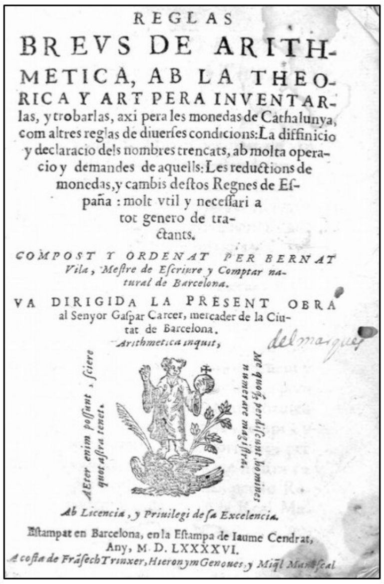
Águilas que sumaban cuadrados y cubos

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

En 1596, Bernat Vila, un «mestre de escriure y comptar» nacido en Barcelona publicó, en catalán, un libro titulado *Reglas brevs de arithmetica, ab la theoria y art pera inventarlas, y trobarlas, axi pera les monedas de Cathalunya, com altres reglas de diverses condicions: La diffinicio y declaracio dels nombres trencants, ab molta operacio y demandes de aquells: Les reductions de monedas, y cambis destos Regnes de España: molt vtil y necessari a tot genero de tractants*.


REGLAS
BREVS DE ARITH-
METICA, AB LA THEO-
RICA Y ART PERA INVENTAR-
las, y trobarlas, axi pera les monedas de Cathalunya, com altres reglas de diuerses condicions: La diffinicio y declaracio dels nombres trencats, ab molta operacio y demandes de aquells: Les reductions de monedas, y cambis destos Regnes de España: molt vtil y necessari a tot genero de tractants.

COMPOST Y ORDENAT PER BERNAT Vila, Mestre de Escriure y Comptar natural de Barcelona.

VA DIRIGIDA LA PRESENT OBRA al Senyor Gaspar Carcer, mercader de la Ciutat de Barcelona.

Arithmetica inquit,

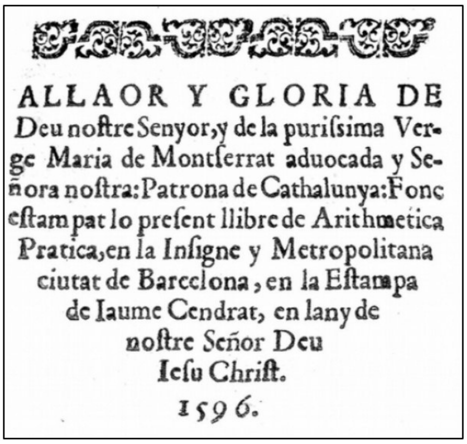
Ne quos perdiscunt homines numerare magistra.

AEther enim possunt, scire quot astra tenet.

Ab Licencia, y Priuilegi de sa Excelencia.

Estampat en Barcelona, en la Estampa de Iaume Cendrat, Any, M. D. LXXXXVI.

A costa de Frãsech Trinxer, Hieronym Genoues, y Migl Manescal.


ALLAOR Y GLORIA DE Deu nostre Senyor, y de la purissima Verge Maria de Montserrat aduocada y Señora nostra: Patrona de Cathalunya: Fonc estampat lo present llibre de Arithmetica Pratica, en la Insigne y Metropolitana ciutat de Barcelona, en la Estampa de Iaume Cendrat, en lany de nostre Señor Deu Iesu Christ.

1596.

Sobre este maestro barcelonés nada más sabemos y su única obra conocida no sobresale especialmente entre las diversas *Aritméticas prácticas* publicadas en el siglo XVI. Vila presupone en el lector el conocimiento de la aritmética elemental con números naturales y la parte introductoria de la obra se limita a presentar la aritmética como ciencia y a definir las cuatro operaciones básicas. Tras esta introducción, el texto tiene cuatro secciones claramente diferenciadas. La primera se dedica a presentar reglas prácticas para el cambio de unidades (monetarias, de peso, etc.). La segunda está dedicada a presentar los números fraccionarios y las operaciones con ellos. En la tercera se trata la regla de tres, descrita como la «reyna y origen de tota la pratica arithmetica», y sus aplicaciones. Finalmente, en la cuarta se dan los cambios de moneda entre Barcelona y diversas ciudades (Zaragoza, Valencia, Nápoles, Roma, etc.). El contenido del texto es, pues, relativamente elemental y eminentemente práctico.

Sin embargo, en las dos páginas finales de la obra, justo antes del colofón, el autor presenta «quatre reglas, o demandes de Arithmetica Pratica: pera prouarse, y exercitarse los que sont auant en lo camptar». Se trata de cuatro problemas cuya dificultad va bastante más allá de lo tratado en el texto. Además, el autor no proporciona solución ni indicación alguna sobre el modo de abordarlos. Tres de ellos están planteados en un contexto comercial de compañías, negocios, etc. El restante, sin embargo, llama la atención y es el que vamos a presentar aquí. El enunciado es como sigue:

> Pos per figura que tota la terra te de circunferencia 28 600 millas y que dues aguilas partexen de vn lloch, y en vn matex punt: la vna vola envés Lleuant, y camina per progresio de nombres cubichs, lo primer dia 1 millia: lo segon dia 8 millias: lo tercer dia 27 millias &c. Laltra Aguila vola enues Ponent, y camina per progresio de nombres quadrats: lo primer dia 1 millia lo segon dia 4 millias: lo tercer dia 9 millias &c. Deman en quants dies justament se encontraran les dites Aguilas, y quantes millas haura caminat cada vna…

El contexto en que se presenta el problema no resulta especialmente inusual. En textos de la época es relativamente común encontrar este tipo de problemas (aves que vuelan hasta encontrarse, animales que se persiguen, etc.) en los que, conocidas velocidades y distancias, se trata de calcular el tiempo necesario para encontrarse o atraparse (recurriendo casi siempre a técnicas basadas en la regla de tres). En este caso, sin embargo, el problema destaca por ser el único de toda la obra que se plantea en un contexto no comercial. Además, vemos que el único elemento realista es el valor proporcionado para la circunferencia de la tierra (el valor real es de unos 40 000 kilómetros y una milla de la época equivalía aproximadamente a 1,4 kilómetros).

Si analizamos la situación desde una óptica moderna, podemos llamar n al número de días necesarios, $D_1(n)$ a la distancia recorrida por la primera águila y $D_2(n)$ a la distancia recorrida por la segunda. Entonces, el problema se reduce a calcular n sabiendo que:

$$D_1(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \quad \text{y} \quad D_2(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$
$$D_1(n) + D_2(n) = 28\,600.$$

Un lector actual, inmediatamente hará uso de las conocidas fórmulas para las sumas de los cuadrados y de los cubos de los primeros n números naturales (de hecho, las llamadas *fórmulas de Faulhaber* permiten calcular la suma de las potencias p-ésimas) y resolverá el problema con relativa facilidad (recomendamos que se intente antes de continuar).

Cabe preguntarse, por supuesto, si nuestro maestro barcelonés tenía acceso a tales fórmulas (o similares). Debemos suponer que sí, dado que plantea el problema, aunque lo cierto es que en su libro no hay ni rastro de ellas ni de problemas remotamente parecidos a este. Ahora bien, sí que las encontramos en otras obras de la época a las que Vila pudo tener acceso. Son varias las *Aritméticas* del XVI que proporcionan alguna regla para la suma de los cuadrados de los términos de ciertas progresiones aritméticas; más raras son las que proporcionan alguna para el caso de los cubos. De hecho, aunque no hemos buscado con demasiado ahínco, solo hemos encontrado una en la que se traten ambos casos. Se trata del *Libro primero*, de *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel, publicado en 1552, y que tiene el honor de ser la primera obra en castellano (aunque no escrita por un español) que trata el álgebra. No obstante, hay que hacer notar que estos aspectos son tratados por el autor antes de embarcarse en los capítulos dedicados al lenguaje algebraico y a las ecuaciones.

Marco Aurel proporciona, para empezar, un procedimiento que permite calcular la suma de los cuadrados de los términos de una progresión aritmética cuya diferencia sea igual al primer término. En concreto:

> Juntarás al doble de la rayz del postrer n.º quadrado la rayz del primero y menor numero quadrado, 1/3 de tal conjunto multiplicaras con la summa de todas las rayzes y verna la summa de todos los números quadrados.

Para el caso de los cubos, después de abordar algunas situaciones más generales, Marco Aurel proporciona la siguiente regla:

> Y también si las rayzes de tales números cúbicos començaren de vno, y el excesso común fuere vno, en estos tales no haras otro que multiplicar la summa de todas las rayces en si mesmo simplemente: y verna la summa de todos los números cúbicos propuestos.

Así pues, si tenemos en cuenta, que también era sobradamente conocida una regla para el cálculo de la suma de los términos de una progresión aritmética cualquiera (en particular la de los n primeros números naturales), los fragmentos anteriores proporcionan fórmulas operativas. Ahora bien, son reglas aritméticas expresadas verbalmente que suponen que se necesita calcular la suma de una cantidad concreta de términos. En ningún caso se plantea una fórmula cerrada o una expresión algebraica.

Si traducimos las reglas aritméticas descritas por Marco Aurel a una notación moderna, se obtiene lo siguiente:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3} \cdot (2n+1) \cdot (1+2+\ldots+n) \quad \text{y} \quad 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+\ldots+n)^2.$$

De este modo, si aplicamos la fórmula para suma de los primeros números naturales (también proporcionada por Marco Aurel), el problema de las águilas se reduciría a resolver (a mano, por supuesto) la siguiente ecuación polinómica:

$$3n^4 + 10n^3 + 9n^2 + 2n - 343\,200 = 0.$$

La fórmula para resolver ecuaciones polinómicas de grado cuatro ya era conocida en la época (se atribuye a Ludovico Ferrari, que llevaba muerto ya más de 30 años cuando se publicó la obra que nos ocupa). Sin embargo, tenemos serias dudas de que Vila estuviera al tanto de dicha fórmula. No pensamos que este fuera el enfoque seguido por el autor.

Así pues, ¿cómo podía haber resuelto Vila el problema? ¿Podemos hacer uso de las reglas aritméticas anteriores para resolverlo sin necesidad de tener que resolver la ecuación anterior? Pensamos que sí, sobre todo teniendo en cuenta que, la suma de los n primeros números naturales es el n-ésimo número triangular T_n. De este modo, usando las fórmulas de Marco Aurel, el problema implica resolver:

$$T_n\Big((2n+1) + 3T_n\Big) = 85\,800.$$

Y en este punto se puede recurrir a una herramienta muy del gusto de la época y en consonancia con la existencia de los llamados libros de cuenta (que incluían multitud de tablas para abreviar el esfuerzo de cálculo). Se podría construir, con algo de trabajo, una tabla como la siguiente (que abreviamos):

n	$2n+1$	T_n	$T_n((2n+1)+3T_n)$
1	3	1	6
2	5	3	42
3	7	6	150
⋮	⋮	⋮	⋮
17	35	153	75 582
18	37	171	94 050

Vemos que no se obtiene una solución exacta y que las águilas se encontrarán en algún momento entre el día 17 y el 18, pero no resulta evidente cómo hallar ese momento. ¿Pretendía Vila que el lector diera una solución aproximada o quizás cometió algún tipo de error al *diseñar* el problema?

Por supuesto, es imposible responder a esta pregunta. Por un lado, el dato de la circunferencia terrestre es demasiado concreto y exacto. Además, utilizando el *método de doble falsa posición* (extensamente utilizado en la época) es posible interpolar linealmente entre los dos valores conocidos. No obstante, si volvemos a la ecuación de cuarto grado que obtuvimos anteriormente resulta lo siguiente:

$$3n^4 + 10n^3 + 9n^2 + 2n = 343\,200$$
$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (3n+1) = 343\,200.$$

Ahora, si sustituimos $n = 18$ en la parte izquierda para comprobar si se trata de una solución, se obtiene:

$$342 \cdot 20 \cdot 55 \neq 343\,200 = 312 \cdot 20 \cdot 55.$$

Como ya sabíamos, $n = 18$ no es una solución de la ecuación, pero está muy cerca de serlo. No en términos absolutos, sino si tenemos en cuenta la factorización de los números implicados. En todo caso, esto queda en el ámbito de la mera especulación y no podemos concluir nada.

Para terminar, y además del interés propio que haya podido tener esta excursión histórica, pensamos que el análisis que hemos realizado puede llevarnos a pensar sobre la posibilidad de resolver problemas de este tipo haciendo uso de tablas, tanteos, etc. Quizás a algunos les pueda parecer un modo *poco matemático* de proceder, pero la historia nos demuestra que ha sido tradicionalmente un método habitual para abordar esta clase de situaciones que, además, pensamos no está exento de interés desde el punto de vista docente y puede servir de base para el diseño de actividades ricas para nuestros alumnos.