

y su relación con el conocimiento profesional del profesor de matemáticas han desarrollado el grupo de investigación MESCUD (Grupo Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital) y los programas de formación docente a cargo de profesores de este mismo grupo y de algunos profesores que hacen parte del grupo de Práctica Docente. También se analiza un caso de transformación de prácticas docentes de EPPs en el curso de Educación Matemática dirigido por la profesora Neila Sánchez,

en donde se pretende mirar la relación entre teoría y práctica de la Educación Matemática visualizado en él, cambio conceptual y metodológico, como la ampliación de los marcos conceptuales sobre el conocimiento práctico y el razonamiento pedagógico. Se analiza entonces la relación entre la componente estática y dinámica del Conocimiento Didáctico del Contenido revisando la perspectiva de Blanco (1995), Llinares (1996) y otros.

## Utilización de tecnología informática para la enseñanza de las matemáticas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

GILBERTO OBANDO ZAPATA\*

8

MEMORIAS CUARTO ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

### Resumen

En la actualidad, el desarrollo de los ambientes informáticos ha logrado altos grados de desarrollo, hasta el punto en que pueden realizar tareas que eran de desarrollo exclusivo de la mente humana, como por ejemplo, el procesamiento de la información. Este desarrollo propone a los entornos educativos un gran reto consistente en la necesidad de incorporar de manera creativa estos adelantos tecnológicos a los desarrollos curriculares de las diferentes áreas. En particular, en el área de matemáticas, la utilización de herramientas computacionales ha introducido grandes debates que permiten replantear de manera radical los procesos de enseñanza de esta disciplina, desde los niveles de la educación básica hasta la educación superior. Pero el advenimiento de dichos medios para la enseñanza de las matemáticas, debe motivar análisis en términos del sentido y posibilidades que éstos ofrecen. Este artículo aborda algunos elementos en la vía de conceptualizar la manera como la utilización de medios informáticos en la enseñanza de las matemáticas puede ser un elemento altamente dinamizador de la actividad matemática del alumno, y por ende, en el desarrollo de su autonomía intelectual.

\* Profesor Universidad de Antioquia

### Introducción

Shaffer y Kapput (1999), plantean que los ambientes brindados por las nuevas tecnologías informáticas, están generando una nueva revolución cognitiva (tal como sucedió con el desarrollo del lenguaje o de la escritura), en tanto que éstos brindan a la mente humana, no solo una forma externa para el almacenamiento de la información, sino que también, la proveen de recursos externos para el procesamiento autónomo de la misma, y para el almacenamiento de los algoritmos con que se procesa. Por ejemplo, los cálculos algebraicos que antes eran ejecutados por las personas a través del lápiz y papel, pueden ahora ser realizados por medio de un programa de computador. En este caso el programa no solo procesa la información, sino que él, en sí mismo, está almacenando los algoritmos necesarios para procesarla.

Para la enseñanza de las matemáticas (y en general para el trabajo escolar), esta externalización de los procesos algorítmicos trae importantes consecuencias de orden curricular: nuevas formas de representación, nuevas aproximaciones pedagógicas, nuevos objetos de estudio, y una matemática virtual. Todo esto se manifiesta en ambientes dinámicos para el hacer matemático en el aula (como el Cabri Goemetre, el cual genera una geometría virtual), o en la posibilidad de que los alumnos tengan aproximaciones concretas a problemas muy abstractos (como por ejemplo un ambiente gráfico para acceder a la noción de límite), o incluso en la posibilidad de plantearse problemas que por sus niveles de dificultad solo podrían ser estudiados en grados superiores (por ejemplo problemas de máxi-

mos y mínimos para estudiantes de la educación básica). En síntesis, los computadores permiten generar una especie de realidad virtual para las matemáticas, un dominio de abstracción en el que los estudiantes puedan expresar la generalidad, y un contexto acerca de las matemáticas y de las relaciones de las matemáticas con cualquier otro dominio que sea de interés para los alumnos (Moreno, en prensa).

La escuela, no puede continuar de espaldas a esta realidad, y debe emprender procesos que permitan la implementación de estrategias pedagógicas, unidas a procesos de investigación, que tomen como un eje central la incorporación de tecnologías informáticas en las clases de matemáticas y ciencias.

Por supuesto, como se plantea en el documento del Ministerio de Educación Nacional Titulado, Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas:

*no se trata de relegar su utilización a un lugar secundario, casi invisible, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, o incluso ver en estas una ilusión romántica en la que se proponen estas tecnologías como la panacea para la solución de todos los problemas de aprendizaje de los alumnos. ...*

*La implementación de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias debe ante todo consultar las posibilidades que ofrecen estas herramientas, de tal forma que no se relegarse el uso de estas nuevas herramientas a un segundo plano, pues de entrada se está limitando su potencialidad, ni tampoco se sobrevaloren las dimensiones de los aportes que pueden dar, pues se estarían dejando de lado otros procesos de conceptualización igualmente importantes. No se trata de una informática para la enseñanza, sino de integrar la informática a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Lo fundamental está en ver en que tipo de situaciones (proyectos, problemas) el computador o la calculadora son una herramienta importante para su solución. ...*

Así, no tiene sentido la utilización de estas herramientas tecnológicas cuando el conjunto de actividades puede ser realizada tan eficientemente (o quizás con más eficiencia) por otros medios. Por ejemplo tienen razón las personas que alegan en contra de las calculadoras cuando estas son usadas para realizar cálculos elementales de manera automática; pero pueden ganar mucho sentido cuando estas son usadas para la solución de un problema significativo, así se utilice para realizar cálculos elementales. De esta manera el poder de las nuevas tecnologías no reside tan solo en utilizarlas en las aulas de clase, sino en la búsqueda de la integración de estas al currículum escolar. Así pues, el

uso de las calculadoras gráficas y de computadores en el aula de matemáticas no debe ser un fin en sí mismo sino un medio para lograr un mejoramiento tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas.

## **Aprendizaje de las matemáticas y sistemas de representación**

Una característica fundamental del conocimiento en cualquier disciplina es que este es situado, es decir, su sentido y significado dependen del contexto dentro del cual ha tenido su origen. Por ejemplo, Cuando el profesor dibuja un triángulo rectángulo él ve en su dibujo un representante de una clase conceptual (la clase de todos los triángulos rectángulos), pero para el alumno este dibujo “es el triángulo”, y por lo tanto, cuando se le dibuja otro triángulo rectángulo en una posición distinta puede no identificar en dicho dibujo un triángulo rectángulo. Esto es, el alumno no logra distinguir aquellas características que le son particulares de la construcción gráfica que se le ha presentado inicialmente, de las propiedades generales que caracterizan un triángulo rectángulo, y por lo tanto, al no diferenciarlas (las particulares de las generales) en la nueva construcción, no puede identificar el nuevo triángulo como triángulo rectángulo. Investigaciones recientes, como la realizada por, Schwarz y Hershkowitz (1999) muestran como el conocimiento de los alumnos permanece unido a estos contextos iniciales, los cuales llaman contextos prototípicos, y además, muestran la necesidad de reconocer cuales son esos contextos prototípicos a propósito de un determinado concepto, para poder entrar a diseñar situaciones que problematicen las hipótesis que los alumnos se han formulado sobre la base de esos contextos.

Esto implica que para que un estudiante puede utilizar un conocimiento aprendido en otros contextos, es necesario que el profesor proponga múltiples situaciones problema, en variados contextos, con la finalidad de lograr que el alumno pueda identificar los invariantes comunes a todas las situaciones, los cuales son los elementos constitutivos del conocimiento que se le desea enseñar, y entonces, pueda entrar a diferenciarlos de los elementos particulares de cada situación. La identificación de estos invariantes permite la construcción de esquemas generales de pensamiento. En este sentido, generalizar es algo más complejo que ir de particu-

lar a lo general. La abstracción implica la utilización de los recursos estructurales del medio, para producir versiones más refinadas del conocimiento, es decir, más generales en el sentido clásico.

Este proceso hacia una versión más abstracta del conocimiento no solo implica coordinar situaciones en diferentes contextos, sino también, a propósito de una misma situación articular distintos registros de representación (o como Duval, 1993, los llama, registros de representación semiótica), a través del tratamiento<sup>1</sup> y la traducción<sup>2</sup>. Así por ejemplo, una misma situación puede ser representada a través de un gráfico cartesiano, una ecuación, una función, una tabla de valores, o un programa de computador, entre otros, y una comprensión completa de la situación implica la articulación de estos distintos registros de representación, en tanto que cada uno aporta información distinta sobre la situación y por ende sobre el concepto que se quiere enseñar. Es más, como el mismo Duval lo plantea, no hay comprensión de un concepto matemático si no se tiene la posibilidad de conocer al menos dos sistemas de representación distinta y se está en la capacidad de coordinarlos de manera casi inconsciente.

En este sentido, los procesos de enseñanza tradicional son muy limitados al no ofrecer una experiencia amplia en las posibilidades de tratamiento y traducción de los diversos sistemas de representación, entre otras razones por el carácter estático de los medios utilizados (el tablero, proyector de acetatos, cartelera, etc.), o de la muy baja interactividad (videos, televisión, etc.). Así, aunque se presenten diferentes situaciones para un mismo concepto, y diversas formas de representación para el tratamiento de las situaciones (aritméticas, algebraicas, gráficas, etc), estas permanecen con un alto grado de separación entre unas y otras.

## La mediación tecnológica en el proceso de aprendizaje

Los sistemas de representación externos juegan un papel fundamental en el desarrollo de procesos de aprendizaje, en tanto que gracias a ellos podemos no solo representar, objetivar, los conceptos matemáticos, sino que gracias a ellos podemos realizar el procesamiento de la información de la for-

ma como la realizamos. Los siguientes tres ejemplos dan prueba de ello: (i) los desarrollos en aritmética de los Romanos fueron muy escasos, y eso se debió en gran medida, a que utilizaron un sistema de numeración con grandes limitaciones para la representación de los procesos algorítmicos; (ii) el surgimiento del álgebra no solo brindó grandes posibilidades de desarrollo al cuerpo teórico matemático construido hasta el momento, sino que también instauró una nueva forma de comprender las matemáticas; y (iii) los algoritmos de las cuatro operaciones básicas son así, por que el sistema de numeración decimal con que representamos los números así lo permite.

En síntesis, los sistemas de representación externos por medio de los cuales pensamos, construimos, transmitimos las matemáticas (desde el nivel básico hasta el de investigación), hacen algo más que “representar”, también moldean, dan forma, dan sentido a la matemática misma. Dicho de otra forma, una representación externa de un concepto, es en si misma, parte del concepto. Esta realidad también es aplicable a los ambientes informáticos. La posibilidad de tener software que realiza procesos que antes eran uso exclusivo de la mente humana (como por ejemplo, las demostraciones), ha hecho surgir una polémica a nivel mundial: ¿hasta dónde los ambientes informáticos terminarán transformando la naturaleza misma del conocimiento matemático?

Desde el punto de vista curricular los enunciados de los párrafos anteriores son de gran importancia, ya que como se dijo anteriormente, el aprendizaje de un concepto no se agota en la definición, sino que implica el conocimiento, el tratamiento, la interrelación entre diferentes sistemas de representación, y todo esto, en relación con diferentes situaciones problema. Los ambientes informáticos son mediadores importantes para lograr esta complejidad, fundamentalmente, por la posibilidad que ofrecen de maximizar procesos exploración, sistematización, validación, y generalización, en el marco de situaciones problemas.

En este contexto, las situaciones problema no son entendidas como el campo de aplicaciones del concepto, sino como el escenario a través del cual toma sentido la construcción conceptual.

*Una situación problema la podemos entender como un espacio para generar y movilizar procesos de pensamiento que permitan la construcción sistemática de conceptos matemáticos. Así, deben permitir la acción,*

<sup>1</sup> Por tratamiento de un registro se entiende un proceso de transformación en otra forma equivalente pero dentro del mismo sistema de representación.

<sup>2</sup> Por traducción de un registro se entiende un proceso de transformación de un registro en otro registro de un sistema de representación diferente.

*la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, auto-evaluación, hetero-evaluación. A través de las situaciones problemas se deben generar condiciones para que los estudiantes desplieguen su actividad (cognitiva-matemática), y por ende, se sumerjan en procesos constructivos del conocimiento (Múnera, Obando, en prensa).*

Ahora bien, ¿pero en qué medida los ambientes informáticos potencian los elementos anteriormente descritos?. A continuación se brindarán algunos elementos que responden este interrogante.

### **Exploración - Sistematización: búsqueda y reconocimiento de invariantes estructurales**

En un ambiente de geometría dinámica (como por ejemplo el R y C<sup>3</sup>, o el Cabri Geometre), al realizar una construcción geométrica, se tiene algo más que un dibujo: al arrastrar por la pantalla los elementos primarios de la construcción, se conservan las propiedades estructurales de la misma. Esto implica que en realidad lo que se obtiene en la pantalla es algo más que un dibujo: es una familia completa de objetos. Dicho de otro modo, la pantalla nos muestra un objeto que es variable en un rango posible de valores, y a través de la variación del objeto se pueden identificar, en medio del cambio, los elementos estructurales que caracterizan toda la familia, y que por ende, son el eje conceptual de lo que se quiere que los alumnos aprendan. Así pues, el ambiente dinámico logra la construcción de un contexto en el que un dibujo (un caso particular) es entendido como el representante de una clase general de objetos (del dibujo a objeto geométrico como tal). Esta es una de las grandes diferencias con la geometría del lápiz y papel: lo que se plasma en el papel no puede ser transformado (o por lo menos no tan fácilmente), y por lo tanto, no se pueden diferenciar los elementos particulares que corresponden al dibujo, y de los elementos generales que corresponde al objeto geométrico como tal.

Igual tipo de reflexión se puede proponer para otros tipos de software, como por ejemplo, los software de cálculo simbólico (como el derive), o de modelación simulación como el Math World<sup>4</sup>, o el Modellus<sup>5</sup>. La condición fundamental es que se puede general un contexto dinámico de interacción entre los alumnos y la máquina a través del cual se pueda generar un proceso de exploración y de sistematización de lo explorado, que conduzca finalmente el reconocimiento de las relaciones estructurales conceptuales.

Esta exploración sistematización se hace más rica en tanto se puedan coordinar diferentes sistemas de representación a través del cual analizar la situación problema propuesta. Por ejemplo, por medio del Modellus, y a través de la modelación y simulación de situaciones problema de la física, se puede realizar un estudio de la función lineal analizando, integrando, transformando, interpretando, traduciendo, diferentes sistemas de representación. Aquí el papel de la situación problema es fundamental, tal como se dijo antes, no para aplicar conceptos relativos a la función lineal, sino como contexto a través del cual se integran y se significan las diferentes representaciones en juego.

### **Confrontación, debate y validación: camino a la autonomía intelectual**

Como se dijo antes, la situación problema debe permitir al estudiante desplegar su actividad matemática a través del desarrollo explícito de una dialéctica entre la exploración y la sistematización. Esto implica que la situación problema debe tener, como parte de los elementos que la constituyen, dispositivos que permitan a los alumnos de manera autónoma la formulación de hipótesis, su validación, y si es del caso, su reformulación, para finalmente, llegar a una conclusión. Esto es, las situaciones problema deben permitir un camino que recree (en el aula) la actividad científica del matemático, en el ejercicio de la autonomía intelectual del estudiante.

*El trabajo intelectual del alumno debe por momentos ser comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles solución. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigirá que él actúe, formule, observe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etc.. (Brousseau, 1993, p 4 y 5).*

<sup>3</sup> Software de libre distribución que se obtiene a través de internet en la dirección: [http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/index\\_en.html](http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/index_en.html)

<sup>4</sup> Software de libre distribución que se obtiene a través de internet en la dirección <http://www.simcalc.umassd.edu/NewWebsite/simcalcframe.html>

<sup>5</sup> Software de libre distribución que se obtiene a través de internet en la dirección <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>

Se presentan por tanto dos elementos importantes en los dos párrafos anteriores: la formulación de hipótesis, su confrontación y debate a través de la argumentación, etc., como puntos fundamentales para el desarrollo de la actividad matemática del alumno, pero a la vez, la validación como proceso de evaluación que da vida y dinámica al trabajo autónomo e intelectual del alumno.

A este respecto la enseñanza tradicional ha mostrado grandes dificultades. Si bien es cierto que se desarrollan estrategias de trabajo que pueden favorecer el debate, la confrontación, la concertación, presenta debilidades en lo relativo a la validación, pues esta generalmente se realiza a través de criterios de autoridad: quien valida lo realizado es la palabra del maestro, o la palabra del texto. Por el contrario, con la ayuda de ambientes informáticos se pueden diseñar contextos en los cuales, además de favorecer procesos de formulación, confrontación, discusión, etc., de hipótesis, el proceso mismo del trabajo pone ante los estudiantes herramientas de validación del trabajo realizado, y por tanto, al ser internas al desarrollo mismo de la situación, se constituyen en puntos nodales para el avance conceptual de los estudiantes.

La validación, cuando es desarrollada desde esta perspectiva, se constituye en verdadera evaluación del trabajo, y por tanto, cumple el papel de confrontar el saber del estudiante, y movilizarlo hacia nuevos puntos de equilibrio en ese saber. Cuando la validación es realizada a partir de elementos externos, no logra un verdadero nivel de confrontación del trabajo del estudiante, y por tanto, este no toma conciencia del estado de conceptualización alcanzado (prueba de ello es que los estudiantes cuando presentan un examen o trabajo, generalmente se asumen como si fuera algo que se hace para el profesor y por el profesor, y la calificación obtenida no logra confrontar su saber, sino que se inculpa al profesor de ella, sobre si todo si la nota no es buena).

## Conclusiones

Si bien es cierto que sobre las posibilidades de utilización de herramientas informáticas, tales como calculadoras o computadores, como medios para la enseñanza de las matemáticas se han tejido una gran cantidad de creencias y concepciones, también lo es que hoy por hoy se hace necesaria una revisión juiciosa y detallada de las posibilidades reales de estas herramientas tecnológicas para el desarrollo de pro-

cesos de aprendizaje más significativos y acordes con las exigencias del mundo moderno.

Los desarrollos que se han logrado en los últimos años, tanto a nivel de hardware como del software hacen que la capacidad de integración aplicaciones sea muy grande, y por ende, aumenten las posibilidades de almacenamiento y procesamiento de la información. Este hecho es fundamental para el desarrollo de estructuras curriculares nuevas que permitan mejores niveles de integración de las disciplinas escolares, y que además, permita mejores posibilidades de comprensión de los conceptos matemáticos.

Las facilidades para la simulación y la modelación de fenómenos de diferente naturaleza, a través del tratamiento de la información por medio de diversas formas de representación, configuran nuevas fuentes de sentido y significado para los conceptos matemáticos. Estos sentidos y significados no solo provienen de la posibilidad de relacionar las matemáticas con otras disciplinas científicas o humanísticas, sino, por la posibilidad de recrear de forma dinámica e interactiva los conceptos matemáticos mismos.

Todos estos elementos hacen que el papel de los medios informáticos en la educación no puede seguir pasando desapercibido, así como tampoco puede ser sobre valorado. Se trata pues de encontrar el punto de equilibrio a través del cual potenciar al máximo los procesos de aprendizaje de los alumnos, a partir de conjugar los medios tradicionales, con los nuevos ambientes informatizados.

## Referencias bibliográficas

- BROUSSEAU, Guy. Fundamentos y Método de la Didáctica de las Matemáticas. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1993. Traducido de Fondaments et methodes de la didactique des mathematiques. Recherches en didactique des mathematiques. Vol 7. No 2. 1986. Pgs 33-115.
- DUVAL, Raimond. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes, 1995. Traducción al español de Myran Vega Restrepo. 1999.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1999, p 81.
- SCHWARZ, Baruch; HERSHKWITZ, Rina. Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computers tools. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 30, No 4, p 362-389. 1999.
- SHAFFER, Davis W. ; KAPUT, James. Mathematics and virtual culture: an evolutionary perspective on technology and mathematics education. Educational studies in mathematics. Vol 37 p 97-119. 1999.