



## ERROS E OBSTÁCULOS NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE DERIVADAS: UMA ANÁLISE NA PERSPECTIVA DOCENTE/DISCENTE

Celso Eduardo Brito<sup>1</sup>  
Tamires Rigoti Nunes<sup>2</sup>

### Resumo

Neste texto, é exposta uma abordagem da análise de erros, atrelada à noção de classificação dos obstáculos na perspectiva de Brousseau (1976), e como esta metodologia foi inserida como proposta de ensino e de aprendizagem. O objetivo é investigar e analisar os erros e obstáculos dos discentes, bem como suas próprias análises desses erros, em uma turma de ingressos no Curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia – *Campus Eunápolis*, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Aderindo a uma perspectiva quanti-qualitativa construtivista, com base nas análises das produções escritas dos discentes, a partir de uma categorização predeterminada, foi possível verificar as dificuldades que os discentes encontravam para adquirir a aprendizagem de derivadas. São abordados também os resultados positivos que esta metodologia de ensino, aprendizado e avaliação proporcionam ao estudante.

**Palavras-chave:** Obstáculos. Análise de Erros. Aprendizagem. Derivadas.

### ERRORS AND OBSTACLES IN THE PROCESS OF LEARNING DERIVATIVES: AN ANALYSIS OF THE TEACHER/STUDENT PERSPECTIVE

### Abstract

This paper presents an approach of the analysis of errors, linked to the notion of classification of obstacles in Brousseau's view (1983), and how that methodology was used as a teaching and learning proposal. The objective is to investigate and analyze the errors and obstacles of the students, as well as their analysis of those errors, in a class of first semester of undergraduate students from the Civil Engineering Course at Federal Institution of Education Science and Technology of Bahia - *Campus Eunápolis*, in the subject of Differential and Integral Calculus 1. The research has used the qualitative-quantitative constructivist perspective, based on the analyzes of the students written productions from a predetermined categorization in which was possible to verify the difficulties that the students have had to learn derivatives. This paper also addresses positive results that such methodology of teaching, learning and evaluation provides to the student.

**Keywords:** Obstacles. Error Analysis. Learning. Derivatives.

<sup>1</sup> Mestre em Matemática; Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia / IFBA, Eunápolis, Bahia, Brasil, *e-mail*: celso\_ufba@yahoo.com.br.

<sup>2</sup> Graduada em Licenciatura em Matemática; Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia / IFBA, Eunápolis, Bahia, Brasil, *e-mail*: tamiresrigoti@gmail.com.

## **Introdução**

A análise de erros pode ser abordada como metodologia de ensino, desde que empregada em sala de aula com o objetivo de explorar o erro e utilizá-lo como instrumento de aprendizagem, por meio do qual o aluno adquire a oportunidade de questionar suas resoluções e o professor de autoanalisar a eficácia de sua prática docente e identificar as dificuldades dos discentes. O erro não pode ser apenas considerado como a falta de conhecimento ou inaptidão do aluno, mas, sim, como um conhecimento que ele possui e que foi mal constituído em algum momento, que era válido para certos problemas, mas que não se mostra eficaz para outros. Superar um erro é uma tarefa que necessita de intervenções didáticas, que levem o aluno a questionar suas resoluções, verificando que não são mais adequadas e que precisam de mudanças.

A partir da observação e da experiência do professor de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, vinculada ao curso de Engenharia Civil, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA, na cidade de Eunápolis, e da verificação das dificuldades dos alunos em relação a essa disciplina, foi proposta como intervenção a metodologia da análise de erros, aliada a um novo mecanismo de avaliação, tanto para os discentes quanto para o docente.

Com o intuito de compreender melhor sobre erros e dificuldades no processo de aprendizagem, foi realizado um levantamento teórico com estudos e pesquisas, tendo como principais autores Cury (2007), D'Amore (2007), Bachelard (1938) e Brousseau (1976).

Além disso, é discorrido, com detalhes, todo o processo de investigação, categorização e avaliação dos erros e obstáculos dos discentes, no estudo do objeto matemático derivadas, enriquecido com depoimentos das entrevistas e com resultados quanti-qualitativos referentes à pesquisa.

## **Erros e obstáculos**

Na perspectiva da metodologia tradicional de ensino da Matemática, o erro é encarado como algo a ser eliminado, pois decorre da falta de prática. “Trata-se aqui de um processo de “evitação” desencadeada pelo professor, que não busca corrigir a raiz do erro, mas sim mostrar ao aluno a maneira certa” (ALMOULOU, 2007, p. 130).

Diante disto, a análise de erros e obstáculos surge como uma tendência em Educação Matemática que analisa as produções dos alunos, em que o erro deixa de ser visto como algo negativo, mas torna-se um construtor do conhecimento, como afirma Cury:

A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também enfocada como metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula, como “trampolim para a aprendizagem” (BORASI, 1985), partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas, para construir o próprio conhecimento. (CURY, 2007, p. 13)

Durante o processo de ensino e de aprendizagem, é pertinente que conceitos provisórios sejam formados pelo indivíduo, contudo, posteriormente, tais conceitos irão resistir às mudanças quando este mesmo indivíduo se sujeitar a aprendizagem de um conceito que o supere, e esta resistência é apresentada como obstáculo. Diversas pesquisas no campo da Didática da Matemática se apoiam na noção de obstáculo desenvolvida por Bachelard (1938), assim como Brousseau (1976), que elaborou uma classificação dos obstáculos que tem significativa importância para metodologia de pesquisa e ensino da análise de erros.

Na perspectiva de Brousseau (1976), o erro é a manifestação explícita de um grupo de concepções que o próprio aluno desenvolve e que, ao ser incorporado a uma gama de representações cognitivas, manifesta-se em forma de obstáculo, impedindo a obtenção de novos conceitos. Dessa forma, é necessário superar os obstáculos, mas o erro será colocado como um mediador para a superação desses obstáculos que o provocou. Pois, para Brousseau:

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso [...], mas o efeito de um conhecimento anterior que, por um tempo, era interessante e conduzia ao sucesso, mas agora se mostra falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros desse tipo não são erráticos e imprevisíveis, mas se constituem em obstáculos. Tanto na ação do mestre como na do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido. (BROUSSEAU, 1976, p. 104, tradução livre)

Para superar os obstáculos, faz-se necessário a elaboração de situações didáticas que promovam a superação das concepções inadequadas criadas pelos alunos. Por meio dessas situações, serão reveladas espontaneamente tais concepções inadequadas, e o docente irá analisar a origem do obstáculo referente ao conceito em questão, visto que, cada conhecimento está predisposto a tornar-se um obstáculo na aquisição de novos conhecimentos. Em relação à superação de um obstáculo, Brousseau afirma que:

organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e fazer evoluir o aluno, segundo uma dialética conveniente. Não se trata de comunicar as informações que se quer ensinar, mas em encontrar uma situação em que somente elas satisfaçam ou atinjam a obtenção de um resultado satisfatório - [...] – no qual o aluno se investiu. (BROUSSEAU, 1976, p. 109, tradução livre)

Brousseau (1976) classificou os obstáculos em quatro tipos, sendo eles obstáculos epistemológicos, psicológicos, ontogenéticos e didáticos. Os obstáculos epistemológicos são identificados no processo de desenvolvimento histórico dos conhecimentos. Os obstáculos psicológicos reagem de acordo com a evolução individual de cada um e os obstáculos ontogenéticos são caracterizados pelas limitações neurofisiológicas (dentre outras) que o sujeito adquire durante o seu desenvolvimento.

Todo professor, em seu planejamento didático, escolhe uma metodologia que ele acredita ser a mais adequada e eficaz para a turma que estiver trabalhando. No entanto, uma metodologia pode atingir cada aluno de maneira distinta e inesperada. Com isso, o método proposto torna-se um obstáculo didático para aqueles alunos que não se adequaram a ele.

### **Aspectos metodológicos**

Este trabalho foi desenvolvido por meio da observação e análise das produções de vinte e sete alunos da turma 2016.1 do curso de Engenharia Civil, no componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral I, do IFBA *campus* Eunápolis.

A primeira etapa desta pesquisa consolidou-se com estudos teóricos sobre erros e obstáculos e conceitos importantes que se referem ao aprendizado do aluno. Posteriormente, foram feitas observações das aulas, nas quais o professor abordava o objeto matemático derivadas; especificamente: reta tangente e reta normal, derivada de uma função no ponto, derivadas sucessivas, regra da cadeia, derivada de função na forma paramétrica e implícita e regras de derivação. As observações tinham duração de sessenta minutos.

Durante algumas aulas, havia momentos para a aplicação de atividades avaliativas parciais que ocorriam semanalmente, abrangendo o conteúdo estudado até aquele momento, com duração média de cinquenta minutos. Estas atividades tinham o objetivo de avaliar gradativamente o aluno, mas também de o impulsionar a estudar o conteúdo proposto, para que, assim, ele pudesse perceber as suas dificuldades quanto ao seu aprendizado, bem como suas carências relacionadas a conteúdos prévios, e também, para realizar uma análise pessoal de seus erros. Além das avaliações parciais, ocorreu à aplicação de uma atividade avaliativa final e nesta houve uma abordagem geral de todo conteúdo, visto gradativamente durante o processo no estudo de derivadas.

Após as atividades avaliativas, o professor através de um grupo, em uma rede social, disponibilizava o gabarito, juntamente com as resoluções dos alunos digitalizadas, para que

eles pudessem analisar e categorizar os seus erros. Foram totalizadas cinco análises das avaliações e uma análise estatística, todas feitas individualmente. A análise estatística consistia em quantificar, de forma geral, sob o olhar do discente, cada tipo de erro cometido por ele em todas as avaliações (parciais e final) e elaborar um gráfico de barras verticais para expor os resultados, como mostra a Figura 1, além de dar um parecer qualitativo em relação a seu avanço no aprendizado da disciplina.

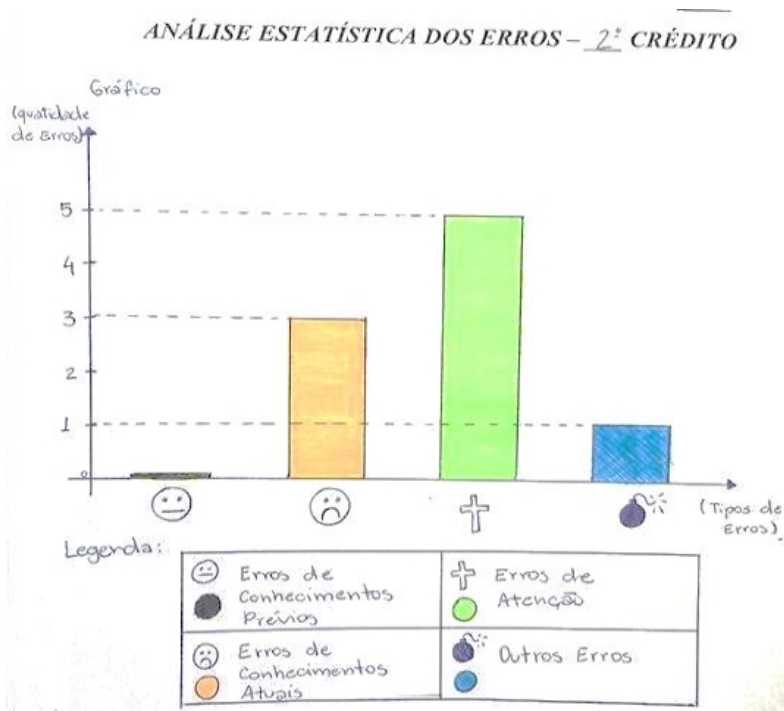


Figura 1 – Análise estatística dos erros do aluno A  
Fonte: análises escritas dos discentes de Cálculo I

Para realizar as análises de seus próprios erros, os alunos baseavam-se em uma categorização pré-definida, associada a um símbolo, indicada pelo docente para marcação na cópia da resolução das atividades avaliativas pelo discente, e que consistia em classificar os erros relativos a conhecimentos prévios, conhecimentos atuais, atenção e outros erros.

Para conhecer um pouco mais sobre cada discente e coletar alguns dados, foi elaborado um questionário com oito questões, impresso e entregue para cada um deles, bem como realizadas entrevistas com perguntas pré-elaboradas, pensadas de acordo com o que foi observado nas aulas, nas análises de erros e nas respostas ao questionário. Esses instrumentos visavam investigar as possíveis causas que impulsionavam os erros cometidos pelos alunos durante as atividades e a perspectiva deles diante da nova metodologia utilizada para o ensino

do Cálculo Diferencial e Integral I, na instituição, no que se refere especificamente ao estudo de derivadas.

## Resultados e discussões

Antecedendo as análises das produções escritas dos alunos, recolhemos informações relevantes sobre eles por meio do questionário, como, por exemplo, o tipo de escolas que frequentaram no ensino básico; dado que está ilustrado no gráfico da Figura 2, indicando que a maior parcela de alunos é oriunda da rede pública de educação básica.

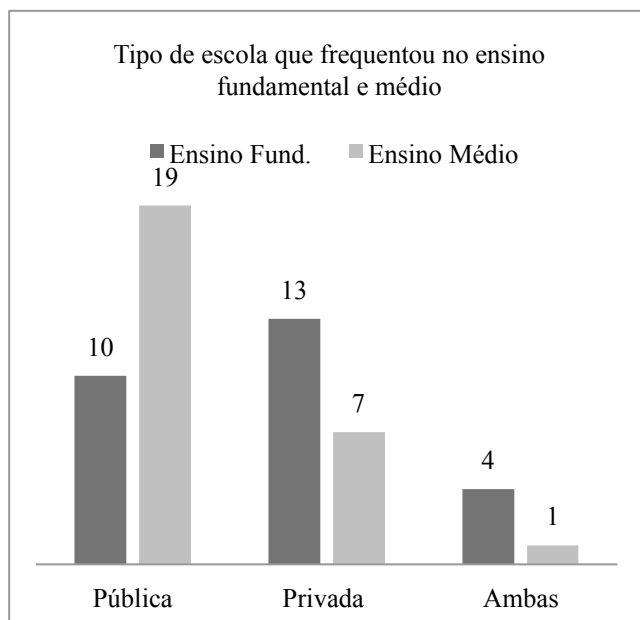


Figura 2 – Gráfico com resultados da questão 1 e 2  
Fonte: elaborado pelos autores.

A partir da leitura das análises realizadas pelos próprios alunos, foi possível verificar alguns erros que se enquadram nos tipos de obstáculos classificados por Brousseau (1976). A falta de atenção foi classificada por uma grande parte dos alunos, somente um deles não classificou seus erros nessa categoria. Aqui é notável um obstáculo psicológico, em que o estudante sente-se desestabilizado com a situação que está sendo encarada, neste caso, a avaliação escrita. Houve a ocorrência de muitos erros com os cálculos, no que diz respeito a esquecimento de etapas na resolução, o tempo da prova, o famoso “branco”, ansiedade, etc.

O aluno F, por exemplo, cometeu vários erros por falta de atenção, na primeira questão da avaliação parcial 7, em que são solicitadas as coordenadas do ponto P de abscissa

negativa. Ao resolver, ele não se atentou a este fato e tomou a abscissa positiva, consequentemente, errou a questão (Figura 3).

$(1) \quad y = x^3 - 2x + 1$   
 $y' = 3x^2 - 2$   
 $tg \theta = 1$       Reta Tangente  
 $1 = 3x^2 - 2$       Reta Normal  
 $3 = 3x^2$   
 $x^2 = \frac{3}{3} = 1$   
 $x = 1$       +

Figura 3 – Resolução do aluno F  
 Fonte: Análises escritas dos discentes de Cálculo I.

Através do questionário, foi realizada a seguinte pergunta: No momento de avaliação escrita, você sente sinais de pressão psicológica? (Ex.: suor excessivo, corpo trêmulo, esquecimento, irregularidades intestinais, roer unhas, etc.). O resultado foi impactante, pois, dos vinte e sete alunos que responderam ao questionário, 77,8% disseram que sofrem pressão psicológica. Vejamos, a seguir, as respostas dos alunos B e C (Figura 4).

$(8^{\circ})$  Sim, as vezes irregulares intestinais (depende do tamanho do nervosismo) e muitas vezes fico com o corpo trêmulo.  
 $(8^{\circ})$  Sim. Principalmente corpo trêmulo e irregularidades intestinais, muitas vezes tenho ânsia de vômito. É um problema que passou desde o ensino fundamental, ocorre tanto em avaliações escritas quanto orais.

Figura 4 – Respostas dos alunos B e C à questão 8  
 Fonte - Análises escritas dos discentes de Cálculo I.

Nas resoluções das avaliações, verificaram-se, também, muitos erros relacionados a conhecimentos prévios, ou seja, aqueles conteúdos que deveriam ter sido estudados no Ensino Fundamental e Médio e que são necessários para o novo saber, como, por exemplo, a álgebra

ou a construção de gráficos e o estudo de funções. A resolução do aluno D (Figura 5), na primeira questão *item a*, ocorre de forma errada em relação à simplificação da expressão algébrica na eliminação do fator  $x + 1$ , por estar presente tanto no numerador quanto no denominador.

The image shows a student's handwritten work for a derivative problem. The expression is  $f'(x) = 5 \left( \frac{x \cdot \sin x}{x+1} \right)^4$ . The student has written the derivative of the inner function as  $(1 \cdot \sin x + x \cos x) \cdot (x+1) - x \cdot 1 \cdot 1$  over  $(x+1)^2$ . A red circle highlights this fraction, indicating that the student incorrectly cancelled the  $(x+1)$  terms in the numerator and denominator.

Figura 5 – Resolução do aluno D  
 Fonte: Resoluções das avaliações aplicadas na disciplina de cálculo I.

Contudo, esta prática é incorreta quando se trata de uma adição ou subtração, e é muito comum entre os alunos. Isto decorre, em grande parte, devido à maneira que o professor utiliza este artifício durante aulas em seu contrato didático e simplesmente “corta” fatores iguais em uma fração e o aluno não absorve o conceito corretamente, de que não apenas simplificou ou “cortou”, mas que houve ali uma operação de divisão. Este tipo de erro decorre da metodologia e da didática assumida pelo professor que, para Brousseau (1976), são erros classificados como obstáculos didáticos. Do total de alunos que responderam ao questionário, 59,3% disseram que se sentiram prejudicados com a metodologia empregada por algum professor de Matemática no ensino básico.

A leitura correta do enunciado das questões tem fundamental importância para que a resolução seja bem desenvolvida. Diante disso, muitos alunos relataram que não conseguiram desenvolver uma determinada questão por não saber interpretar o enunciado ou por não ter abstraído o procedimento matemático necessário para resolvê-la. Pode-se perceber, então, o quanto a linguagem matemática é necessária para uma boa interpretação, leitura e escrita, em favorecimento do bom desenvolvimento matemático e esta é obtida pelo discente principalmente, através do professor, nas aulas de Matemática e na leitura de livros didáticos, por exemplo.

Para resolver algumas questões solicitadas nas avaliações era necessário que o aluno compreendesse bem a estrutura da fórmula para definição de derivada, dada por:  $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , que indicava o cálculo do limite do quociente entre uma função  $f$ , menos o resultado obtido nesta função após a substituição do ponto de abscissa  $x_0$ , e a diferença  $x$



menos o  $x_0$ , quando o  $x$  tende a  $x_0$ . Contudo, notamos que alguns alunos não tinham abstraído esse conceito da maneira correta.

A resolução da aluna N demonstra essa fragilidade, quanto ao que diz respeito a não apropriação correta da definição, para o cálculo da derivada. Ou seja, ela substitui o valor da abscissa do ponto,  $x_0 = 0$  no lugar de  $f(x_0)$ , ao invés de considerar o valor da função nesse ponto, conforme Figura 6.

Figura 6 – Resolução da aluna N  
 Fonte: resoluções das avaliações aplicadas na disciplina de cálculo I.

É comum identificar erros no desenvolvimento da derivada em uma função potência, na qual o aluno equivoca-se calculando a derivada da função e elevando o resultado obtido à potência  $n$ , visto que deveria aplicar a derivada da função potência, ou seja,  $y' = n \cdot x^{n-1}$ , nesse momento, levando em consideração a regra da cadeia, como é possível observar na resolução da aluna Z (Figura 7).

Figura 7 – Resolução da aluna Z  
 Fonte: Resoluções das avaliações aplicadas na disciplina de cálculo I.

Alguns erros são decorrentes da falsa generalização de alguns métodos de derivação, por exemplo, o aluno compreende bem que para obter a derivada de  $f + g$  basta fazer  $f' + g'$ , e generaliza esta regra para a derivada do produto de funções, calculando erroneamente  $f' \cdot g'$ , contrariando a maneira correta que seria  $f' \cdot g + f \cdot g'$ . Os alunos A e W cometem este tipo de erro, como podemos observar na resolução da dupla na questão três na avaliação parcial oito (Figura 8).

Questão 03 →

$$y' = \frac{(\frac{1}{x})^1}{1 + (\frac{1}{x})^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^1}{\sqrt{1 - (\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \frac{(1-2x)^1}{1-2x \ln 10}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{\frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-1+x^2}} \cdot \frac{-2}{1-2x \ln 10}$$

$$y' = -x^2 - 1 + (2x\sqrt{1-x^2}) \cdot \frac{-2}{1-2x \ln 10}$$

$$y' = -x^2 - 1 + \left( \frac{-4x\sqrt{1-x^2}}{1-2x \ln 10} \right)$$

Figura 8 – Resolução dos alunos A e W  
 Fonte: Resoluções das avaliações aplicadas na disciplina de cálculo I.

Diante das análises dos alunos, notou-se que eles, em sua maioria, conseguiam identificar seus erros e classificá-los em alguma das categorias dispostas. O ato de analisar o próprio erro e investigá-lo motiva os alunos a realizarem ações para a superação dos obstáculos e entraves que causam esses erros, contribuindo para minimizá-los em atividades posteriores.

No decorrer das entrevistas, foi possível constatar o quanto a didática das avaliações empregada pelo professor e a proposta da análise de erros beneficiaram os discentes diante do seu processo de aprendizado na disciplina. A estratégia de aplicar atividades avaliativas parciais, atreladas às análises de erros, durante o período de aplicação dos objetos matemáticos propostos, contribuiu para que os alunos estudassem gradativamente e de forma contínua, assim, não geraram acúmulo para uma única avaliação pontual sobre esses conteúdos, proporcionando uma nova dinâmica de estudos, além de motivá-los a sempre rever seus métodos e a serem mais cautelosos em suas resoluções.

Foi unânime, dentre os entrevistados, com base nos dados recolhidos, principalmente entre os que estavam repetindo a disciplina, o contentamento com a nova proposta metodológica e com o aprendizado dos conteúdos, pois estavam conseguindo compreender melhor o conteúdo e acompanhar todo o processo de ensino, alcançando um bom aprendizado.

## Conclusão

A maneira pela qual o professor trata o erro do aluno permitirá a superação ou a sua persistência. Diante disso, a proposta de inserir a análise de erros e a mudança no método avaliativo do professor de Cálculo Diferencial e Integral I, no Curso de Engenharia Civil surgiu com a necessidade de intervir no processo de construção do conhecimento, levando em consideração que os erros cometidos pelos estudantes, são elementos fundamentais para a superação de obstáculos.

O método utilizado para o trabalho com análise de erros exige muito do professor, principalmente no quesito tempo, pois requer muita dedicação para fazer as correções das avaliações, a leitura de cada análise de erros, além de averiguar o possível obstáculo de cada aluno, de acordo com as informações apresentadas nessas atividades. Mas, cumprir com o papel de professor reflexivo sob sua prática, garante suportes que contribuem para a obtenção do conhecimento que será de fundamental importância para a profissão que o aluno está se dispondo a seguir, e é, sem dúvidas, gratificante e recompensador.

As análises de erros e a análise estatística das atividades avaliativas aplicadas proporcionaram aos alunos um momento para refletir e expressar suas ideias, estratégias de resolução, dificuldades, além de identificar os seus erros e os motivos que os geraram. Através das entrevistas ficou explícito o contentamento dos alunos com essa estratégia de ensino e de aprendizagem, de como o conteúdo estava sendo mais significativo e realmente aprendido, por se tratar de um processo bem organizado e contínuo.

Este trabalho, além de propiciar uma abordagem investigativa para o erro do aluno, contribuiu para refletir e levantar discussões quanto ao ensino e à aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, assim como, para o ensino das diversas disciplinas que ainda seguem a perspectiva do viés puramente tradicional, sem, contudo levar em conta as diversas particularidades dos estudantes. Portanto, esse processo apresenta-se com uma metodologia que, além de qualificar o trabalho do professor, torna o aluno e o erro peças essenciais para a construção do conhecimento.

## Referências

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BACHELARD, G. **La formation de l'esprit scientifique**. Seizième tirage. Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1938.

BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques**. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Louvain-la-neuve, p.101-117, 1976.

CURY, H. N. **Análise de Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

Recebido em: 28 de abril de 2017.

Aprovado em: 19 de dezembro de 2017.