Transposição didática ou práticas matemáticas específicas? O caso do número ordinal e cardinal

Didactic transposition or specific mathematical practices? The case of ordinal and cardinal numbers

DENISE VILELA[1]
RENATA C. G. MENEGHETTI[2]

Resumo

Este trabalho pretende retomar uma discussão que tem como referência a transposição didática de Chevallard e tem como objeto os números cardinais e ordinais. Tal estudo aponta uma contradição entre o saber escolar e o saber científico, pois na matemática acadêmica os conceitos de ordinal e cardinal para conjuntos finitos não se diferenciam, enquanto essa discussão é presença marcante nos programas nacionais de Educação Infantil e das séries iniciais do Ensino Fundamental. Neste artigo a contradição mencionada é resolvida por meio de uma mudança de referencial teórico em relação à transposição didática, a saber, pela compreensão de que há especificidades nas práticas matemáticas escolar e acadêmica mediante as quais podem ser entendida a não correspondência entre o modo como o tema dos cardinais e ordinais é abordado nas respectivas práticas escolares e acadêmicas.
Palavras-chave: *Transposição Didática, Matemática Escolar, Matemática Acadêmica, Número ordinal e cardinal.*

Abstract

This work intends to rescue a debate that has a reference in Chevallard´s notion of didactical transposition, and deals with ordinal and cardinal numbers. Such a discussion points for a contradiction between scholar and science knowledge, for in academic mathematics the concepts of ordinal and cardinal for finite sets do not differentiate, since this discussion is quite present in national programs of elementary and high school education. In this article the contradiction cited above is solved through a theorical change related to didactical transposition, i.e., noticing that there are specificities in scholar and academic mathematical practices through which can be understood a non-correspondence in the way that the problem of ordinal and cardinals are approached in each scholar and academic practices.
Keywords: *Didactical Transposition; Scholar Mathematics; Academic Mathematics; ordinal and cardinal numbers.*

[1] UFSCar - denisevilela@ufscar.br
[2] USP/São Carlos - rcgm@icmc.usp.br

Introdução

A discussão conceitual a respeito da ordinalidade e a cardinalidade os números, foi historicamente importante nas tentativas de definição do número feitas por Frege (1848 - 1925) e Cantor (1845-1912) (VILELA, 1996). Essa discussão também é significativa na matemática escolar, conforme indica a pesquisa de Meneghetti (1995) e os programas nacionais de Educação Infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997 e 1998).

Em artigo intitulado “A transposição didática dos cardinais e ordinais”, Meneghetti (1999) observa que o saber escolar não coincide com o saber acadêmico e por isso o ensino dos cardinais e ordinais estaria em contradição com sua fonte legitimante, o saber matemático científico. Essa contradição ocorre porque está pressuposta a transposição didática de Chevallard e, na matemática científica ou acadêmica, não há diferença entre o conceito de ordinal e cardinal para conjuntos finitos. Ou seja, o pressuposto da transposição didática implica numa contradição entre a matemática escolar e a acadêmica.

Com o propósito de esclarecer essa contradição, outro referencial teórico é aqui considerado como uma forma de reinterpretação dos dados das pesquisas mencionadas a respeito dos ordinais e cardinais. Propomos considerar o novo conceito de matemática escolar de Moreira (2004, p. 181) a partir do qual, e levando em conta o que Miguel (2003) denomina prática social, elaboramos nossa concepção de práticas matemáticas (VILELA, 2009) tendo como referência a filosofia de Wittgenstein. Ou seja, ao invés de buscarmos uma solução que acomode esse assunto dentro do conceito de transposição didática através, por exemplo, da inclusão do ensino do infinito nas primeiras séries, “o que resolveria o problema da legitimidade para o ensino de cardinal e ordinal” (MENEGHETTI, 1999), propomos agora entender a contradição mencionada pelas especificidades entre as práticas matemáticas envolvidas em cada caso, a escolar e a acadêmica, assumindo assim que não há ligações necessárias ou hierárquicas que permitam relações de legitimação entre as práticas matemáticas escolares e acadêmicas, no sentido de uma correspondência entre estes objetos particulares, o número ordinal e cardinal.

É importante esclarecer que a presente abordagem é uma entre as possíveis soluções para a questão colocada. Estudos mais recentes do próprio Chevallard (1999), notadamente a Teoria Antropológica do Didático, abririam outras possibilidades para a presente discussão, tanto no que diz respeito à contradição mencionada, como também na alternativa apresentada para resolvê-la. Isto porque este novo enfoque didático também permite estudar as dificuldades relativas à matemática escolar considerando, como aqui, a própria natureza do saber que se ensina.

Retomar a discussão a respeito da transposição didática se justifica pelo amplo interesse nesta temática, inclusive em sua formulação original, sobretudo na Educação Matemática, mas não só3. Também por trazer à tona a temática dos números e por possibilitar esclarecer e aprofundar as discussões publicadas em outra ocasião (MENEGHETTI e VILELA, 1997; MENEGHETTI, 1999).

Para alcançar o propósito de olhar os números ordinal e cardinal nas práticas matemáticas escolar e acadêmica e discutir a adequação de grades analíticas aqui consideradas para esta relação, o caminho percorrido neste artigo segue os seguintes passos. Primeiro apresentamos como a escola, através dos documentos oficiais e considerando pesquisas específicas sobre o assunto, distingue o ordinal e o cardinal para conjuntos finitos. Por outra parte, considerando a Teoria dos Conjuntos conforme a formulação de Zermelo-Frankel explicitamos que essa distinção entre ordinal e cardinal não ocorre na matemática acadêmica formalizada para os conjuntos finitos, mas somente para conjuntos infinitos. Em seguida, trazemos a transposição didática, apontando as dificuldades que este referencial implica no tratamento matemático do tema em questão. Por último, a partir de Moreira (2004), verificamos uma outra possibilidade de compreensão entre os saberes escolar e acadêmico no que diz respeito ao objeto números ordinal e o cardinal, em que a contradição não se configura.

1 Transposição didática: contradição entre matemática escolar e a acadêmica para caso do número ordinal e cardinal

1.1 O ordinal e o cardinal para conjuntos finitos nas práticas matemáticas escolar e acadêmica

[3] Estudos no campo da física, biologia, informática, etc. também colocam a transposição didática como referência. Ver, por exemplo, (BROCKINGTON e PIETROCOLA, 2005); (MARANDINO, 2004), (HENRIQUES, ATTIE & FARIAS, 2007).

Em sua dissertação de mestrado Meneghetti (1995) estudou a concepção de número cardinal e ordinal desde as séries iniciais até o terceiro grau. Em sua pesquisa, a autora constatou que no universo educacional estudado há uma distinção entre o conceito de número cardinal e de número ordinal e que, nas séries iniciais, o estudo entre os números ordinais e cardinais se realiza sempre tendo como referência o conjunto finito de números naturais.

Ainda hoje, nos documentos oficiais que orientam os programas escolares da Educação Infantil e séries iniciais, confirmamos tal ocorrência. O Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (RCNEI) indica a abordagem cardinal e ordinal ainda que não use esses termos, ao explicitar o bloco de conteúdos relativo a "Números e Sistema de Numeração" a serem trabalhados com as crianças de 4 a 6 anos: "Comunicação de quantidades, utilizando contagem oral, a notação numérica e/ou registros não convencionais. Identificação da posição de um objeto ou número numa série, explicitando a noção de sucessor e antecessor" (BRASIL, 1998, p. 220).

Também nas "Orientações didáticas", o RCNEI indica procedimentos que envolvem a noção de ordinalidade e cardinalidade:

> Jogos de baralho, de adivinhação ou que utilizem dados também oferecem inúmeras situações para que as crianças pensem e utilizem a sequência ordenada dos números, considerando o sucessor e o antecessor, façam suas próprias anotações de quantidades e comparem resultados. Fichas que indicam a ordinalidade – primeiro, segundo, terceiro – podem ser sugeridas às crianças como material para usos nas brincadeiras (...) em jogos ou em campeonatos (BRASIL, 1998, p. 223).

No terceiro volume dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ao especificar o "conteúdo de matemática para o primeiro ciclo", a distinção conceitual entre ordinal e cardinal é explicitada:

> Com relação ao número, de forma bastante simples, pode-se dizer que é um indicador de quantidade (aspecto cardinal) que permite evocá-la mentalmente sem que ela esteja fisicamente presente. É também um indicador de posição (aspecto ordinal), que possibilita guardar o lugar ocupado por um objeto, pessoa ou acontecimento numa listagem, sem ter que memorizar essa

> lista integralmente. Os números também são usados como códigos, o que não tem necessariamente ligação direta com o aspecto cardinal, nem com o aspecto ordinal (por exemplo, código: número de telefone, de placa de carro, etc.) (BRASIL, 1997, p. 67).

Os conceitos de número ordinal e cardinal também foram importantes nas discussões filosóficas realizada por Frege e Cantor no final do século XIX, período da formulação inicial da conhecida teoria dos conjuntos. Frege, que buscava encontrar os fundamentos últimos da aritmética na lógica definindo cada número com o menor número possível de pressupostos, discutia com Cantor se o número era primordialmente ordinal e, a partir dele seria definido o conceito de cardinalidade ou vice-versa (VILELA, 1996).

Diante dessa breve exposição, e mesmo consultando dicionários, é fácil constatar que os conceitos de cardinalidade e ordinalidade possuem especificidades e fazem parte do nosso repertório linguístico.

Por outro lado, na matemática acadêmica, os conceitos de ordinalidade e cardinalidade não se distinguem para conjuntos finitos. A teoria dos Conjuntos de Zermelo-Frankel, referência em geral utilizada na matemática acadêmica, cardinais são tipos especiais de ordinais. Um **número ordinal** é definido como um **conjunto bem ordenado**[4] tal que, cada elemento de α coincide com o conjunto formado por seus predecessores (HALMOS, 1970, p.82-83). O conjunto formado pelos predecessores de um elemento a é chamado de **segmento inicial** de a, e denotado por $S(a) = \{b \in \alpha; b<a\}$. Em outras palavras, um conjunto bem ordenado α é um número ordinal se $S(a) = a$, para todo $a \in \alpha$. Segue então, que:

Ø é um número ordinal, pois S(Ø) = Ø.

1 é um número ordinal, pois $S(1) = \{0\} = 1$

2 é um número ordinal, pois $S(2) = \{0,1\} = 2$

n é um número ordinal, pois $S(n) = \{0,1,2, ... , n-1\} = n$

---

[4] Um conjunto parcialmente ordenado é um par ordenado $(X, \leq)$, onde X é um conjunto e $\leq$ é uma ordem parcial em X. Uma ordem parcial em um conjunto X é uma relação reflexiva, assimétrica e transitiva em X, ou seja, para todo x,y, e z em X, temos: (i) $x \leq x$, (ii) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$, e (iii) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (Halmos, 1970, p. 59 e 60). Um **conjunto** parcialmente ordenado é chamado **bem ordenado** se todo subconjunto dele, não vazio, tem um menor elemento. Assim, se um conjunto parcialmente ordenado α é bem ordenado, e se W é um subconjunto não vazio de α, então existe um elemento s em W, tal que $s < w$, onde w é um elemento qualquer de W. Dizer que $s < w$ significa dizer que s é um predecessor de w. (Halmos, 1970, p. 61, negrito nosso).

Segundo essa definição, os números naturais 0, 1, 2, ... são números ordinais.

Podemos também citar um exemplo de um número ordinal que não seja um número natural. É o caso do conjunto dos números naturais cuja ordinalidade é ω e que não é um número natural, mas cada um de seus elementos, por ser um número natural, coincide, com seu segmento inicial, isto é, $S(a) = a$, para todo $a \in \omega$, ou seja, ω é um ordinal.

Os números ordinais finitos, ou seja, os elementos de ω são os denominados números naturais. Os outros números ordinais não finitos são chamados números transfinitos (HALMOS, 1970, p. 57). O conjunto ω de todos os naturais é o menor número ordinal transfinito.

Com ω inicia-se a extensão do processo de contagem para além dos naturais. Depois de ω, tem-se $\omega + 1$ que é o sucessor de ω, e o processo segue adiante.

Dado um ordinal α, pode-se formar o conjunto de todos os ordinais β equivalentes a α, no sentido de haver uma bijeção entre eles (HALMOS, 1970, p.108). Desta forma, dado um número ordinal α, **o número cardinal** é definido como o ordinal mínimo de todos os conjuntos equivalentes a α. Então teremos, por exemplo, que card $(\omega) = \omega$, pois o menor ordinal em correspondência bijetora com ω é o próprio ω. Teremos também que $\text{card}(\omega+1) = \omega$ e $\text{card}((\omega+1)+1) = \text{card}(\omega+2) = \omega$, pois o menor ordinal em correspondência bijetora com $\omega + 1$ e $\omega + 2$ ainda é ω.

No caso dos números finitos temos que: dado um número ordinal finito α, o único ordinal em correspondência bijetora com α é somente o próprio. Assim, $\text{card}(\alpha)= \alpha$. Também, nesse caso, $\alpha + 1$ será finito e card $(\alpha+1) = \alpha+1$, pelo mesmo motivo. Donde, podemos generalizar que para qualquer α finito card $(\alpha) = \alpha$.

Em outras palavras, isto significa que, **os números ordinais e cardinais são os mesmos para conjuntos finitos** e só se distinguem quando consideramos um conjunto de infinitos elementos, tomados integralmente, tais como o conjunto dos números naturais (e dos racionais), cuja cardinalidade é $\aleph 0$, é distinta da cardinalidade dos reais, que é $\aleph 1$.

Por exemplo:

a) o conjunto de números 0,1,2,3 possui ordinalidade 4 e cardinalidade 4
b) o conjunto de números 0,1,2,3,4,....v, ... ω possui ordinalidade $\omega + 1$ e cardinalidade $\aleph 0$, enquanto o conjunto 0,1,2,3,4,....v, ... possui ordinalidade ω e a mesma cardinalidade $\aleph 0$.

Com isso evidencia-se que na prática matemática escolar a abordagem dos números ordinais e cardinais é diferente daquela utilizada na matemática acadêmica, assim como ocorre com outros aspectos relativos aos números, conforme mostra Moreira (2004) em sua tese que tomaremos como referência adiante.

A não correspondência deste objeto nas práticas matemáticas acadêmica e escolar gera uma contradição quando a transposição didática é tomada como referência, ou, usando os termos de Chevallard, trata-se de um problema de *legitimidade epistemológica*.

A transposição didática constitui-se pelo trabalho de fabricação do saber ensinado a partir do saber erudito (CHEVALLARD, 1989, p. 45). Nessa teoria, o autor considera o saber erudito (ou científico), que é aquele associado à vida acadêmica; o saber escolar, que corresponde ao conjunto de conteúdos previstos na estrutura curricular das várias disciplinas escolares valorizadas no contexto da história da educação (são apresentados através de livros didáticos, programas e de outros materiais); e o saber ensinado, que é aquele programado pelo professor em sala de aula (PAIS, 2008, p. 21-22).

De acordo com Chevallard (1989, p. 63), o saber ensinado deve procurar satisfazer dois tipos de legitimidade: a legitimidade educativa e a legitimidade epistemológica. A legitimidade educativa diz respeito aos anseios sociais e a epistemológica refere-se a uma garantia científica.

Assim, segundo esta teoria, o saber ensinado deve, ao mesmo tempo, satisfazer aos anseios sociais e a esfera erudita. No caso do ensino elementar dos ordinais e cardinais, portanto, como não há uma referência na esfera erudita, este conhecimento apresenta-se com problema de legitimidade, especificamente, legitimidade epistemológica.

Outros aspectos da transposição didática serão expostos sucintamente a seguir.

1.2 A Transposição didática

O tema do livro de Chevallard *A Transposição Didática - do saber sábio ao saber ensinado*[5], publicado originalmente em 1985, apresenta o conceito de *transposição didática*, bastante difundido na educação matemática. Partindo do princípio que os

[5] Usamos a versão em espanhol, citada na bibliografia, e o original em francês para realizar a livre tradução utilizada nesse texto.

conteúdos do ensino são determinados por meio dos programas oficiais e por meio dos manuais (CHEVALLARD, 1991, p.35), o autor mostra como ocorre o fluxo do saber sábio para a escola, que tem como objeto de ensino saberes legitimado pela ciência. Seu objetivo geral neste livro é marcar a existência própria da didática da matemática e, portanto, do objeto desta ‘nova’ disciplina, que não se reduz à psicologia, à sociologia, etc. (CHEVALLARD, 1991, p.22). A transposição didática trata da relação entre o saber sábio, a qual nos referimos aqui por matemática acadêmica, e o saber ensinado, que tem como pressuposto o saber escolar.

O autor define a transposição didática como: “O “trabalho” que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino” (CHEVALLARD, 1991, p. 45). “Em sentido restrito, a transposição didática designa, pois, a passagem do saber sábio ao saber ensinado” (CHEVALLARD, 1991, p. 22).

Podemos dizer que a transposição didática se realiza em dois momentos. O primeiro que transforma o saber sábio em saber ensinado, ou a matemática acadêmica em matemática escolar; o segundo que afirma a necessidade de retomar o saber sábio na escola, pois essa seria sua “fonte legitimante”.

O saber ensinado e o saber sábio são amplamente caracterizados por suas transformações que envolvem valores, usos, funcionamentos e objetos distintos em cada uma delas:

> Com muita frequência, o saber ensinado se encontrou profundamente modificado em poucos anos, e teve que transpor uma imensa quantidade de elementos tomados do saber sábio (da matemática dos matemáticos) (CHEVALLARD, 1991, p. 23).

Por exemplo, o autor se refere as diferenças quanto ao objeto ao levantar e ao responder uma questão nos parágrafo iniciais do segundo capítulo do livro *A Transposição Didática*:

> 2.1 Existe a transposição didática? O objeto de ensino é verdadeiramente diferente do objeto do saber ao qual responde?
> 2.2 Podemos considerar a existência de uma transposição didática, como processo de conjunto, como situações de criações didáticas de objetos (de saber e de ensino) que se fazem “necessárias” por exigências do funcionamento didático (CHEVALLARD, 1991, p. 47).

O autor explica que o saber acadêmico legitima o saber ensinado, mas ele é transformado nesse processo de didatização do saber, porque sofre, na passagem de sua fonte científica para a escola, uma série de 'transformações adaptativas' (CHEVALLARD, 1991, p.52), esquecimentos, resignificações e criações de conhecimento, que ficam ocultos pela ficção de identidade entre ambos. As transformações nessa passagem podem ser tão expressivas que, no limite, afirma o autor, a escola cria seus próprios conhecimentos:

> 2.8 No que precede, a existência da transposição didática é explicada através de alguns efeitos mais espetaculares (criações de objetos) ou por meio de suas inadequadas disfunções (substituição "patológica" de objetos) (CHEVALLARD, p.1991, p. 49).
> 2.12 Descobrimos então que, do objeto do saber ao objeto de ensino, a distância é, com muita freqüência, imensa (CHEVALLARD, p.1991, p.50).

Por outro lado, neste ponto em que o saber escolar se distancia muito da sua origem acadêmica, ou, usando os termos da obra, quando há um desgaste biológico e moral entre os saberes em questão (CHEVALLARD, 1991, p.30), um acordo tácito entre o interior e o exterior da escola obriga a escola a restabelecer a compatibilidade com o saber sábio por meio de uma corrente proveniente desta fonte.

Considerando a discussão realizada na seção anterior, verifica-se que o que é ensinado na escola sobre números ordinais e cardinais não coincide com o que consta sobre esses conceitos na matemática acadêmica. Meneghetti (1995, p.52) aponta, tendo como referência a transposição didática, a necessidade de estabelecer a compatibilidade entre esses dois universos de saberes, o escolar e o acadêmico ou científico: "Como se sustenta, no momento atual do processo de transposição didática, o fato de que o conhecimento matemático identifica cardinais e ordinais no caso finito, enquanto que no ensino elementar esses conceitos são distintos?"

Assim se estabelece a contradição entre o ensino de cardinais e ordinais e sua fonte legitimante, a sua "fundamentação matemática", que é o conhecimento formalizado axiomaticamente sobre esse assunto. Para superar essa contradição, essa autora conjectura, inspirada em Freudenthal (1973)[6] e com fundamentação matemática nos ordinais transfinitos, a introdução do infinito nas séries iniciais:

> Com o intuito de colaborar com soluções que supram a falta de legitimidade epistemológica para o ensino de números cardinais e ordinais, sugerimos, como proposta didática a ser experimentada, a antecipação do tratamento do infinito no ensino elementar. Esta sugestão esta baseada em Freudenthal (1973) e é matematicamente fundamentada nos ordinais transfinitos (MENEGHETTI, 1999, p. 25).

Ainda que esta argumentação esteja logicamente correta e é um modo de resolver a contradição da transposição didática, a ideia defendida pela autora de introduzir o conceito de infinito nas séries iniciais leva a outro questionamento, a saber: como se poderia abordar didaticamente esse assunto nas séries iniciais? Este caminho pode não ser trivial.

Por este motivo, este artigo apresenta outro modo de lidar com essa contradição. Trata-se de substituir o referencial da transposição didática pelo referencial das especificidades das práticas matemáticas. Ou seja, assumimos as práticas matemáticas na escola, que incluiria tanto o que Chevallard chamou de saber escolar (prescrições) e saber ensinado (que ocorre na prática) e não são necessariamente determinadas pela matemática acadêmica (Moreira e David, 2003, p. 61). Podemos argumentar em favor da especificidade das práticas matemáticas nos valendo, inclusive, da 'denúncia', feita por Chevallard, da ilusão de unidade entre esses saberes (Chevallard, 1991, p. 23 e 17), e, neste sentido, pode ser desconsiderado a segunda parte de sua argumentação que obrigaria a escola a restabelecer a compatibilidade com o saber sábio por meio de uma corrente proveniente desta fonte. Tomamos como referência para rever o referencial teórico os estudos de Chervel (1990) e os de Moreira (2004) sobre os números.

2. Matemática escolar e matemática acadêmica

Moreira (2004) levanta uma discussão a respeito das relações entre a matemática acadêmica e a escolar a partir, principalmente, dos autores Chervel e Chevallard. Chervel defende, a

[6] Nesta obra, na origem do conceito de número, o número-contagem (que se refere ao número ordinal) desempenha a primeira e mais significante regra.

partir de sua pesquisa a respeito das disciplinas escolares em que considera especificamente a "teoria gramatical", que esta teoria "ensinada na escola não é a expressão das ciências ditas, ou presumidas "de referência", mas que ela foi criada pela escola, para escola e na escola" (CHERVEL, 1990, p. 181). Chevallard, por sua vez, "toma a matemática científica como fonte privilegiada de saber, a qual a matemática escolar sempre recorre para recompartibilizar-se com a sociedade" (MOREIRA e DAVID, 2003, p. 61).

A questão levantada por Moreira é importante do ponto de vista epistemológico aqui considerado. A transposição didática, tendo como referência a matemática acadêmica, parece ter como pressuposto uma matemática como "domínio de conhecimento" (Lave, 2002, p. 66), isto é, a matemática é concebida como um sistema de proposições e relações, num tipo de existência independente das pessoas, isolada das práticas. É importante esclarecer que esta associação já não seria pertinente considerando a Teoria antropológica do didático em que Chevallard (1999, p. 222) afirma que esta teoria situa a atividade matemática no "conjunto de atividades humanas e de instituições sociais". Para o autor a "atividade matemática deve ser interpretada (isto é, modelada) como uma atividade humana entre outras, ao invés de vê-la apenas como uma construção de um sistema de conceitos, o uso de uma linguagem e/ou um processo cognitivo" (BOSH, CHEVALLARD, GASCÓN, 2005, p. 1258)[7].

Outra ideia que permeia "a matemática acadêmica como fonte privilegiada" é que haveria uma ligação linear, ordenada ou hierárquica das práticas matemáticas acadêmicas, cotidianas, da escola, de grupos profissionais, etc. Cada uma delas poderia ser pensada como fragmentos, formas imperfeitas, germens ou vulgarização da matemática científica.

Este hiperdimensionamento da matemática acadêmica fica comprometido com a compreensão da escola não simplesmente como espaço de transmissão de conhecimento, ou de iniciação a ciência.

Chervel (1990, p. 180) questiona abordagens que não consideram o papel disciplinador da escola ao tratar questões relativas à aprendizagem. Segundo ele, a função da escola de transmissão de conteúdos científicos mascara seus aspectos disciplinadores mais amplos,

[7] O termo **antropológico** que compõe o nome da teoria de Chevallard visa ressaltar o homem frente a situações matemáticas e que todo saber é sempre relativo a uma determinada Instituição, ou seja, "ele considera os *objetos* matemáticos, não como existentes em si, mas como entidades que emergem de sistemas de praticas que existem em dadas *instituições"* (HENRIQUES, ATTIE, FARIAS**,** 2007, p. 58).

além de ocultarem a criação de conteúdos próprios também identificados como vulgarizações do saber sábio. Sua abordagem sociológica leva em conta esta função disciplinadora da escola em que os conteúdos são um meio e não o fim em si, um meio de aculturação, de imposição de regras e formas de pensamento:

> Uma disciplina é, para nós, em qualquer campo que se a encontre, um modo de disciplinar o espírito, quer dizer, de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte. [...] Desde que se compreenda em toda a sua amplitude a noção de disciplina, desde que se reconheça que uma disciplina escolar comporta não somente as práticas docentes da aula, mas também as grandes finalidades que presidiram sua constituição e o fenômeno de aculturação de massa que ela determina, então, a história das disciplinas escolares pode desempenhar um papel importante não somente na história da educação, mas na história cultural (CHERVEL, 1990, p. 184).

Chervel questiona a noção de transposição didática proposta por Chevallard, com base nesta ideia de disciplina escolar, que não seria, para este autor, um conjunto de matérias ou conteúdos, mas um modo de "disciplinar o espírito" (CHERVEL, 1990, p. 184). Para ele o papel da pedagogia não seria o de lubrificante, um modo de simplificar os conteúdos provenientes da matemática acadêmica para a matemática escolar: "A história das disciplinas escolares se encarrega de estabelecer que a escola não se define por uma função de transmissão dos saberes, ou de iniciação às ciências de referência. A prova disso é fornecida pela história da gramática escolar" (CHERVEL, 1990, p. 182).

Moreira e David (2003) discutem as relações entre a matemática escolar e a matemática científica[8] por entenderem que a forma de conceber a matemática escolar é essencial na formação inicial do professor de matemática, referindo-se criticamente a Chevallard que consideraria a matemática escolar como "uma versão didatizada da matemática científica". Os autores procuram caracterizar a prática do professor de matemática (que envolve conteúdos, métodos, contextos, valores e outros condicionantes

---

[8] No artigo de 2003, não consideram uma escola e uma academia determinadas Cf. (MOREIRA &, 2003, p. 60); na tese, o autor considera os dados de pesquisa feita com estudantes do curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG.

sociais) sem reduzi-la a conteúdos + pedagogia, em que este último ‘ingrediente’ teria a mera função de lubrificante. Segundo os autores, a matemática escolar tampouco seria uma produção autônoma e autossuficiente em termos da produção dos saberes profissionais, opondo-se, neste aspecto, explicitamente a Chervel. A prática do professor não seria uma instancia capaz de produzir todos os saberes. Para Moreira e David (2003, p. 64) há relações complexas e não dicotômicas entre “os saberes científicos, os saberes escolares e as questões postas pela prática profissional docente na escola”. De fato, eles não assumem nenhuma das duas posições extremas, mas apontam claramente a importância de se ter consciência das especificidades da matemática escolar em relação à acadêmica. Isso representa um diferencial de sua pesquisa em relação a outras voltadas para a formação inicial do professor porque permite uma análise ‘livre’ das amarras do conhecimento acadêmico:

> Quando, ao contrário, essa distinção entre matemática científica e matemática escolar é explicitamente admitida como fundamento dos estudos sobre a prática profissional, sobre os saberes profissionais e sobre o processo de formação do professor, resulta percepção da complexidade da matemática escolar. Nesse caso, ela se funda na complexidade da própria prática educativa escolar e não mais nos valores específicos da matemática científica (MOREIRA, 2004, p. 36).

De modo geral, encontramos ao longo no texto de Moreira (2004), diversas especificidades da matemática escolar em relação à acadêmica no que diz respeito aos números naturais **N**, racionais **Q** e reais **R.** Essas especificidades envolvem as definições, as demonstrações formais ou provas e os erros no contexto escolar e no contexto acadêmico, assim como a natureza do objeto:

> Neste caso [contexto educativo], a natureza dos objetos matemáticos estudados está profundamente associada – e, muitas vezes é o que dá sentido - aos princípios, às argumentações, às definições e às justificativas, aos métodos e aos resultados da matemática escolar (MOREIRA, 2004, p. 20).
>
> A tendência predominante na matemática científica, desde o século XIX, é de se caracterizar os objetos matemáticos abstraindo-se a sua natureza e enfatizando-se as estruturas (MOREIRA, 2004, p. 29).

Os modos de se provar na Matemática escolar são justificativas menos formais, mais "livres", que se "desenvolvem tomando como postulados e elementos primitivos tácitos certos conhecimentos provenientes da vida cotidiana"; na geometria, por exemplo, podem ser feitas por dobraduras de papel (Moreira, 2004, p.27). Afinal, o objetivo atualmente é a aprendizagem do conceito e não da forma; a prática escolar visa à compreensão em que as justificativas mais livres ajudam a desenvolver a convicção da validade do resultado, o que pode levar a compreensão mais profunda das relações em discussão (idem). Provas formais podem inibir os processos de tentativa e erro ou de busca de compreensão não formal na escola enquanto que são as únicas aceitáveis na matemática formal.

As demonstrações Lógico-dedutivas, por sua vez, são estruturais na matemática acadêmica, realizadas por meio de formulações extremamente precisas, apoiadas em definições e teoremas anteriormente estabelecidos, além do que requer uma seleção rigorosamente *econômica* dos elementos primitivos e postulados:

> Vemos assim, que no caso das definições ocorre algo semelhante ao que já observamos a respeito das demonstrações: o forte condicionamento imposto à prática escolar pelas características de ensino e de aprendizagem escolares tende a favorecer um modo mais flexível de caracterização dos objetos matemáticos, muitas vezes através de referências descritivas ou de imagens intuitivas, no lugar de definições formais. Mesmo porque a definição formal parece não desempenhar, entre os estudantes, um papel muito significativo no processo de construção do conceito a que ela se refere (MOREIRA, 2004, p. 30-31).

O erro, na matemática escolar, é muitas vezes entendido como um fenômeno psicológico que envolve aspectos diretamente relacionados com o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem e, por isso, positivos, já que pode indicar obstáculos cognitivos (importantes de serem diagnosticados) ou germens de conhecimentos novos. Na matemática acadêmica o erro é negativo, um fenômeno lógico que expressa a contradição de algum fato estabelecido como "verdadeiro":

> Em suma, pode-se dizer que os estudos dos erros oferecem uma contribuição efetiva para a matemática escolar ao proporcionar condições para que o processo de ensino se desenvolva a partir dos conhecimentos e estratégias vigentes entre os estudantes, explorando didaticamente as suas eventuais limitações. Vê-se, assim, que o erro desempenha, na matemática escolar, um papel positivo importante, fornecendo elementos tanto para o planejamento como para execução das atividades pedagógicas em sala de aula. Para a matemática científica, por outro lado, embora também muito importante, é essencialmente negativa, indicando (temporária ou definitivamente) a inadequação ou a falsidade de resultados, argumentações, formas de raciocínio, etc. (MOREIRA, 2004, p. 35).

Argumentando em favor de um espaço maior nos cursos de licenciatura para (re)pensar as concepções e imagens sobre números reais, o autor afirma que as concepções formalizadas não só são diferentes das que o ambiente escolar demanda, como também podem conduzir a confusões conceituais (Moreira, 2004, p. 121). Em outro momento, Moreira (2004, p. 22) apresenta o argumento, a partir de estudos de natureza cognitiva realizados por A. Sfard, da inadequação e insuficiência do sistema formal dedutivo para a educação escolar.

Destacamos ainda que, no caso estudado e apresentado neste artigo, não se trata apenas de diferentes significados dos números ordinais e cardinais, mas de uma diferença quanto ao objeto propriamente, sua definição e conceituação. No âmbito de diferença de significados as abordagens de Lins (1992 e 1994) e Vilela (2009) poderiam ser consideradas, porém estes referenciais seriam necessários, mas não suficiente para este propósito, já que pressupõem diferentes significados mesmo tratando-se do mesmo objeto. Se considerarmos a natureza do objeto, na matemática escolar, muitas vezes é isto que dá o sentido e está associada às definições e justificativas, enquanto que na matemática acadêmica o objeto é completamente indeterminado; só importa a estrutura, abstraindo a natureza (Moreira, 2004, p.20, 29).

Considerações Finais

Quando a distinção entre matemática acadêmica e matemática escolar, proposta por Moreira e David (2003), é considerada se abrem outras possibilidades de olhar para prática educativa escolar. Assim, partindo desta distinção e considerando o referencial das práticas matemáticas (VILELA, 2009) e não mais a transposição didática de Chevallard, desaparece a necessidade de se obter um respaldo científico para o saber escolar dos números cardinais e ordinais e, consequentemente, resolve-se a contradição ou problema de legitimidade. Neste estudo em particular consideramos o tema dos ordinais e cardinais e apresentamos uma alternativa para esta contradição. Substituímos o pressuposto da transposição didática pelo reconhecimento de que se trata de aspectos distintos das práticas matemáticas em questão no que diz respeito aos ordinais e cardinais finitos. Assim, a partir do reconhecimento de que o que se ensina na escola são conceitos e usos da matemática escolar que não encontra necessariamente correspondente na matemática acadêmica, podem-se trabalhar os significados dos números finitos ordinal, cardinal, códigos, sem considerar seu fundamento científico ou a formalização axiomática desse conteúdo, valorizados na matemática acadêmica, ou seja, sem considerar que há uma transposição do saber científico para o saber escolar. Se os usos, valores e objetos são diferentes em cada caso, não podemos dizer que há um correspondente entre esse objeto de mesmo nome na matemática acadêmica e escolar.

Mesmo assim, devemos dizer que ao considerar o significado matemático formal do número ordinal e cardinal para conjuntos infinitos, amplia-se a compreensão a respeito dos conceitos de ordinalidade, cardinalidade e número em geral, ainda que, a pertinência desta abordagem dependeria de uma discussão sobre os propósitos pedagógicos.

Tendo em vista a grande especialização, desenvolvimentos e abstrações da matemática acadêmica, sobretudo a partir do século XIX com a teoria de conjuntos e com a ênfase nas estruturas, muitos temas podem ser avaliados se passíveis ou não de transposição didática por ocasiões de revisões curriculares e levando em conta os objetivos da educação escolar. O tema da transposição didática tem potencial de ser expandido para outras temáticas assim como a discussão sobre números ordinais e cardinais também pode ser visto sob outras óticas.

Além destas, outras questões que surgem a partir da presente discussão envolve o aprofundamento nas discussões epistemológicas que poderiam ser aprofundadas em direções tal como discutir em que medida a teoria da aprendizagem situada de Lave (2002) tem relação com a Teoria das Situações Didáticas de Brouseau, a qual Chevallard toma como referência, assim como entre este programa e os aspectos epistemológico que subjaz nossa concepção de práticas matemáticas discutido em Vilela (2009).

Referências

BRASIL. (1998). *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil v. 3.* Brasília: Ministério da Educação e Cultura/ Secretaria de Educação Fundamental.

BRASIL. (1998). *PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais –Matemática***.** Brasília: Ministério da Educação e Cultura/ Secretaria de Educação Fundamental.

BROCKINGTON, G. e PIETROCOLA, M. (2005). Serão as regras da transposição didática aplicáveis aos conceitos de física moderna? *Investigações em Ensino de Ciências* – v.10, n. 3, pp. 387-404.

BOSH, M. CHEVALLARD, Y. e GASCÓN, J. (2005). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. Working Group *11*-Different theoretical perspectives and approaches in research in mathematics education. *CERME 4-* European *Research in Mathematics Education* IV, pp. 1254- 1263.

http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG11.pdf. Acesso em 4/2/2011.

CHEVALLARD, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber ensenado. Buenos Aires: Aique.

CHEVALLARD, Y. (1999). 'L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*

v. 19, n. 2, pp. 221–266.

CHERVEL, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*. v. 2, pp. 177-229, Porto Alegre.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

HENRIQUES, A., ATTIE, J. P. & FARIAS, L. M. (2007) Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do Maple**.** *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 9, n. 1, pp. 51-81.

http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/585/436. Acesso em 4/2/2011.

HALMOS, P.R. (1970). *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. Trad. I. Bicudo. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono.

LINS, R.C. O (1994). Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. *Dynamis*. v.1, n.7, pp. 29-39, abril/junho, Blumenau.

LAVE, J. (2002). Do lado de fora do supermercado. In: FERREIRA LEAL, M. *Ideias Matemáticas de Povos Culturalmente Distintos*. São Paulo: Global, pp. 65-98.

MARANDINO, M. (2004). Transposição ou recontextualização? Sobre a produção de saberes na educação em museus de ciências. *Revista Brasileira de Educação,* Rio de Janeiro, n.26, pp.95-108, maio/jun/jul/ago.

MENEGHETTI, R.C.G. e VILELA, D. (1997) O conceito de número: reflexões históricas e educacionais. *Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e II Seminário Nacional de História da Matemática.* pp. 333-353.

MENEGHETTI, R.C.G. (1995*). Sobre a Transposição Didática dos Cardinais e Ordinais*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Rio Claro, UNESP.

MENEGHETTI, R.C.G. (1999). A Transposição Didática dos Cardinais e Ordinais: relação ensino e ciência. *BOLEMA*. n. 13, Departamento de Matemática de Rio Claro, pp.12-28.

MIGUEL, A. (2003). Formas de ver e conceber o campo de interações entre filosofia e educação matemática. In: BICUDO (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: concepções & Movimento*, Editora Plano.

MOREIRA, P. C. (2004). *O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica*. Tese de doutorado em Educação, Belo Horizonte, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais.

MOREIRA, P.; DAVID. M. (2003). Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké,* v.11, n.19, jan./jun.

PAIS, L.C. (2008). Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Coleção Tendências da Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

VILELA, D. (1996). *Análise das críticas de Frege a Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições*. Dissertação de mestrado em Lógica e Filosofia da Ciência, IFCH, Campinas, Universidade Estadual de Campinas.

VILELA, D. (2009). Práticas Matemáticas: contribuições sócio-filosóficas para a Educação Matemática. *Zetetiké,* v. 17, n. 31, p. 191-212.