e perspectivas

Acreditamos que a produção de conjecturas, assim como havia nos sinalizado Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), ocorre de diversas maneiras e em diferentes situações. Em nosso caso, a manipulação do transferidor foi fundamental para que os alunos elaborassem suas conjecturas, assim como as atividades experimentais nas quais foi preciso desenhar, medir, recortar, manipular, entre outros procedimentos. Destacamos que o trabalho em duplas também foi de grande valia, uma vez que possibilitou debates acerca das resoluções e das próprias atividades. Como a participação dos alunos foi voluntária, nem sempre tínhamos os mesmos alunos a cada encontro e, por isso, a composição das duplas quase nunca era a mesma. Vimos que este aspecto possibilitou que eles trabalhassem com parceiros diferentes, discutissem coisas diferentes e aprendessem coisas também diferentes.

Em relação à validação de conjecturas, conseguimos identificar algumas provas, sendo a maioria situada no nível das provas pragmáticas, em que as conclusões foram fundamentadas em exemplos particulares, manipulações, dentre outros, sem haver elementos relacionados à generalização. No processo de validação, destacamos a escrita em linguagem matemática, uma vez que os alunos, de modo geral, escreviam nos protocolos como se estivessem nos contando como ou porque acreditavam que sua resposta estivesse correta.

Nesse contexto, Balacheff (1987) destaca que quando se trabalha com uma geometria baseada na observação, a natureza do conhecimento do qual o aluno dispõe não lhe permite satisfazer as exigências de uma demonstração de modo imediato e que, independentemente da negociação de um novo contrato didático, não se trata de uma simples passagem das provas pragmáticas até a demonstração. Esta é constituída por uma sucessão de construções sobre o terreno do conhecimento e da racionalidade e que, portanto, requer certo tempo. Acreditamos que um trabalho prolongado com os alunos

poderia levá-los a atingir níveis mais elevados de prova, pois as ferramentas para isso aos poucos iam passando a fazer parte do repertório deles, como foi possível observar tanto nos diálogos quanto nos protocolos.

É importante dizer que para outros temas, diferentes daquele com o qual trabalhamos, um intenso trabalho também precisará ser desenvolvido pelo professor ou pelo pesquisador, pois para a produção de conjecturas, e principalmente para a produção de provas de propriedades, é preciso que haja a utilização de algumas noções anteriormente trabalhadas. Aos poucos, os alunos passam a entrar nesse “novo jogo” e a procurar elementos de validação para suas conjecturas, afinal, nos primeiros encontros, como os alunos poderiam apresentar provas do tipo *experimento mental*, por exemplo, se não as conheciam? Como poderiam justificar suas respostas se não o fazem sempre?

Destacamos que em meio a esta proposta, as atividades ou sessões cuja intenção consistiu em reinvestir noções anteriormente trabalhadas, foram importantes para que os alunos colocassem em prática o “conhecimento teórico”, podendo estabelecer relações de aplicação, mesmo que dentro da lógica interna da matemática. Para nós, foram oportunidades de observar a (não) mobilização das noções que estavam em jogo em prol da realização da tarefa.

Em meio a um percurso muito distante da linearidade que a organização desta ou de qualquer outra produção possa sugerir, surgiram-nos inquietações as quais não foram possíveis de serem exploradas. Então, como seria desenvolver um trabalho que abarcasse conjecturas falsas⁵ e que, a partir delas, se discutisse a necessidade da prova matemática? Em que medida a manipulação de *softwares* educacionais teria contribuído para a elaboração de conjecturas? Como é discutida, na formação de professores, a produção de conjecturas e provas de propriedades?

Por último, como estão Lisa, Peter, Mary, Wendy, Miguel, João e James, alunos cujas produções foram analisadas para que chegássemos a tais considerações? O que eles teriam a nos dizer? O que eles nos diriam sobre o tema com o qual trabalhamos? Enfim...

Referências

⁵ Aqui, não se trata da elaboração de conjecturas falsas, mas da exploração das mesmas, independente de terem sido ou não formuladas pelos alunos.

ARSAC, G. et al. **Initiation au raisonnement déductif au collège**. Lion-França: Presses Universitaires de Lion, 1992.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996.

BALACHEFF, N. Processus de prouve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, nº18, 1987, p.147-176.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve em Mathématique chez lês élèves de collège**. 1988. Tese (Doutorado)- Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

BOAVIDA, A. M. et.al. **A experiência matemática no Ensino Básico**. Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 5ª a 8ª Séries**. Brasília, 1998.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: 1ª a 4ª séries**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

KRAKECKER, L. **Produção de Conjecturas e Provas de propriedades de ângulos de polígonos: um estudo com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental**. 2016, 150f. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, 2016.

MAGALHÃES, M. da G.; MARTINHO, M. H. O desenvolvimento da argumentação matemática no estudo das funções racionais. **Quadrante**, v. XXIII, nº 1, 2014.

MELLO, E. G. S. **Uma sequência didática para a introdução do seu aprendizado no ensino da geometria**. 1999, 189f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Pontifícia Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

OLIVEIRA, S. G. da S. **Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis de triângulo**. 2009, Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, 2009.

PICCELLI, P. H. **Processos de validação de conjecturas em geometria plana**. 2010, 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

PONTE, J.P; BROCARD, J. OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SALES, A. **O ensino de matemática no 1º grau: um estudo sobre o significado do conhecimento geométrico para alunos da 8ª série**. 1996. Dissertação (Mestrado em educação)- Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 1996.

ROCHA, A., PONTE, J. P. Aprender Matemática investigando. **Zetetiké**, v.14, n. 26, p. 29-54, 2006.