Calculando (mal) superficies en los siglos XVII y XVIII

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa, Zaragoza)

En 1617 se publicó en Barcelona el *Llibre dels secrets de agricvltvra, casa rvstica y pastoril* cuyo autor fue Miguel Agustín, fraile hospitalario nacido en Bañolas que llegó a ser prior de la orden en Perpiñán. La obra, que coloquialmente se acabó denominando *Agricultura del prior*, debió ser todo un éxito de ventas puesto que se tradujo al castellano en 1626 y se le conocen al menos dieciocho ediciones entre 1617 y 1781 (cuatro de ellas impresas en Zaragoza).

LLIBRE
DELS SECRETS
DE AGRICVLTVRA CASA
RVSTICA
AB LLICENCIA Y PRIVILEGI.
Estampat en Barcelona en la Estampa de Esteve Liberós en lo Carrer de Sant Domingo. Any M. DC. XVII.

LIBRO DE LOS
SECRETOS DE AGRICVLTVRA,
Casa de Campo y Pastoril.
TRADVZIDO DE LENGVA CATALANA en Castellano por Fr. Miguel Agustin Prior del Temple de la fidelissima villa de Perpiñan, del Orden y Religion de S. Ioan de Hierusalè, del Libro q el mesmo Autor sacò a luz el año 1617. y agora con addicion del Quinto Libro, y otras curiosidades, y vn Vocabulario de seys Lenguas, por declaracion de los vocables de dicho Libro, y en la hoja siguiente hallaran las materias de que el Autor trata.
DIRIGIDO A FRAY DON HONOFRE de Hospital Baylio de Mallorca, y Comendador de Espluga de Francoli, y Encomienda Hospital del Masdeu.
CON LICENCIA.
Impresso en la Fidelissima Villa de Perpiñan, en casa de Luys Roure Librero. Año 1626. Y a su costa.

LIBRO
DE LOS SECRETOS
DE AGRICULTURA,
CASA DE CAMPO; Y PASTORIL.
SV AVTOR Fr. MIGVEL AGVSTIN, PRIOR DEL Temple de la fidelissima Villa de Perpiñan, del Orden de San Juan de Gerusalen.
AÑADIDO POR EL MISMO AUTOR, CON EL LIBRO quinto, y vn Vocabulario de seis Lenguas, para declaracion de muchos nombres.
Corregido y enmendado en esta quarta Impression.
SE DEDICA
AL ILVSTRISSIMO SEÑOR DON MANVEL Lamberto Lopez, Obispo de Teruel, del Consejo de su Magestad, y Primer Diputado del Reyno de Aragon.
Año 1703.
En Zaragoza: Por PASQVAL BVENO, Impressor de su Magestad, del Reyno de Aragon, y del Hospital Real, y General de N. Señora de Gracia.

No parece, dado el título, que esta obra tenga relación alguna con las matemáticas. De hecho, si se elige una página al azar, lo habitual es leer algo como: «El mijo y panizo te requieren mucho la tierra delgada y prima, y no tan solamente se hace en esta, sino aun en la arenosa y un poco húmeda. Sobre todo aborrece la tierra seca, agria y lodosa».

Sin embargo, insertado entre recomendaciones prácticas sobre agricultura, información sobre fauna y flora silvestres o consejos para tratar la embriaguez, encontramos un capítulo titulado «Secretos del modo y manera que se ha de tener en el medir las tierras» y que trata sobre agrimensura. Al comenzar el capítulo, el autor declara sus intenciones:

> Cuanto al arte de medir las tierras, vemos que conviene y afecta más propiamente a los Geométricos que al Padre de Familias de las Casa de Campo pero […] así deseando […] que no sean ignorantes en ninguna cosa de aquellas que ellos se pueden servir y aprovechar para utilidad de la Casa de Campo […] quiero explicar familiarmente algunas reglas comunes de medir cualquier pieza de tierra de cualquier manera, forma y figura que sean.

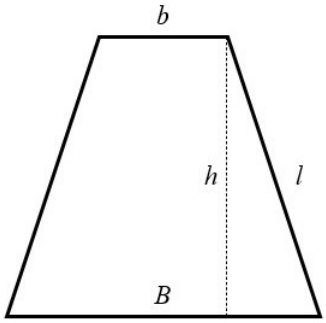
El capítulo se dedica inicialmente a describir algunos instrumentos utilizados en la labor del agrimensor y a explicar su uso. Tras ello, el autor proporciona ocho reglas para el cálculo de la superficie de piezas de tierra cuando estas tienen distintas formas. En concreto, las reglas que se proporcionan son, en el orden original pero con lenguaje moderno, las siguientes:

— Si la pieza de tierra tiene forma cuadrada, la superficie se obtiene multiplicando la longitud del lado por sí misma.
— Si la pieza de tierra tiene forma rectangular, la superficie se obtiene multiplicando el largo por el ancho.
— Si la pieza de tierra tiene forma de trapezoide, la superficie se obtiene multiplicando entre sí los promedios de las longitudes de los lados opuestos.
— Si la pieza de tierra tiene forma de trapecio isósceles, la superficie se obtiene multiplicando el promedio de las longitudes de los lados desiguales por la longitud de los lados iguales.
— Si la pieza de tierra tiene forma de triángulo equilátero, la superficie se obtiene multiplicando la longitud del lado por su mitad.
— Si la pieza de tierra tiene forma de dos triángulos equiláteros unidos por un lado, la superficie se obtiene multiplicando la longitud del lado por sí mismo.
— Si la pieza de tierra tiene forma circular, la superficie se obtiene multiplicando la longitud de un cuarto de la circunferencia por sí misma.
— Si la pieza de tierra tiene forma de hexágono regular, la superficie se obtiene dividiendo el hexágono en seis triángulos iguales. Estos triángulos se agrupan por parejas y en cada pareja se usa la regla de los dos triángulos equiláteros unidos por un lado.

Para piezas de tierra que «fueren de tal manera entremezcladas en diversas formas y figuras» el autor propone descomponerla en piezas de los tipos descritos y calcular la superficie de cada una separadamente. Tristemente, de las ocho reglas anteriores tan solo son ciertas las dos primeras. El resto son, a lo sumo, aproximaciones con un diverso grado de exactitud. En este sentido, nos encontramos ante dos tipos de situaciones.

Por un lado tenemos el caso del triángulo equilátero (reglas 5, 6 y 8) y del círculo (regla 7) en las que la fórmula propuesta nunca es cierta y su inexactitud proviene de la aproximación numérica de ciertos valores. Por ejemplo, en el caso de la superficie de un triángulo equilátero la fórmula que se propone implica la aproximación $\sqrt{3} \simeq 2$ mientras que, en el caso del círculo, la fórmula que se propone implica la aproximación $\pi \simeq 4$.

Los casos del trapezoide (regla 3) y del trapecio isósceles (regla 4, que es un caso particular de la anterior) son diferentes porque en estos casos la inexactitud de las fórmulas propuestas depende realmente de la forma que tiene la figura cuya superficie se está calculando.

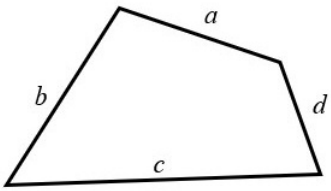


Fórmula correcta: $S = \left(\frac{B+b}{2}\right) h$

Fórmula del texto: $S = \left(\frac{B+b}{2}\right) l$

En el caso del trapecio isósceles, por ejemplo, la fórmula proporcionará una mejor aproximación cuanto más parecidos sean los valores de l y h. Evidentemente, para un l fijo esto sucede cuando B y b son muy parecidos (es decir, cuando el trapecio es prácticamente un rectángulo), mientras que para B y b fijos esto sucede cuando l (y, por tanto, también h) son muy grandes. Así, si $B = b$, se tiene que $l = h$ y la fórmula del texto es correcta, mientras que si hacemos que l crezca indefinidamente, la diferencia entre el valor correcto y su aproximación tiende a 0.

El caso del trapezoide es más interesante. Como sabemos, los lados de un cuadrilátero cualquiera no lo determinan de manera única por lo que no es posible obtener una fórmula general para el área de un cuadrilátero arbitrario que dependa solo de los lados del mismo. Sin embargo, el autor del texto da una fórmula de ese tipo; de modo que surge de manera natural la cuestión sobre si existe alguna situación en la que esa fórmula sea correcta.



Fórmula del texto: $S = \left(\frac{b+d}{2}\right)\left(\frac{a+c}{2}\right)$

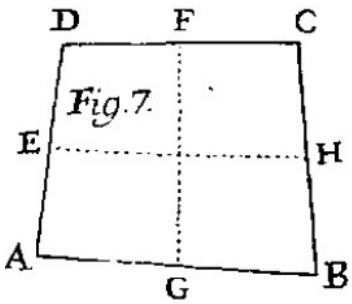
Observamos que la fórmula propuesta supone convertir el cuadrilátero dado en un rectángulo cuyos lados sean los promedios de los lados opuestos del cuadrilátero de partida. Por lo tanto, cuando el cuadrilátero original sea un rectángulo, la fórmula será válida (e innecesaria). Es obvio que no puede serlo nunca para un paralelogramo no rectángulo (porque su altura es siempre menor que la de un rectángulo con sus mismos lados). Tampoco puede serlo para un trapecio puesto que la altura debería ser el promedio de las longitudes de los lados no paralelos, lo que es imposible salvo que el trapecio sea un rectángulo[1] (los dos lados no paralelos son mayores o iguales que la altura).

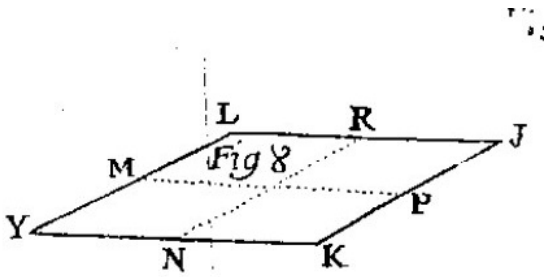
Estas dudas se le suscitaron ya en 1774 al burgalés Ventura de Ávila, que trabajaba por aquel entonces en el Catastro de Cataluña cuando se encontró con el texto que estamos comentando. En su *Regla general para medir cualquier pieza de tierra* escribe lo siguiente:

> Son muchos los que para indagar cuantas canas[2] cuadradas vale cualquier pieza de cuatro lados usan de esta regla. Miden cada uno de los cuatro lados. Multiplican la mitad de la suma de las canas que valen dos lados opuestos por la mitad de la suma que valen los otros dos lados, y el producto es el número de canas cuadradas que vale la tal pieza. Esta regla es falsa. Voy a manifestarlo.

En el texto, que está escrito en forma de diálogo entre un maestro y un discípulo, la forma de evidenciar la falsedad de la regla es a través de un contraejemplo. Ávila proporciona explícitamente en una figura dos cuadriláteros diferentes, cuyos lados son respectivamente iguales, y que no pueden tener la misma superficie. Lo que resulta especialmente interesante es el modo en que propone comprobar que ambas superficies son diferentes, puesto que propone una comprobación empírica superponiendo recortes de papel:

> M. Toma un papel y con las tijeras córtalo hasta que te quede un pedazo tal, que puesto encima de la figura, cubra justamente esta figura; esto es, toma un papelito totalmente igual a esta figura. Este papelito hazlo tres o más pedazos y velos acomodando en la otra figura.
> D. ¿Y qué hallaremos con esto?
> M. Hallarás o verás que con estos tres pedazos no hay bastante para cubrir la figura.





Por si tenemos dudas del origen de esta regla incorrecta, en la segunda parte de la obra anterior, titulada *Suplemento a la regla general para medir cualquier pieza de tierra*, el autor retoma el asunto del siguiente modo:

> Está muy introducida en Cataluña, señaladamente entre los labradores, una Obra conocida por este título: *Agricultura de Prior*. En el Capítulo 14 del Libro III de ella se trata de medir tierras. Este Capítulo contiene varias reglas que se oponen a los preceptos de la Geometría. Además de dar la regla que se halla en el número 24 de mi Tomo I [se refiere a la regla de los cuadriláteros], dice que la superficie de un triángulo equilátero se halla multiplicando un lado por su mitad. Tal vez este Capítulo será la causa de alguno de los desaciertos referidos.

En este mismo *Suplemento*, Ventura de Ávila trata de estudiar el problema general, y presenta como teorema que la regla es cierta si y solo si el cuadrilátero es un rectángulo (y que en cualquier otro caso, el error es por exceso). Desafortunadamente, aunque el resultado es cierto, la demostración que proporciona no es correcta.

Además de la regla anterior, Ventura de Ávila presenta otra fórmula falsa más para el cálculo del área de un cuadrilátero cualquiera. En concreto es la siguiente: Se unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero y se miden los segmentos resultantes. El producto de dichas longitudes daría la superficie del cuadrilátero. De forma parecida al caso anterior, es evidente que esta regla no puede ser cierta ya que se puede deformar el cuadrilátero, manteniendo constante la longitud de esos dos segmentos, obteniendo cuadriláteros con superficies tan pequeñas como uno quiera.

En este caso, el autor sí logra caracterizar los cuadriláteros para los que esta fórmula es cierta, demostrando además rigurosamente su resultado. De hecho, Ávila demuestra que la fórmula anterior es correcta si y solo si los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos son perpendiculares entre sí. Para demostrar este resultado, y como paso intermedio, Ventura de Ávila demuestra (ignoramos si sabiéndolo o no) el llamado teorema de Varignon (publicado en sus *Elemens de mathematique* de manera póstuma en 1731) que dice que al unir los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera, siempre se obtiene un paralelogramo (llamado actualmente paralelogramo de Varignon) cuya superficie es la mitad de la del cuadrilátero original. Con esta terminología, lo que tenemos pues es que la fórmula es correcta si y solo si el paralelogramo de Varignon es un rombo (paralelogramo con diagonales perpendiculares). Lo que no hace el autor es detenerse a caracterizar cuáles son los cuadriláteros en los que el paralelogramo de Varignon es un rombo. Esto queda como ejercicio para el lector interesado (el resultado es relativamente sorprendente porque la condición es bastante débil).

Para terminar, algunas reflexiones al hilo de todo lo que hemos venido comentando hasta ahora. En primer lugar, merece la pena resaltar el valor educativo de los errores y su posible aprovechamiento. Como vemos, esto ya lo observó un maestro del siglo XVIII que decidió utilizar reglas incorrectas presentes en un conocido libro para incorporarlas en su discurso didáctico. Hoy en día podemos hacer lo mismo utilizando errores históricos como este, las equivocaciones de nuestros propios alumnos, incorrecciones aparecidas en medios de comunicación, etc.

Por otro lado, cuando nos enfrentamos a este tipo de tareas de geometría resulta casi imprescindible llevar a cabo algún tipo de exploración estudiando ejemplos concretos y el mayor número de situaciones posibles. Sobre todo, cuando nos encontramos ante un enunciado que no sabemos si es cierto o no, ni cuándo. Para ello, los programas de geometría dinámica son herramientas indispensables hoy en día y resulta realmente abrumador pensar en cómo se abordaban hasta hace relativamente poco tiempo problemas geométricos complejos de forma sistemática sin la ayuda de GeoGebra, por ejemplo.

En este sentido, la lectura de textos antiguos con contenido geométrico es un contexto muy adecuado para el uso de este tipo de programas que no solamente evitan el uso de lápiz y papel y permiten realizar las construcciones geométricas de forma rápida y exacta, sino que, cuando nos encontramos con situaciones como las que hemos comentado en este artículo, nos permiten experimentar, conjeturar, descartar y, eventualmente, intuir resultados y sus demostraciones.

Notas

1 Utilizo aquí y en todo el discurso una clasificación inclusiva. Es decir, los rectángulos son trapecios porque tienen un par de lados opuestos paralelos. El tema de las clasificaciones inclusivas y exclusivas puede dar lugar a interesantes reflexiones y, a veces, a acaloradas discusiones.

2 La cana era una medida de longitud utilizada especialmente en Cataluña. Aunque variaba en función de la región, equivalía a un poco más de un metro y medio.